Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И НЕАНАЛИТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Н. Г. Булгаков
(Свердловск)

В работе устанавливаются условия существования и дается метод практического вычисления периодических решений автономных квазилинейных систем с n степенями свободы и неаналитической характеристикой нелинейности при общих предположениях относительно характеристического уравнения порождающей системы.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим периодические колебания системы с n степенями свободы, описываемой уравнениями вида

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + \mu f_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (1.1)$$

где a_{sj} — постоянные, а μ — малый параметр. Относительно функций f_s предполагаем, что они допускают в некоторой области G непрерывные частные производные первого порядка.

Периодические колебания неавтономной квазилинейной системы со многими степенями свободы при неаналитической характеристике нелинейности рассмотрены И. Г. Малкиным.

Случай автономных систем имеет существенные особенности, резко отличающие его от случая систем неавтономных. В самом деле, для неавтономных систем любое периодическое решение имеет вполне определенный, наперед заданный период, равный периоду правых частей уравнений или кратный ему. Автономные же системы могут иметь периодические решения любого периода, который заранее неизвестен и который, вообще говоря, является функцией параметра μ.

Кроме того, автономные системы не могут иметь изолированных периодических решений. Вследствие этих особенностей рассматриваемый случай требует специального исследования.

Допустим, что характеристическое уравнение

$$|a_{sj} - \delta_{sj}\rho| = 0 \qquad (1.2)$$

имеет нулевой корень, кратность которого равна l_0, и r пар чисто мнимых корней вида $\pm p_j\lambda i$ ($j = 1, \ldots, r$), где p_j — целые числа, λ — произвольное положительное число, и что кратности этих корней равны $l_1, \ldots, l_r$.

Обозначим число групп решений линейных уравнений, которые соответствуют этим так называемым критическим корням, соответственно через $k_0, k_1, \ldots, k_r$, и предположим, что хотя бы для одного из корней l_j не превосходит k_j.

Из рассмотрения исключаем случай, когда среди критических корней имеется нулевой корень кратности l_0, но не имеется чисто мнимых корней вида $\pm p_j\lambda i$, так как задача отыскания периодических решений в этом случае становится тривиальной и сводится к нахождению положений равновесия системы. Пусть

$$k_0 + 2k_1 + \ldots + 2\,k_r = m$$

Тогда, как известно, порождающая система

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}\,x_n \tag{1.3}$$

допускает m линейно-независимых решений с периодом $\omega = 2\pi / \lambda$.

$$\varphi_1^{(i)}(t), \ldots, \varphi_n^{(i)}(t) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.4}$$

А именно нулевому корню отвечает k_0 решений вида $x_s = A_s^{(l)}$ $(l = 1, \ldots, k_0)$, в котором все величины $A_s^{(l)}$ являются постоянными, а каждой паре чисто мнимых корней $\pm p_j\lambda i$ отвечает $2\,k_j$ решений вида (1.5)

$$x_s = B_{sj}^{(l)} \cos p_j\lambda t + C_{sj}^{(l)} \sin p_j\lambda t, \qquad x_s = B_{sj}^{(l)} \sin p_j\lambda t - C_{sj}^{(l)} \cos p_j\lambda t$$

где $B_{sj}^{(l)}, C_{sj}^{(l)}$ — также постоянные. Порождающая система (1.3), таким образом, допускает семейство периодических периода ω решений [1], зависящее от m произвольных постоянных $M_1, \ldots, M_m$:

$$x_s = M_1\varphi_s^{(1)}(t) + \ldots + M_m\varphi_s^{(m)}(t) \tag{1.6}$$

В дальнейшем известную роль будут играть периодические решения системы, сопряженной с системой (1.3):

$$\frac{dy_s}{dt} = -a_{1s}\,y_1 - \ldots - a_{ns}\,y_n \tag{1.7}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет корни, лишь знаком отличающиеся от корней характеристического уравнения (1.2). Поэтому система (1.7) также имеет m линейно независимых периодических периода ω решений

$$\psi_1^{(i)}(t), \ldots, \psi_n^{(i)}(t) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.8}$$

Примем произвольное периодическое решение

$$x_s^*(t) = M_1^*\,\varphi_s^{(1)}(t) + \ldots + M_m^*\,\varphi_s^{(m)}(t) \tag{1.9}$$

принадлежащее семейству (1.6) и соответствующее значениям параметров $M_i = M_i^*$, за порождающее решение. При этом будем предполагать, что оно лежит в области G.

Задача заключается, во-первых, в отыскании условий, которым должны удовлетворять постоянные M_i^* для того, чтобы порождающему решению (1.9) отвечало при достаточно малом $|\mu|$ периодическое решение исходной системы (1.1), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее реше-

[1] Система (1.3) может иметь еще и другие периодические решения с периодом, отличным от ω.

ние (1.9), и, во-вторых, в непосредственном вычислении этого периодического решения системы (1.1) и его периода, который, вообще говоря, является функцией параметра μ. Эта задача для частного случая, когда имеется только одна пара критических (чисто мнимых) корней, рассматривалась Андроновым и Виттом [3] и Б. В. Булгаковым [4]. Случай произвольного числа критических корней иным путем рассматривался также в работе [5], где, однако, установлены лишь условия существования периодических решения, но не дан метод вычисления этих решений для неаналитических уравнений.

§ 2. Необходимые условия существования периодического решения. Пусть

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + \mu\alpha) \tag{2.1}$$

период искомого периодического решения; α — функция от μ, подлежащая определению. Обозначим $\alpha(0) = \alpha^*$.

Заменим в уравнении (1.1) переменную t на τ при помощи подстановки

$$t = \tau(1 + \mu\alpha) \tag{2.2}$$

Тогда система (1.1) примет вид:

$$\frac{dx_s}{d\tau} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + \mu F_s(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \mu) \tag{2.3}$$

где

$$F_s = (1 + \mu\alpha) f_s(x_1, \ldots, x_n) + \alpha(a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n)$$

Периодическому решению периода T исходной системы (1.1), которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее решение (1.9), будет отвечать, очевидно, периодическое решение периода ω системы (2.3), которое при $\mu = 0$ обращается в периодическое периода ω решение

$$x_s^*(\tau) = M_1^* \varphi_s^{(1)}(\tau) + \ldots + M_m^* \varphi_s^{(m)}(\tau) \tag{2.4}$$

Теорема. Для того чтобы система (2.3) допускала периодическое решение периода ω, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение (2.4), необходимо, чтобы постоянные $M_1^*, \ldots, M_m^*$ и $\alpha(0) = \alpha^*$ удовлетворяли системе уравнений

$$P_i(M_1^*, \ldots, M_m^*, \alpha^*) = \int_0^\omega \sum_{s=1}^n F_s(x_1^*, \ldots, x_n^*, \alpha^*, 0)\, \psi_s^{(i)}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^\omega \sum_{s=1}^n f_s(x_1^*, \ldots, x_n^*)\, \psi_s^{(i)}(\tau)\, d\tau + \alpha^*\omega \sum_{k=1}^m M_k^* A_{ki} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

где

$$A_{ki} = \sum_{s=1}^n \psi_s^{(i)}(\tau) \frac{d\varphi_s^{(k)}}{d\tau} \tag{2.6}$$

постоянные, так как функции $d\varphi_s^{(k)}/d\tau$ также являются решениями системы (1.3).

Доказательство. Пусть $x_s = H_s(\tau, \mu)$ — периодическое периода ω решение системы (2.3) такое, что

$$H_s(\tau, 0) \equiv M_1^* \varphi_s^{(1)}(\tau) + \ldots + M_m^* \varphi_s^{(m)}(\tau)$$

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{dx_s}{d\tau} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + \mu F_s [H_1(\tau, \mu), \ldots, H_n(\tau, \mu), \alpha, \mu] \qquad (2.7)$$

Для того чтобы эта система допускала периодические решения, необходимо и достаточно, как это показал И. Г. Малкин [1], чтобы

$$\int_0^\omega \sum_{s=1}^n F_s [H_1(\tau, \mu), \ldots, H_n(\tau, \mu) \alpha, \mu] \psi_s^{(i)}(\tau) d\tau = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (2.8)$$

Очевидно, что система (2.7) имеет периодическое решение $x_s = H_s(\tau, \mu)$. Следовательно, соотношения (2.8) выполняются тождественно относительно μ. Полагая в них $\mu = 0$, получим (2.5), что и доказывает теорему.

Уравнения (2.6) служат, таким образом, для нахождения тех значений постоянных M_i^* и α^*, при которых порождающему решению (2.4) может отвечать при достаточно малом $|\mu|$ периодическое решение системы (2.3). Так как число уравнений (2.5) на единицу меньше числа неизвестных, то можно пытаться решать задачу, выбрав одну из этих неизвестных совершенно произвольно. Для дальнейшего важно только, чтобы полученные таким образом m уравнений с m неизвестными имели простые решения, т. е. такие решения, для которых якобиан от функций P_i по оставшимся неизвестным был отличен от нуля.

В связи с этим покажем прежде всего, что если в уравнениях (2.5) положить $\alpha^* = \tilde{\alpha}^*$, где $\tilde{\alpha}^*$ — произвольно выбранная постоянная, то для любого решения $M_1^*, \ldots, M_m^*$ уравнений

$$P_i(M_1^*, \ldots, M_m^*, \tilde{\alpha}^*) = 0 \qquad (2.9)$$

якобиан

$$\left\{\frac{\partial(P_1, \ldots, P_m)}{\partial(M_1^*, \ldots, M_m^*)}\right\}_{\alpha^* = \tilde{\alpha}^*} \qquad (2.10)$$

будет равен нулю. В самом деле, если бы якобиан (2.10) был отличен от нуля, то в достаточно малой окрестности точки M_i^* не существовало бы других точек, удовлетворяющих уравнениям (2.9).

Покажем, что в любой сколь угодно малой окрестности точки M_i^* всегда найдется другая точка M_i^{**}, удовлетворяющая уравнениям (2.9). Действительно, если в периодическом решении (2.5) заменить τ на $\tau + h$, где h — некоторое достаточно малое число, то мы снова получим периодическое решение, которое будет, очевидно, линейной комбинацией линейно независимых периодических периода ω решений (1.4):

$$x_s^*(r + h) = M_1^* \varphi_s^{(1)}(\tau + h) + \ldots + M_m^* \varphi_s^{(m)}(\tau + h) =$$
$$= M_1^{**} \varphi_s^{(1)}(r) + \ldots + M_m^{**} \varphi_s^{(m)}(\tau)$$

где M_i^{**} — некоторые постоянные, отличные от M_i^*, но близкие к ним в силу малости h. Покажем, что постоянные M_i^{**} являются корнями уравнений (2.9). Имеем

$$P_i(M_1^{**}, \ldots, M_m^{**} \tilde{\alpha}^*) = \int_0^\omega \sum_{s=1}^n F_s [x_1^*(t + h), \ldots, x_n^*(t + h), \tilde{\alpha}^*, 0] \psi_s^{(i)}(t) dt \qquad (2.11)$$

Заменив в системе линейно независимых периодических решений (1.8) t на $t+h$, очевидно, снова получим систему линейно независимых периодических периода ω решений

$$\psi_1^{(i)}(t+h), \ldots, \psi_n^{(i)}(t+h) \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{2.12}$$

Следовательно, решения (1.8) являются линейной комбинацией решений (2.12):

$$\psi_s^{(i)}(t) = C_1^{(i)}\psi_s^{(1)}(t+h)+\ldots+C_m^{(i)}\psi_s^{(m)}(t+h) \tag{2.13}$$

где $C_j^{(i)}$ — постоянные.

Заменяя в (2.11) $\psi_s^{(i)}(t)$ их выражениями (2.13), получим

$$P_i(M_1^{**},\ldots,M_m^{**},\tilde{\alpha}^*) = \sum_{k=1}^{m} C_k^{(i)}\int_0^\omega \sum_{s=1}^{n} F_s[x_1^*(t+h),\ldots,x_n^*(t+h),\tilde{\alpha}^*,0]\times$$

$$\times\psi_s^{(i)}(t+h)\,dt = \sum_{k=1}^{m} C_k^{(i)}P_k(M_1^*,\ldots,M_m^*,\tilde{\alpha}^*) = 0 \tag{2.10}$$

Следовательно, действительно для любого решения M_i^* уравнений (2.9) якобиан (2.10) равен нулю.

Покажем теперь, что если каждая из групп, отвечающих критическим корням состоит более чем из одного решения, то для любого решения уравнений (2.5), в которых одна из неизвестных M_i^* выбрана произвольно, якобиан от функций P_i по оставшимся неизвестным равен нулю[1].

Для доказательства заметим, что для любого периодического решения $\varphi_s^{(j)}(t)$ системы (1.3) в этом случае выполняются условия

$$\sum_{s=1}^{n}\varphi_s^{(j)}(t)\,\psi_s^{(i)}(t) = 0 \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{2.14}$$

В самом деле, при сделанных предположениях относительно критических корней среди решений системы (1.3) обязательно имеется непериодическое решение вида

$$\varphi_s^{(j)}(t)\,t + f_s^{(j)}(t) \tag{2.15}$$

где $f_s^{(j)}(t)$ — некоторые периодические функции периода ω.

Подставляя решение (2.15) в систему (1.3), получим тождества

$$\frac{df_s^{(j)}}{dt} \equiv a_{s1}f_1^{(j)}+\ldots+a_{sn}f_n^{(j)} - \varphi_s^{(j)}(t) \tag{2.16}$$

Из (2.16) следует, что система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} = a_{s1}z_1+\ldots+a_{sn}z_n - \varphi_s^{(j)}(t)$$

имеет периодическое решение $z_s = f_s^{(j)}(t)$ и, следовательно, имеют место соотношения

$$\int_0^\omega \sum_{s=1}^{n}\varphi_s^{(j)}(t)\,\psi_s^{(i)}(t)\,dt = 0$$

---

[1] Этот случай мы исключили из рассмотрения, предположив, что хотя бы для одного из критических корней $l_j = k_j$.

Отсюда в силу известных свойств решений сопряженных систем получаем (2.14). Принимая во внимание (2.14), имеем далее

$$A_{ki} = \sum_{s=1}^{n} \psi_s^{(i)}(\tau) \frac{d\varphi_s^{(k)}}{dr} = 0$$

так как периодические периода ω решения $d\varphi_s^{(k)}/d\tau$ системы (1.3) являются линейной комбинацией решений $\varphi_s^{(k)}(\tau)$.

Следовательно, уравнения (2.5) принимают вид:

$$P_i(M_1^*, \ldots, M_m^*, \alpha^*) = \int_0^{\omega} \sum_{s=1}^{n} f_s(x_1^*, \ldots, x_n^*) \psi_s^{(i)}(\tau)\, d\tau$$

Итак, уравнения (2.5) в рассматриваемом случае не содержат α^*. Следовательно, действительно для любого решения уравнений (2.5), в которых одна из неизвестных M_i^* выбрана произвольно, якобиан m-го порядка от функций P_i по оставшимся неизвестным (в том числе и по α^*) равен нулю. Таким образом, в уравнениях (2.5) произвольно можно выбрать только одну из неизвестных $M_1^*, \ldots, M_m^*$. Будем в дальнейшем предполагать, что $M_m^* = 0$.

Покажем, что это не ограничивает общности рассуждений. По предположению среди критических корней уравнения (1.2) имеется по крайней мере одна пара чисто мнимых корней вида $\pm p\lambda i$. Этой паре корней отвечают два периодических решения вида (1.5), которые для определенности мы примем за $\varphi_s^{(m-1)}(\tau)$ и $\varphi_s^{(m)}(\tau)$:

$$\varphi_s^{(m-1)}(\tau) = B_s \cos p\lambda\tau + C_s \sin p\lambda\tau, \qquad \varphi_s^{(m)}(\tau) = B_s \sin p\lambda\tau - C_s \cos p\lambda\tau$$

Предположим, что система (2.4) имеет периодическое решение

$$x_s = M_1^* \varphi_s^{(1)}(\tau) + \ldots + M_m^* \varphi_s^{(m)}(\tau) + \Phi_s(\tau, \mu) \tag{2.17}$$

где $M_m^* \neq 0$, $\Phi_s(\tau, \mu)$ — периодические периода ω функции, исчезающие вместе с μ. Если в этом решении заменить τ на $\tau + h$, где h — произвольная постоянная, то мы снова, очевидно, получим периодическое решение системы (2.3)

$$\begin{aligned} x_s = M_1^* \varphi_s^{(1)}(\tau + h) + \ldots + M_{m-1}^* \varphi_s^{(m-1)}(\tau + h) + \\ + M_m^* \varphi_s^{(m)}(\tau + h) + \Phi_s(\tau + h; \mu) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Но

$$\begin{aligned} M_{m-1}^* \varphi_s^{(m-1)}(\tau + h) + M_m^* \varphi_s^{(m)}(\tau + h) \equiv [M_{m-1}^* \cos p\lambda h + \\ + M_m^* \sin p\lambda h]\, \varphi_s^{(m-1)}(\tau) + [M_m^* \cos p\lambda h - M_{m-1}^* \sin p\lambda h]\, \varphi_s^{(m)}(\tau) \end{aligned}$$

Аналогичные тождества можно написать для решений, отвечающих другим чисто мнимым корням вида $\pm p\lambda i$. Что касается решений, отвечающих нулевым корням, то, так как эти решения суть постоянные, замена τ на $\tau + h$ в решении (2.17) не изменит постоянных множителей при этих решениях.

Полагая в (2.18) h равным корню уравнения

$$\operatorname{tg} p\lambda h = \frac{M_m^*}{M_{m-1}^*}$$

получим периодическое решение вида

$$x_s = N_1 \varphi_s^{(1)}(\tau) + \ldots + N_{m-1}\varphi_s^{(m-1)}(\tau) + \Phi_s(\tau + h, \mu) \tag{2.19}$$

где $N_1, \ldots, N_{m-1}$ — постоянные, $\Phi_s(\tau + h, 0) = 0$. Решение (2.19) не является новым решением системы (2.3), так как принадлежит к тому же семейству (2.18), что и решение (2.17). Это и показывает, что предположение $M_m^* = 0$ не нарушает общности рассуждений.

§ 3. Достаточные условия существования периодического решения и его вычисление. Пусть $M_1^*, \ldots, M_{m-1}^*, \alpha^*$ — корни уравнений (2.5), в которых M_m^* принята равной нулю:

$$P_i(M_1^*, \ldots, M_{m-1}^*, 0, \alpha^*) = 0 \tag{3.1}$$

и пусть

$$\left\{\frac{\partial (P_1, \ldots, P_m)}{\partial (M_1^*, \ldots, M_{m-1}^* \alpha^*)}\right\}_{M_m^*=0} \neq 0 \tag{3.2}$$

Будем искать периодическое решение системы (2.3), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее[1]:

$$x_s^* = M_1^* \varphi_s^{(1)}(\tau) + \ldots + M_{m-1}^* \varphi_s^{(m-1)}(\tau) \tag{3.3}$$

методом последовательных приближений, развитым И. Г. Малкиным. Для этого примем за нулевое приближение периодическое решение

$$x_s^{(0)} = M_1^{(0)} \varphi_s^{(1)}(\tau) + \ldots + M_{m-1}^{(0)} \varphi_s^{(m-1)}(\tau) \tag{3.4}$$

где $M_1^{(0)}, \ldots, M_{m-1}^{(0)}$ — произвольные постоянные. В качестве дальнейших приближений примем периодические решения уравнений

$$\frac{dx_s^l}{d\tau} = a_{s1} x_1^{(l)} + \ldots + a_{sn} x_n^{(l)} + \mu F_s(x_1^{(l-1)}, \ldots, x_n^{(l-1)}, \alpha^{(l-1)}, \mu) \tag{3.5}$$

$$(l = 1,\ 2, \ldots)$$

где $\alpha^{(l-1)}$ — произвольная постоянная. Для того чтобы система (3.5) допускала периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^\omega \sum_{s=1}^n F_s(x_1^{(l-1)}, \ldots, x_n^{(l-1)}, \alpha^{(l-1)}, \mu)\, \psi_s^{(i)}(\tau)\, d\tau = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.6}$$

Уравнениям (3.6) при $l = 1, 2, \ldots$ можно удовлетворить так. Периодические решения системы (3.5), если они существуют, имеют вид:

$$x_s^{(l)} = M_1^{(l)} \varphi_s^{(1)}(\tau) + \ldots + M_{m-1}^{(l)} \varphi_s^{(m-1)}(\tau) + \Phi_s^{(l)}(\tau) \tag{3.7}$$

где $M_1^{(l)}, \ldots, M_{m-1}^{(l)}$ — произвольные постоянные, а $\Phi_s^{(l)}(\tau)$ — какое-нибудь частное периодическое решение системы (3.5)[2].

---

[1] Мы предполагаем при этом, что порождающее решение (3.3) лежит в области G.

[2] Согласно предыдущему параграфу мы не вводим в решение (3.7) члена, содержащего $\varphi_s^{(m)}(\tau)$.

Этими произвольными постоянными, а также произвольной постоянной $\alpha^{(l)}$ мы и воспользуемся для удовлетворения условия периодичности функций $x_s^{(l+1)}$.

Произвольные постоянные $M_1^{(0)}, \ldots, M_{m-1}^{(0)}$ и $\alpha^{(0)}$ определяем из условия периодичности первого приближения, т. е. из уравнений (3.6) при $l = 1$, после чего произвольные постоянные $M_1^{(1)}, \ldots, M_{m-1}^{(1)}$ и $\alpha^{(1)}$ определяем из условия периодичности второго приближения и т. д.

Таким путем получаем вполне определенный процесс последовательных приближений, так как уравнения (3.6) при $|\mu|$ достаточно малом имеют одно и только одно решение $M_i^{(l-1)}(\mu)$, $\alpha^{(l-1)}(\mu)$, для которого

$$M_i^{(l-1)}(0) = M_i^*, \qquad \alpha^{(l-1)}(0) = \alpha^* \qquad (i = 1, \ldots, m-1)$$

В самом деле, при $\mu = 0$ и $M_i^{(l-1)} = M_i^*$ функции $x_s^{(l-1)}$ совпадают с x_s^* и поэтому уравнения (3.6) на основании (3.1) тождественно удовлетворяются при $\mu = 0$, $M_i^{(l-1)} = M_i^*$, $\alpha^{(l-1)} = \alpha^*$.

Так как при этом по предположению выполняется условие (3.2), то уравнения (3.6) допускают при достаточно малом $|\mu|$ одно и только одно решение $M_i^{(l-1)}(\mu)$, $\alpha^{(l-1)}(\mu)$, для которого $M_i^{(l-1)}(0) = M_i^*$, $\alpha^{(l-1)}(0) = \alpha^*$. Рассмотренный процесс последовательных приближений при достаточно малом $|\mu|$ сходится к искомому периодическому решению.

Доказательство этого предложения в принципе не отличается от доказательства сходимости последовательных приближений, рассмотренных в работах И. Г. Малкина [1] и С. Н. Шиманова [2], и поэтому здесь не приводится.

Произведя вычисление периодического решения системы (2.3), обращающегося при $\mu = 0$ в порождающее решение (3.3), мы тем самым доказали, что условия (3.1) и (3.2) являются достаточными для его существования. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема. Для каждого решения уравнений (3.1), для которого выполняется условие (3.2) и для которого порождающее решение (3.3) лежит в области G, существует при достаточно малом $|\mu|$ периодическое решение системы (2.3), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее.

Поступила 4 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. К теории колебаний квазилинейных систем со многими степенями свободы. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
2. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
3. Андронов А. и Витт А. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы. ЖТФ, т. IV, вып. 1, 1934.
4. Булгаков Б. В. О применении метода Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. ПММ, т. VI, вып. 4, 1942.
5. E. A. Coddington and N. Levinson. Perturbations of linear systems with constant coefficients possessing periodic solutions. Contributions to the theory of nonlinear oscillations. Vol. II edited by S. Lefschetz, Princeton, 1952.