Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О СВЯЗИ МЕЖДУ УСТОЙЧИВОСТЬЮ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. А. Скалкина

(Свердловск)

Известно [1], что в теории автоматического регулирования часто встречаются такие системы конечно-разностных уравнений, которые при уменьшении шага до нуля переходят в соответствующие дифференциальные уравнения. Физически это означает, что прерывистый процесс с шагом h, описываемый конечно-разностными уравнениями, переходит при уменьшении шага до нуля в непрерывный, описываемый дифференциальными уравнениями.

При данном h некоторые прерывные процессы могут быть достаточно точно описаны дифференциальными уравнениями, которые хорошо изучены. Возникает вопрос: достаточно ли точно свойства идеализированного непрерывного процесса передают свойства действительного прерывистого процесса. Иными словами, можно ли по известным свойствам решений дифференциального уравнения судить о свойствах соответствующего решения разностных уравнений.

В настоящей работе устанавливается некоторая связь между устойчивостью решений дифференциальных и соответствующих разностных уравнений.

§ 1. Постановка задачи. Пусть возмущенное движение одной системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

а другой — конечно-разностными уравнениями

$$x_{s\, m+1}{}^h = x_{sm}{}^h + hX_s(t_0 + mh, x_{1m}{}^h, \ldots, x_{nm}{}^h) \qquad \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n \\ m = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Здесь $h > 0$ — шаг разностного уравнения, функции $X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ определены и непрерывны по x_j в области $(-\infty, \infty)$ и по t в области $[0, \infty)$ и $X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$,

$$x_{sm}{}^h = x_s{}^h(t_0 + mh), \qquad x_s(t_0) = x_{s0} \quad \text{в области } D_0, \qquad x_s{}^h(t_0) = x_{s0}{}^h \quad \text{в области } D_0$$

где D_0 — некоторая ограниченная замкнутая область.

Очевидно, что система (1.2) при уменьшении шага до нуля переходит в первую (1.1). Для выяснения связи между устойчивостью невозмущенных движений этих систем рассмотрим три случая: системы линейные с постоянными коэффициентами, установившиеся и периодические движения, неустановившиеся движения.

§ 2. Устойчивость по первому приближению. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Если система (1.1) — асимптотически устойчивая линейная система с постоянными коэффициентами, то при достаточно малом h система (1.2) также асимптотически устойчива.

Доказательство. Все характеристические числа системы (1.1) $r_1, \ldots, r_n$ при асимптотической устойчивости, как известно, имеют отрицательные вещественные части.

Покажем, что при

$$0 < h < \min\left\{-\frac{2\operatorname{Re} r_k}{|r_k|^2}\right\} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

система (1.2) является асимптотически устойчивой. Воспользуемся известной связью [2] между характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ системы (1.2) и (1.1), а именно [1]

$$\lambda_k = (1 + r_k h)^{1/h} \tag{2.2}$$

и установим, что при $\operatorname{Re} r_k < 0$ и h из (1.1) имеют место неравенства $|\lambda_k| < 1$. Действительно, из (2.2) следует

$$|\lambda_k| = (1 + 2h \operatorname{Re} r_k + h^2 |r_k|^2)^{1/2h}$$

что при h из (2.1) для всех $k = 1, \ldots, n$ дает $|\lambda_k| < 1$, а это в свою очередь обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1.2) [3].

Теорема 2. Если система (1.1) устойчива по первому приближению, то и система (1.2) при достаточно малом h устойчива по первому приближению.

Доказательство. Из устойчивости системы (1.1) по первому приближению следует, что все характеристические числа ее первого приближения имеют отрицательные вещественные части [4]. По теореме 1 для h, взятых из (2.1), видно, что все характеристические числа первого приближения системы (1.2) по модулю меньше единицы.

На основании теоремы об устойчивости по первому приближению для разностных уравнений [3] система (1.2) устойчива.

§ 3. Установившиеся и периодические движения. Пусть в уравнениях (1.1) и (1.2) непрерывные функции всех аргументов X_s будут периодическими по t периода ω (в случае установившихся движений ω — любое число); будем предполагать, что они удовлетворяют условиям Липшица по $x_1, \ldots, x_n$ в любой ограниченной замкнутой области $D \supset D_0$; $X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$.

В силу периодичности X_s по t замечаем, что для любого целого k

$$F_s(t \pm \omega k, x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0 \pm \omega k) = F_s(t, x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0) \tag{3.1}$$

$$F_s^h(t_0 + mh \pm \omega k, x_{10}^h, \ldots, x_{n0}^h, t_0 \pm \omega k) =$$
$$= F_s^h(t_0 + mh, x_{10}^h, \ldots, x_{n0}^h, t_0) \tag{3.2}$$

где F_s и F_s^h — решения уравнения (1.1) и (1.2) соответственно.

Следовательно, для анализа решений уравнений (1.1) и (1.2) при любом $t_0 \geqslant 0$ достаточно рассмотреть изменение t_0 в интервале $[0, \omega]$.

Лемма 1. Для всякого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существуют не зависящие от $x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0 \in E$, где

$$E = \begin{cases} x_{j0} \in D_0 & (j = 1, \ldots, n) \\ t_0 \in [0, \omega] \end{cases} \tag{3.3}$$

три других положительных числа $h^\circ(\varepsilon)$, $\sigma(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$ таких, что для любых $x_s(t)$ и $x_{sm}{}^h$, для которых

$$h \leqslant h^\circ, \qquad |x_s(t_{01}) - x_s{}^h(t_{02})| < \eta, \qquad |t_{01} - t_{02}| < \sigma$$

выполняются неравенства

$$|x_s(t_{01} + mh) - x_s{}^h(t_{02} + mh)| < \varepsilon$$

до тех пор, пока $x_s(t)$ остается внутри некоторой ограниченной замкнутой области $(t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T)$.

Доказательство. Из доказательства Пеано теоремы существования решений для дифференциальных уравнений [5] следует: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $h^\circ > 0$, что для любых решений уравнений (3.1) и (3.2), шаг которого не более, чем h°, выполняются неравенства

$$|x_s(t_0 + mh) - x_s{}^h(t_0 + mh)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{3.4}$$

если только

$$mh \leqslant T, \qquad x_s(t_0) = x_s{}^h(t_0) = x_{s0}, \qquad h \leqslant h^\circ$$

Вообще говоря, h° может зависеть и от начальных условий.

Кроме того, $x_{sm}{}^h$ являются при указанных ограничениях на X_s непрерывными функциями $x_{10}{}^h, \ldots, x_{n0}{}^h$ и t_0. Следовательно, они непрерывны и по их совокупности в области E, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\sigma > 0$ и $\eta > 0$, которые могут зависеть и от начальных условий, что для любого

$$|x_s{}^h(t_{01} + mh) - x_s{}^h(t_{02} + mh)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{3.5}$$

коль скоро

$$|t_{01} - t_{02}| < \sigma, \qquad |x_s{}^h(t_{01}) - x_s{}^h(t_{02})| < \eta$$

Итак, задав произвольное $\varepsilon > 0$ и положив $t_0 = t_{01}$ из (3.4) и (3.5), получаем для всех $h \leqslant h^\circ$

$$|x_s(t_{01} + mh) - x_s{}^h(t_{02} + mh)| < \varepsilon \tag{3.6}$$

если только

$$mh \leqslant T, \qquad |t_{01} - t_{02}| < \sigma, \qquad |x_s(t_{01}) - x_s{}^h(t_{02})| < \eta$$

Таким образом, каждой точке области E с ее окрестностью (σ, η) по заданному $\varepsilon > 0$ ставится в соответствие число $h^\circ > 0$, для которого в течение времени T после начала движения выполняются неравенства (3.6).

Применяя лемму Бореля о конечном покрытии к ограниченной замкнутой области E, можно из конечного числа значений h°, σ и η выбрать наименьшие. Полученные положительные числа h°, σ и η зависят лишь от ε, E и полностью удовлетворяют требованиям леммы.

Следствие. Если начальные значения взяты из замкнутой ограниченной области (3.3), то для всякого $\varepsilon > 0$ существует не зависящее от начальных условий $h^\circ > 0$ такое, что для всех $h \leqslant h^\circ$ выполняется неравенство

$$|x_s(t_0 + mh) - x_s^h(t_0 + mh)| < \varepsilon$$

если только

$$mh \leqslant T, \qquad x_s(t_0) = x_s^h(t_0)$$

Теорема 3. Если тривиальное решение системы (3.1) асимтпотически устойчиво, то для всякого заданного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа $\delta(\varepsilon)$ и $h^0(\varepsilon)$ таких, что всякое решение уравнения (3.2) с шагом, не превышающим h^0, которое в начальный момент удовлетворяло неравенству $|x_s^h(t_0)| < \delta$, при любом целом положительном m удовлетворяет неравенству

$$|x_s^h(t_0 + mh)| < \varepsilon$$

Доказательство. Предварительно заметим, что если нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво, то $\lim F_s(t, x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0) = 0$ при $t \to \infty$ равномерно относительно $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ и t_0 в области[1] $|x_{i0}| \leqslant \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$.

Из равномерного стремления F_s к нулю с ростом t и равномерной непрерывности по начальным значениям, которая имеет место, так как правые части удовлетворяют условиям Липшица, следует, что тривиальное решение уравнения (3.1) равномерно устойчиво [6]. Именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует не зависящее от t_0 число $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x_s(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$, если $|x_s(t_0)| < \eta$ (выберем $\eta \leqslant \delta$).

Итак, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Выбираем $\delta > 0$ таким образом, чтобы возмущенное движение, начавшееся в δ-окрестности невозмущенного, не вышло из его $^1/_2\varepsilon$-окрестности (очевидно, $\delta < {}^1/_2\varepsilon$), т. е. таким образом, чтобы, если выполняется $|x_s(t_0)| < \delta$, то

$$|x_s(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{3.7}$$

Так как нулевое движение асиптотически устойчиво, то существует $T > 0$ такое, что при $t \geqslant t_0 + T$ будем иметь

$$|x_s(t)| < \frac{1}{2}\delta \tag{3.8}$$

За δ и T принимаем числа, не зависящие от $x_{10}, \ldots x_{n0}$ и t_0, что согласно предварителным замечаниям возможно.

Для рассматриваемых решений на основании следствия из леммы 1 по $\delta(\varepsilon)$ и T можно найти не зависящее от $x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0$ $h^0(\varepsilon, T) > 0$ такое, что если $h \leqslant h^0$ и $x_s^h(t_0) = x_s(t_0)$, то

$$|x_s(t_0 + mh) - x_s^h(t_0 + mh)| < \frac{1}{2}\delta \tag{3.9}$$

при всех целых положительных m, для которых $mh \leqslant T$. В силу непрерывности решений $x_s(t)$ и (3.8) h можно выбрать настолько малым, чтобы одновременно с (3.9) имело место неравенство

$$|x_s(t_0 + Mh)| < \tfrac{1}{2}\delta \qquad (Mh \leqslant T < (M+1)h) \tag{3.10}$$

Из неравенств (3.7), (3.8), (3.9) и (3.10) для $h \leqslant h^\circ$ получаем

$$|x_s^h(t_0 + mh)| < \varepsilon \qquad (m \leqslant M) \tag{3.11}$$

$$|x_s^h(t_0 + Mh)| < \delta \tag{3.12}$$

Таким образом, показано, что для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и $h^\circ > 0$, не зависящие от начальных условий, и такие, что если $h \leqslant h^\circ$, $|x_s^h(t_0)| < \delta$, то выполняется неравенство (3.11).

Покажем, что найденные δ и h° являются искомыми, т. е. неравенство (3.11) справедливо для любых целых $m > 0$.

Рассмотрим решение уравнения (3.1):

$$x_s^1 = F_s(t, x_{10}^1, \ldots, x_{n0}^1, t_0 + Mh)$$

начавшееся в точке $x_{s0}^1 = x_s^h(t_0 + Mh)$.

Найденное выше $\delta > 0$ не зависит от начальных условий и $|x_{s0}^1| < \delta$; следовательно, при любом целом $m > 0$ согласно (3.7) имеем

$$|x_s^1(t_0 + mh)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{3.13}$$

и $\lim F_s(t, x_{10}^1, \ldots, x_{n0}^2, t_0 + Mh) = 0$ при $t \to \infty$ равномерно относительно начальных условий.

Поэтому через то же время T, что и в (3.8), получим

$$|x_s^1(t)| < \tfrac{1}{2}\delta \qquad (t \geqslant t_0 + Mh + T) \tag{3.14}$$

Указанное $h^\circ > 0$, для которого было справедливо неравенство (3.9), не зависит от начальных условий и $x_s^h(t_0 + Mh) = x_s^1(t_0)$, где $h \leqslant h^\circ$. Для тех же h на основании следствия к лемме 1 аналогично (3.9) устанавливаем соотношение

$$|x_s^h[t_0 + (M+m)h] - x_s^1(t_0 + mh)| < \tfrac{1}{2}\delta \quad \text{при } mh \leqslant T \tag{3.15}$$

Ясно, что $M + m \leqslant 2M + 1$. Из (3.12), (3.13), (3.14) получаем

$$|x_s^h(t_0 + mh)| < \varepsilon \qquad (m < 2M + 1), \qquad |x_s^h[t_0 + (2M+1)h]| < \delta \tag{3.16}$$

Неравенства (3.11), (3.12) и (3.16) показывают, что этот процесс можно продолжать неограниченно.

В результате получаем, что найденные $h^\circ > 0$ и $\delta > 0$ таковы, что если $|x_s^h(t_0)| < \delta$, $h \leqslant h^\circ$, то неравенство (3.11) имеет место при любом целом $m > 0$, что и требовалось[1].

---

[1] В приведенном доказательстве существенным образом использовались указания И. Г. Малкина и конструкция С. И. Горшина [7].

§ 4. Неустановившиеся движения. Рассмотрим неустановившиеся движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

$$x_{sm+1}^h = x_{sm}^h + hX_s(t_0 + mh, \; x_{1m}^h, \ldots, \; x_{nm}^h) \tag{4.2}$$

причем

$$X_s(t, \; 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Начальные значения берутся из бесконечной полосы E_0:

$$E_0 = \begin{cases} x_{j0} \in D_0 & (j = 1, \ldots, n) \\ 0 \leqslant t_0 < \infty \end{cases} \tag{4.3}$$

Функции $X_s(t, \; x_1, \ldots, \; x_n)$ определены и непрерывно дифференцируемы в любой бесконечной полосе $E \supset \mathrm{F}E_0$, $E = \{ | x_s | \leqslant H, \; 0 \leqslant t < \infty\}$, удовлетворяют в ней условиям Липшица по $x_1, \ldots, \; x_n$; для любых $x_1, \ldots, \; x_n, \; t \in E$ и всех s выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial X_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} X_j \right| \leqslant N \tag{4.4}$$

В этом случае для неустановившихся движений также удается выяснить некоторую зависимость между устойчивостью решений уравнений (4.1) и (4.2) аналогично тому, как это делалось в § 2.

Лемма 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует положительное число h°, не зависящее от $x_{10}, \ldots, \; x_{n0}, \; t_0 \in E_0$, такое, что для всех решений уравнений (4.1) и (4.2), шаг которого не превышает h°, в течение времени T после начала движения справедливо неравенство

$$| \, x_s(t_0 + mh) - x_s^h(t_0 + mh) \, | < \varepsilon,$$

если $x(t_0) = x^h(t_0)$ и за время T $x_s(t)$ не покидает E.

Доказательство. Прежде всего оценим

$$d_m = \max | \, x_s(t_0 + mh) - x_s^h(t_0 + mh) \, |, \qquad mh \leqslant T \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Воспользуемся методом, указанным Коши [8] для оценки погрешности, допускаемой при приближенном решении дифференциальных уравнений (4.1) методом Эйлера.

При указанных ограничениях на правые части имеем для решения уравнения (3.1) по формуле Тейлора

$$x_s(t + h) = x_s(t) + hx_s'(t) + \frac{h^2}{2} x_s''(t + \tau h) \qquad (0 < \tau < 1)$$

Отсюда учитывая (4.1), получаем

$$x_s(t + h) = x_s(t) + hX_s[t, \; x_1(t), \ldots, \; x_n(t)] + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial X_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} X_j \right]_{t+\vartheta h}$$

Придавая t значения $t_{i-1} = t_0 + (i-1)h$, где $ih < T$, имеем

$$x_s(t_i) = x_s(t_{i-1}) + hX_s[t_{i-1}, x_1(t_{i-1}), \ldots, x_n(t_{i-1})] +$$

$$+ \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial X_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} X_j\right]_{t_{i-1}+\vartheta h} \quad (0 < \vartheta < 1) \tag{4.5}$$

Непосредственно из (4.2) следует, что

$$x_s^h(t_i) = x_s^h(t_{i-1}) + hX_s[t_{i-1}, x_{1i-1}^h, \ldots, x_{ni-1}^h] \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) с учетом (4.4) получаем

$$d_i \leqslant d_{i-1} + h[X_s[t_{i-1}, x_1(t_{i-1}), \ldots, x_n(t_{i-1})] -$$

$$- X_s[t_{i-1}, x_1^h(t_{i-1}), \ldots, x_n^h(t_{i-1})] + \tfrac{1}{2}h^2N$$

так как X_s удовлетворяет условию Липшица

$$d_i < d_{i-1} + hnLd_{i-1} + \tfrac{1}{2}h^2N$$

где L — постоянная Липшица.

Прибавляя к обеим частям неравенства $Nh/2Ln$, преобразуем его к виду

$$d_i + \frac{Nh}{2Ln} < \left[d_{i-1} + \frac{Nh}{2Ln}\right][1 + Lhn]$$

тем более

$$d_i + \frac{Nh}{2Ln} < \left[d_{i-1} + \frac{Nh}{2Ln}\right]e^{Lnh}$$

Придавая i значения 0 до m $|m \leqslant M|$ и перемножая соответствующие части неравенств, получаем (так как $d_0 = 0$)

$$d_m < \frac{Nh}{2Ln}[e^{nLhm} - 1] \tag{4.7}$$

Обозначим $\{T\}$ наибольшее положительное кратное h число, меньшее T, т. е. $\{T\} \leqslant T < \{T\} + h$. Тогда для любого m $(mh \leqslant T)$ из (4.6) имеем

$$d_m < \frac{Nh}{2Ln}[e^{nL\{T\}} - 1]$$

Следовательно, для всякого положительного ε существует $h^\circ > 0$, не зависящее от $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ и t_0, например,

$$h^\circ = \frac{2Ln\varepsilon}{N[e^{nLn\{T\}} - 1]}$$

такое, что для всех $h \leqslant h^\circ$ и $x_{s0} = x_{s0}^h$ выполняется неравенство

$$|x_s(t_0 + mh) - x_s^h(t_0 + mh)| < \varepsilon$$

пока $mh < T$, что и требовалось.

Теорема 4. Если нулевое решение системы (4.1) асимптотически устойчиво, причем стремление возмущенного движения к нулю с ростом t равномерно относительно $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ и $t_0 \in E_0$, то для всякого положительного ε, как бы мало оно ни было, существуют такие два других положительных числа h° и η, что для всякого решения уравнения (4.2) с шагом, не превышающим h°, при любом целом $m > 0$ выполняются неравенства

$$|x_s^h(t_0 + mh)| < \varepsilon,$$

если $|x_{s_0}{}^h| < \eta$.

Для доказательства теоремы 4 нужно, использовав лемму 2, полностью повторить рассуждения доказательства теоремы 3.

В заключение выражаю глубокую благодарность Е. А. Барбашину за предложенную тему и ценные указания при ее выполнении.

Поступила
25 III 1954

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольденбург Р. и Сарториус Г. Динамика автоматического регулирования. Госэнергиздат, М. — Л., 1949.
2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. ГИТТЛ, М. — Л., 1952.
3. Бромберг П. В. Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. Оборонгиз, Москва, 1953.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, М. — Л., 1952.
5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М. — Л., 1952.
6. Малкин И. Г. К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
7. Горшин С. И. Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями. Известия АН Казахской ССР, № 56, серия мат. и мех., вып. 2, 1948.
8. Гурса Э. Курс математического анализа, ч. II, т. II. ГТТИ, М. — Л., 1933.