**Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955**
**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ К. П. ПЕРСИДСКОГО О РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

**Н. Н. Красовский**

(Свердловск)

Достаточные условия устойчивости решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad X_i(0, \ldots, 0, t) = 0 \tag{1}$$

$$|x_i| \leqslant H, \qquad t \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

даются теоремой А. М. Ляпунова [1] (стр. 82). К. П. Персидский показал, что эта теорема допускает обращение [2].

Решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1) называется устойчивым равномерно по $t_0$ [2], если для любого положительного числа $\varepsilon$ можно указать число $\delta > 0$, зависящее лишь от $\varepsilon$, и такое, что решения $x_i = x_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, t)$ уравнений (1) удовлетворяют неравенству

$$|x_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, t)| < \varepsilon$$

при всех $t \geqslant t_0$ и любом $t_0 \geqslant 0$, если только начальные данные $x_{i0}$ удовлетворяют условию

$$|x_{i0}| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Условия первой теоремы А. М. Ляпунова не обеспечивают равномерной устойчивости. К. П. Персидский показал, что достаточно наложить на функцию Ляпунова $v$ дополнительное требование существования бесконечно малого высшего предела [1] (стр. 81) для того, чтобы устойчивость невозмущенного движения была равномерной [2] (теорема 12, стр. 288, [6]).

Цель настоящей заметки показать, что теорема 12 [6] может быть обращена. Очевидно, наибольший интерес представляет доказательство существования такой функции Ляпунова $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, производная которой $dv/dt$ в силу уравнений (1) вычисляется по формуле

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{2}$$

Для этого достаточно показать, что существует функция $v$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка в окрестности невозмущенного движения. В дальнейшем предполагается, что функции $X_i$ имеют непрерывные производные $\partial X_i / \partial x_j$, $\partial X_i / \partial t$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| < L, \qquad \left|\frac{\partial X_i}{\partial t}\right| < L \qquad \text{при } |x_i| \leqslant H, t \geqslant 0 \tag{3}$$

где $L$ — постоянная.

*Теорема 1.* Если решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1) равномерно устойчиво по $t_0$, то в области $|x_i| < H$, $t > 0$ существует непрерывно дифференцируемая определенно-положительная функция Ляпунова $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, допускающая бесконечно малый высший предел, и такая, что производная ее (2) является функцией знакоотрицательной.

*Доказательство.* Продолжим функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ с сохранением класса $C^1$ в область $|x_i| \leqslant H$, $-m \leqslant t < 0$. Возможность такого продолжения следует из теоремы о распространении функций [3] (стр. 675).

Рассмотрим в пространстве $x_1, \ldots, x_n, \tau$ систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, \tau), \qquad \frac{d\tau}{dt} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

$$|x_i| \leqslant H, \qquad -m \leqslant \tau < \infty \tag{5}$$

Пусть $p$ — точка из области (5) с координатами $x_{1p}, \ldots, x_{np}, \tau_p$. Обозначим символом $f(p, t)$ точку, имеющую координаты $x_i = x_i(x_{1p}, \ldots, x_{np}, \tau_p, t + \tau_p)$, $\tau = \tau_p + t$, причем $x_i(x_{1p}, \ldots, x_{np}, \tau_p, \tau_p) = x_{ip}$; символом $f(M, t)$ обозначим множество точек $f(p, t)$ при $p$ из множества $M$. Через $I(r)$ будем обозначать внутреннюю область цилиндра $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$ при $\tau \geqslant -m$, через $I_T(r)$ — пересечение $I(r)$ с гиперплоскостью $\tau = T$.

Вследствие равномерной устойчивости для числа $\varepsilon_0 > 0$ $(\varepsilon_0 < H)$ можно указать положительные числа $\delta_0, \eta_0$ такие, что траектория $f(p, t)$ при $p$ из $I(2\delta_0)$ лежит внутри $I(^1/_2\,\varepsilon_0)$ при всех $t \geqslant 0$ $(\tau \geqslant \tau_p)$, а траектория $f(q, t)$ при $q$ из $I(2\eta_0)$ лежит в $I(^1/_4\,\delta_0)$ при всех $t \geqslant 0$ $(\tau \geqslant \tau_q)$. При условиях (3) скорость движения точки вдоль фазовой траектории равномерно ограничена, поэтому можно указать число $T_0 > 0$ такое, что траектория $f(p, t)$ при $p$ вне $I(\delta_0)$ [или $f(q, t)$ при $q$ вне $I(2\eta_0)$] лежит вне $I(^1/_2\delta_0)$ [или вне $I(\eta_0)$] при всех $t$ из интервала $-2T_0 \leqslant t \leqslant 2T_0$ (при этом потребуем, чтобы выполнялось неравенство $T_0 < m$).

Построим область $G_0$, удовлетворяющую условиям леммы 2.4 из работы Е. А. Барбашина [4]. Обозначим через

$g_0$ — область точек $f[I_0(\delta_0), t]$ при $-m < \tau < -^1/_2\,T_0$

$g_1$ — область [1] $f[I_0(\delta_0), t] - \overline{f}[I_0(2\eta_0), t]$ при $-^1/_2\,T_0 < \tau < T_0$

$g_n$ — область точек $f[I_0\{(2^n - 1)\delta_0 / 2^{n-1}\}, t] + \ldots + f[I_{(n-1)T_0}(\delta_0), t] - \overline{f}[I_0(2\eta_0), t] - \ldots - \overline{f}[I_{(n-1)T_0}(2\eta_0), t]$ при $(n-1)T_0 < \tau < nT_0$

Рассмотрим теоретико-множественную сумму областей $g_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, добавляя к ней также точки из $I(\varepsilon_0)$, являющиеся одновременно концами дуг траекторий двух смежных областей $g_n$ и $g_{n+1}$. Обозначим полученную область через $G_0$.

Покажем, что на любой траектории $f(p, t)$ из области (5) может быть не больше одной связной дуги, лежащей в $G_0$. Действительно, пусть точка

---

[1] Здесь символ $\overline{f}$ означает замыкание множества $f$, а операции сложения и вычитания следует понимать в теоретико-множественном смысле.

$q$ лежит в $G_0$ и траектория $f(q, t)$ при возрастании времени покидает $G_0$. Из построения $G_0$ следует, что $f(q, t)$ может покидать $G_0$ лишь в момент времени $\tau^* = nT_0$, где $n$ — целое число или $n = -{}^1/_2$. Но в таком случае при всех $\tau > \tau^*$ траектория $f(q, t)$ лежит в области $\overline{f}[I_0(2\eta_0), t] + \ldots \overline{f}[I_{nT_0}(2\eta_0), t]$ и, следовательно, вне $G_0$. Итак, для рассматриваемой траектории имеются две возможности: либо положительная полутраектория $f(q, t)$ лежит целиком в $G_0$, либо $f(q, t)$ покидает $G_0$ при $\tau = \tau^*$ и при всех $\tau > \tau^*$ лежит вне $G_0$. Если предположить, что для $q$ из $G_0$ траектория $f(q, t)$ может покинуть $G_0$ при убывании времени и затем снова попасть в $G_0$, то придем в противоречие с предыдущим. Утверждение доказано.

Покажем, что $G_0$ удовлетворяет условиям леммы 2.4. Для этого достаточно показать, что в области $G_0$ нет несобственного седла [4]. Предположим противное. Тогда можно указать последовательность троек точек $\{p_n, q_n, r_n\}$, лежащих на одной дуге из $G_0$, таких, что точки $q_n$ лежат между $p_n$ и $r_n$, последовательности $p_n$ и $r_n$ сходятся к точкам $p$ и $r$ из $G_0$, а последовательность $q_n$ не сходится ни к одной точке из $G_0$. Ограниченная последовательность $q_n$ имеет в $I(\varepsilon_0)$ по крайней мере одну предельную точку $q$. Вследствие интегральной непрерывности точка $q$ должна лежать на той же траектории, что и $p$ и $r$ ($p$ и $r$ по предположению должны лежать лишь на разных дугах из $G_0$). Но в таком случае на $f(q, t)$ были бы две разные связные дуги из $G_0$, что невозможно. Противоречие доказывает утверждение.

Согласно лемме 2.4. [4] область $G_0$ обладает гладким сечением $S_0$, которое является поверхностью уровня $u(x_1, \ldots, x_n, \tau) = 0$ непрерывно дифференцируемой в $G_0$ функции $u$ и обладает тем свойством, что всякая дуга из $G_0$ пересекает $S_0$ один и только один раз; кроме того, на $S_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial u}{\partial \tau} > 0 \tag{6}$$

Из выбора чисел $\delta_0$, $\eta_0$, $T_0$, по построению $G_0$ следует, что область $G_0$ лежит внутри $I({}^1/_2\varepsilon_0)$ и вне $I(\eta_0)$ при $\tau \geqslant 0$. Следовательно, $S_0 \subset G_0$ также при $\tau \geqslant 0$ лежит в $I({}^1/_2\varepsilon_0)$ вне $I(\eta_0)$ при $\tau \geqslant 0$.

Рассмотрим некоторую точку $p$ из $I(\varepsilon_0)$. Скажем, что точка $p$ лежит внутри $S_0$, если траектория $f(p, t)$ пересекает $S_0$ при $t < 0$ ($\tau < \tau_p$). Если траектория $f(q, t)$ пересекает $S_0$ при $t > 0$ ($\tau > \tau_q$) или совсем не пересекает $S_0$, то скажем, что $q$ лежит вне $S_0$.

Обозначим через $H_0$ множество точек, лежащих внутри $S_0$. Покажем, что $H_0$ является открытой областью.

Действительно, пусть точка $p$ лежит в $H_0$. Тогда на $f(p, t)$ есть точка $p_s = f(p, t_s)$, лежащая на $S_0$ при $t_s < 0$. Область $G_0$ — открытая, поэтому точку $p_s$ можно окружить малой окрестностью $g(p_s)$, лежащей целиком в $G_0$, и такой, что диаметр $g(p_s)$ меньше половины расстояния между $p$ и $p_s$. Вследствие интегральной непрерывности точку $p$ можно окружить столь малой окрестностью $g(p)$, чтобы трактории $f(q, t)$ при $q$ из $g(p)$ имели точки в $g(p_s)$ при $t < 0$. Множество $S_0$ является замкнутым в $G_0$, поэтому траектории $f(q, t)$ будут пересекать $S_0$ вблизи точки

$p_s$ при $t < 0$, что и доказывает, что достаточно малая окрестность точки $p$ лежит в $H_0$, т. е. $H_0$ является открытым множеством.

Покажем, что граница $H_0$ состоит из точек сечения $S_0$. Действительно, пусть $p$ — точка на границе $H_0$, не лежащая на $S_0$, и $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность точек из $H_0$, сходящаяся к $p$. Рассмотрим последовательность точек $p_{ns} = f(p_n, t_n)$, лежащих на $S_0$ при $t_n < 0$. Ограниченная последовательность $p_{ns}$ имеет по крайней мере одну предельную точку $q$. Точка $q$ вследствие интегральной непрерывности должна лежать на $f(p, t)$ при $t \leqslant 0$. По предположению $q$ не лежит на $S_0$ (иначе $p \in H_0$, или $p \in S_0$). $S_0$ является множеством, замкнутым в $G_0$, поэтому точка $q$ должна лежать на границе $G_0$. Из построения $G_0$ нетрудно заметить, что всякая траектория $f(q, t)$ для $q$ на границе $G_0$ при возрастании или убывании $t$ попадает внутрь $G_0$. Следовательно, на $f(q, t)$ есть точка $r$, отличная от $q$, в которой $f(q, t)$ пересекает $S_0$. Но в таком случае аналогично предыдущему легко убедиться, что траектории $f(p_k, t)$ (где $p_k$ — подпоследовательность $p_n$ такая, что $f(p_k, t_k)$ сходятся к $q$) должны пересекать $S_0$ по последовательности точек $q_k$, сходящихся к $r \neq q$. Полученное противоречие доказывает, что границей $H_0$ служит сечение $S_0$.

Аналогично доказывается, что множество точек $F_0$, лежащих в области (5) вне $S_0$, является открытым и $S_0$ служит границей между $F_0$ от $H_0$. Из построения $S_0$ очевидно, что $I(\eta_0)$ лежит внутри $S_0(\tau \geqslant 0)$. Выберем число $\varepsilon_1 = {}^1/_2\,\eta_0$. Подбирая для $\varepsilon_1$ числа $\delta_1$, $\eta_1$ и $T_1 < {}^1/_2\,T_0$, удовлетворяющие по отношению к $\varepsilon_1$ тем же условиям, что и числа $\delta_0$, $\eta_0$ и $T_0$ по отношению к $\varepsilon_0$, построим гладкое сечение $S_1$.

Продолжая этот процесс для $n = 0, 1, 2, \ldots$, построим последовательность гладких сечений $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$, вложенных друг в друга и таких, что сечение $S_n$ при $\tau > 0$ лежит внутри цилиндра $I({}^1/_2\,\varepsilon_n)$, но вне $I(\eta_n)$, причем ${}^1/_2\,\varepsilon_0 > \eta_0 > {}^1/_2\,\varepsilon_1 > \eta_1 > \ldots > {}^1/_2\,\varepsilon_n > \eta_n > \ldots$.

При этом для любых двух сечений $S_n$ и $S_{n+1}$ можно указать число $\gamma_n > 0$, удовлетворяющее условию[1] $\gamma_n < \rho(S_n, S_{n+1})$. Последовательность $\gamma_n$ можно выбрать монотонно убывающей.

Зададим последовательность положительных чисел $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ таких, чтобы длина дуги $l$ любой траектории из области (5) удовлетворяла неравенству

$$l < \frac{1}{3}\gamma_{n+1} \tag{7}$$

если только временная длина этой дуги меньше $2\tau_n$.

Область, заполненную отрезками траекторий $f(p, t)$ при $-2\tau_n < t < 2\tau_n$ и $p$ из $S_n$, обозначим через $u_n$. Очевидно, области $u_j$ и $u_k$ при $j \neq k$ не пересекаются и $u_k$ лежит внутри области, ограниченной $u_j$ при $k > j$ (Точка $p$ лежит внутри области, ограниченной $u_n$, если траектория $f(p, t)$ пересекает сечение, образованное положительными концами дуг из $u_n$ при $t < 0$). Множество точек из (5), лежащих внутри области, ограниченной $u_n$, обозначим через $h_n$, множество точек, лежащих в (5) вне $u_n + h_n$, обозначим через $f_n$.

[1] Здесь и в дальнейшем $\rho\,[M_1, M_2]$ означает расстояние между $M_1$ и $M_2$.

Пусть $\varphi_n(\tau)$ — непрерывно дифференцируемая, монотонно убывающая на отрезке $-\tau_n < \tau < \tau_n$ функция такая, что

$$\varphi_n(\tau) = 1 \text{ при } \tau \leqslant -\tau_n, \ \varphi_n(\tau) = 0 \text{ при } \tau \geqslant \tau_n, \ \varphi_n'(-\tau_n) = \varphi_n'(\tau_n) = 0 \quad (8)$$

Рассмотрим функцию $V_n(x_1, \ldots, x_n, \tau) = V_n(q)$, определенную в точках $q$ из области (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} &V_n(q) = \varphi_n(-t_n(q)) && \text{при} \quad q \text{ из } u_n \\ &V_n(q) = 0 && \text{при} \quad q \text{ из } h_n \\ &V_n(q) = 1 && \text{при} \quad q \text{ из } f_n \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $t_n(q)$ — тот момент времени, в который траектория $f(q, t)$ пересекает $S_n$. Функция $V_n(q)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в области (5). Это утверждение следует из того факта, что величина $t_n(q)$ является непрерывно дифференцируемой функцией [5] координат точки $q$. Вдоль траекторий системы имеем

$$\frac{dV_n}{dt} = -\varphi'(-t_n(q))\frac{dt_n(q)}{dt} = \varphi'(-t_n(q)) < 0 \quad \text{при } |t_n(q)| < \tau_n \quad (10)$$

так как

$$\frac{dt_n(q)}{dt} = -1 \quad (11)$$

Зададим монотонную последовательность неограниченно возрастающих чисел $N_0, N_1, \ldots, N_n, \ldots$ Пусть в области $0 \leqslant \tau \leqslant N_n, |x_i| \leqslant H$

$$\max\left\{\left|\frac{\partial V_n}{\partial x_i}\right| \ \left|\frac{\partial V_n}{\partial \tau}\right| \ 1\right\} = M_n \quad (12)$$

Функция

$$v(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(1 + e^{-t}) \qquad \left(v_n(q) = \frac{\eta_n^2}{2^n M_n} V_n(q)\right) \quad (13)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Действительно, знакоположительный ряд (13) сходится равномерно в области (5).

В области $\eta_n^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \varepsilon_n^2, \tau > 0$ функция $v(x_1, \ldots, x_n, \tau)$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\eta_k^2}{M_k 2^k} \leqslant v \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\eta_k^2}{M_k 2^k} \quad (14)$$

что доказывает определенную положительность функции $v$ и существование бесконечно малого высшего предела, откуда следует, в частности, $\lim v(q) = 0$ при приближении точки к оси $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Так как в окрестности любой точки $p$ из области (5) по построению областей $u_n$ и функций $V_n$ не является (может быть) тождественно постоянным лишь одно из слагаемых $v_n$, то функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ имеет непрерывные производные в области (5) вне оси $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Покажем, что частные производные $\partial v / \partial x_i$, $\partial v / \partial t = \partial v / \partial \tau$ стремятся к нулю при приближении к оси $x_1 = \ldots = x_n = 0$ при фиксированном $\tau$.

Пусть $N$ фиксированное, сколь угодно большое положительное число и $K$ такой номер, что

$$N_n \geqslant N \qquad \text{при} \quad n \geqslant K$$

Тогда вследствие (12) выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad \left|\frac{\partial v_n}{\partial t}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{при} \quad n \geqslant K \tag{15}$$

в области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \varepsilon_K^2$, $\tau < N_i$. Следовательно, в этой области выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant \sum_{l=K}^{\infty} \frac{1}{2^l}, \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \leqslant \sum_{l=K}^{\infty} \frac{1}{2^l} \tag{16}$$

что и доказывает справедливость нашего утверждения. Из (16) вследствие

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{x_1 = \ldots = x_n = 0} = \lim_{x_i \to 0} \frac{v(0, \ldots, x_i, \ldots, 0, t)}{x_i} = \lim_{x_i \to 0} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

заключаем, что $\partial v / \partial x_i = 0$ на оси $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Таким образом, действительно $v$ является непрерывно дифференцируемой функцией в области (5). Производная $dv / dt$ в силу уравнений (1) имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dv_k}{dt} (1 + e^{-t}) - e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{17}$$

Первое слагаемое в (17) неположительно, второе отрицательно при $t > 0$ и $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$, т. е. производная $dv / dt$ является функцией знакоотрицательной. Теорема доказана.

Из доказанного выше следует, что условия теоремы К. П. Персидского являются достаточными[2] и необходимыми для наличия равномерной устойчивости, т. е. имеет место следующая теорема.

*Теорема 2*. Для того чтобы невозмущенное движение было устойчивым равномерно по $t_0$, достаточно и необходимо, чтобы существовала определенно-положительная функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, допускающая бесконечно малый высший предел, и такая, что производная ее $dv / dt$ в силу уравнений (1) является функцией знакоотрицательной.

Поступила 12 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М. — Л., 1950.
2. Персидский К. П. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, 1946 (диссертация).
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. Огиз-Гостехиздат, 1948.
4. Барбашин Е. А. Метод сечений в теории динамических систем. Математический сборник, т. 29, вып. 2, 1951.
5. Красовский Н. Н. Об обращении теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений, ПММ, т. XVIII, вып. 5, 1954.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М. — Л., 1949.