Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А. М. Летов

1. Рассмотрим регулируемые системы, возмущенное движение которых описывается уравнениями вида

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi, \qquad \dot{\xi} = f(\sigma)$$
$$\dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\eta_\alpha - \xi \qquad (k = 1, \ldots n) \tag{1.1}$$

Здесь $b_{k\alpha}$ — параметры, а η_k — обобщенные координаты объекта регулирования, n_k — параметры, а ξ — координата регулирующего органа, p_α — параметры регулятора, $f(\sigma)$ — ограниченная, однозначная и всюду (за исключением, быть может, точки $\sigma = 0$) непрерывная функция, обладающая свойствами $f(0) = 0$, $\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$.

Для сокращения определенные так функции $f(\sigma)$ будем называть функциями класса (А).

В некоторых случаях имеет смысл говорить о таких функциях $f(\sigma)$, которые в дополнение к сказанному обладают свойствами

$$\left[\frac{df(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=0} \geqslant h > 0, \qquad \sigma\varphi(\sigma) > 0 \qquad \text{при } \sigma \neq 0 \quad \varphi(\sigma) = f(\sigma) - h\sigma \tag{1.2}$$

где h — фиксированное число.

Будем говорить, что такие функции образуют подкласс (А') функций в классе (А).

Устойчивость регулируемых систем вида (1.1) в случае, когда $b_{k\alpha}$, n_k, p_α — постоянные величины, подробно исследована и освещена в работах А. И. Лурье, И. Г. Малкина и др. [1].

В настоящей работе мы будем предполагать, что $b_{k\alpha}$, n_α $(\alpha, k = 1,\ldots,n)$ — заданные функции времени, определенные при $0 \leqslant t < T$; функции $p_\alpha(t)$ полежат определению.

Под величиной T будем понимать любое вещественное положительное число и, может быть, $+\infty$, а полуинтервал $[0, T)$ обозначим буквой N.

Свойства всех упомянутых выше функций таковы, что каждой системе начальных значений $\eta_k(0) = \eta_{k0}$, $\xi(0) = \xi_0$, принадлежащих некоторой ограниченной области R, отвечает в полуинтервале N единственное решение уравнений (1.1)

Преобразуем исходные уравнения к нужной нам форме. Это преобразование проведем в два приема.

Положим

$$\xi = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \eta_\alpha - \sigma \tag{1.3}$$

и исключим в (1.1) переменную ξ. Введем обозначения

$$b_{k\alpha}{}^\circ = b_{k\alpha} + p_\alpha n_k, \qquad n_k{}^\circ = -n_k$$

$$p_\beta{}^\circ = \dot{p}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha b_{\alpha\beta}{}^\circ, \qquad \rho = -\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha n_\alpha \qquad (\alpha, \beta, k = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Первую форму преобразованных уравнений получим в виде:

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}{}^\circ \eta_\alpha + n_k{}^\circ \sigma, \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha{}^\circ \eta_\alpha - \rho\sigma - f(\sigma) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

Пусть F^2 — вещественная знакоопределенная и всюду положительная квадратичная форма переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$:

$$F^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \tag{1.6}$$

Ее коэффициенты являются постоянными и подчиняются лишь неравенствам Сильвестра

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Пусть S — любое вещественное положительное число.

Определим новые переменные $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta$ при помощи равенств

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \eta_k = V \sqrt{a_{ii}} \zeta_i, \qquad \sigma = \frac{V}{S} \zeta, \qquad V^2 = F^2 + S^2 \sigma^2 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

Преобразование (1.8) является непрерывным, взаимно однозначным и в силу предположения (1.7) может быть разрешено относительно старых переменных. Действительно, рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & {}_1a_{1\,r-1} & \sqrt{a_{11}}\,\zeta_1 & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,r-1} & \sqrt{a_{nn}}\,\zeta_n & a_{n\,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и пусть Δ_{rs} — алгебраические дополнения его элементов. Решая уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \eta_k = V \sqrt{a_{ii}} \zeta_i, \qquad \sigma = \frac{V}{S} \zeta$$

находим формулы обратного преобразования:

$$\eta_r = \frac{V}{\Delta_n} \sum_{s=1}^{n} \Delta_{sr} \sqrt{a_{ss}} \zeta_s, \qquad \sigma = \frac{V}{S} \zeta \tag{1.9}$$

Найдем уравнения в новых переменных. С этой целью дифференцируем V^2 и, воспользовавшись (1.1), (1.9), вычислим производную. Имеем

$$2V\dot{V} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\left[\eta_\beta\left(\sum_{r=1}^{n} b_{\alpha r}{}^\circ\eta_r + n_\alpha{}^\circ\sigma\right) + \eta_\alpha\left(\sum_{r=1}^{n} b_{\beta r}{}^\circ\eta_r + n_\beta{}^\circ\sigma\right)\right] +$$

$$+ 2S^2\sigma\left[\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha{}^\circ\eta_\alpha{}^\circ - \rho\sigma - f(\sigma)\right]$$

Первая часть этого выражения преобразуется к виду

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\left[\sum_{r=1}^{n} b_{\alpha r}{}^\circ\eta_r\eta_\beta + \sum_{r=1}^{n} b_{\beta r}{}^\circ\eta_\alpha\eta_r\right] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{k\beta} + a_{\beta k})\,b_{k\alpha}{}^\circ\right]\eta_\alpha\eta_\beta$$

Поскольку форма F^2 симметрична, то

$$V\dot{V} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\beta}b_{k\alpha}{}^\circ\right)\eta_\alpha\eta_\beta + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}n_\alpha{}^\circ\eta_\beta\sigma +$$

$$+ S^2\sigma\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha{}^\circ\eta_\alpha - S^2(\rho + h)\,\sigma^2 - S^2\sigma\varphi(\sigma)$$

Введем в рассмотрение квадратичную форму W, определенную так:

$$W = \sum_{s,r=1}^{n} B_{sr}\zeta_s\zeta_r + 2\sum_{s=1}^{n} Q_s\zeta_s\zeta + (\rho + h)\,\zeta^2$$

$$B_{sr} = -\frac{\sqrt{a_{ss}a_{rr}}}{\Delta_n^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k\beta}b_{k\alpha}{}^\circ\right)\Delta_{s\alpha}\Delta_{r\beta} \tag{1.10}$$

$$Q_s = \frac{\sqrt{a_{ss}}}{2\Delta_n S}\left[S\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha{}^\circ\Delta_{s\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}n_\alpha{}^\circ\Delta_{r\beta}\right]$$

Искомое уравнение для $\dot{V}$ может быть получено после исключения переменных η_k, определенных формулами (1.9). Оно имеет вид:

$$\dot{V} = -WV - S\zeta\varphi(V\zeta) \tag{1.11}$$

Уравнения для остальных переменных образуются путем дифференцирования величин ζ_k, ζ (1.8) и исключения переменных η_k, η_k, σ уже известным способом. Таким образом, получим

$$\dot{\zeta}_i = \left[W + \frac{S\zeta}{V}f(V\zeta)\right]\zeta_i + \frac{1}{\Delta_n\sqrt{a_{ii}}}\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{k,\alpha=1}^{n}\sqrt{a_{ss}}\,\Delta_{\alpha s}a_{ik}b_{k\alpha}{}^\circ\right]\zeta_s +$$

$$+ \frac{1}{S\sqrt{a_{ii}}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}n_k{}^\circ\right)\zeta \tag{1.12}$$

$$\dot{\zeta} = \left[W + \frac{S\zeta}{V}f(V\zeta)\right]\zeta + \frac{S}{\Delta_n}\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha{}^\circ\Delta_{s\alpha}\sqrt{a_{ss}}\right]\zeta_s - (\rho + h)\,S\zeta - \frac{S}{V}\varphi(V\zeta)$$

Соотношения (1.11), (1.12) образуют совокупную систему $n+2$ дифференциальных уравнений, имеющих первый интеграл

$$\sum_{s,r=1}^{n} A_{rs}\zeta_r\zeta_s + \zeta^2 = 1 \tag{1.13}$$

в котором величины A_{rs} определяются равенствами

$$A_{rs} = \frac{\sqrt{a_{rr}a_{ss}}}{\Delta_n^2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\Delta_{s\alpha}\Delta_{r\beta} \qquad (r,\ s=1,\ldots,n) \tag{1.14}$$

В силу условия (1.7) все A_{rs} — положительные числа, благодаря чему уравнение (1.13) определяет замкнутую поверхность — $n+1$-мерный эллипсоид в пространстве переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta$. Теперь формулируем задачу. Как следует из приведенного, поведение изображающей точки $M(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta)$ описывается радиусом-вектором $\overline{V}$, модуль которого служит решением системы дифференциальных уравнений (1.11), (1.12).

Регулируемую систему (1.1) назовем устойчивой [2] в N, если при всяком произвольно заданном положительном числе A, как бы оно ни было мало, может быть выбрано положительное число λ так, чтобы при любых возмущениях $\eta_k(0)$, $\sigma(0)$, принадлежащих R и удовлетворяющих условию

$$V(0) \leqslant \lambda \tag{1.15}$$

как следствие выполнялось неравенство

$$V(t) < A \tag{1.16}$$

при любом $t > 0$, принадлежащем N.

Задача состоит в определении функций $p_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, $t \in N$, при которых гарантируется устойчивость невозмущенного неустановившегося движения системы (1.1), каковы бы ни были в R возмущения и функция $f(\sigma)$ класса (A) или подкласса (A′).

Такую устойчивость назовем абсолютной. Сделаем одно замечание. Преобразованием (1.8) мы пользовались в работе [3] при изучении устойчивости и качества регулируемых систем (1.1) в случае постоянных $b_{k\alpha}$, n_k, p_α. При $a_{ki} = \delta_{ki}$, $S = 1$ преобразованием (1.8) пользовался В. С. Ведров [4] еще в 1937 г. при изучении устойчивости по Ляпунову установившихся движений в особых случаях.

В настоящей статье делается попытка распространить ранее изложенные рассуждения [3] по устойчивости регулируемых систем (1.1) на тот случай, когда $b_{k\alpha}$, n_k известные функции времени, определенные в N.

Несмотря на то что преобразование (1.8) является нелинейным и содержит $n+2$ переменных, оно во многих отношениях является интересным в силу своей ясной геометрической структуры.

Действительно, величина V может быть принята в качестве эвклидовой метрики пространства переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$ σ и является квадратом длины радиуса-вектора, проведенного из начала координат к изображающей точке $M(\eta_1, \ldots, \eta_n, \sigma)$, а ζ_k — его направляющие косинусы.

Введение переменных (1.8) позволяет вести прямое наблюдение за поведением изображающей точки M в фазовом пространстве и дает возможность делать заключения об устойчивости системы как с постоянными, так и переменными коэффициентами на любом полуинтервале N, пользуясь при этом лишь элементарными средствами математического анализа.

Отметим, что в известной работе Г. В. Каменкова [5] и в работах Лебедева [6,7] точно так же исследуется квадратичная метрика пространства Эвклида.

2. Приступая к решению задачи, замечаем, что для устойчивости системы (1.1) достаточно, чтобы функция (1.10) принимала на поверхности (1.13) положительные значения. Действительно, в этом случае уравнение

$$\dot{V}^* = -WV^* \tag{2.1}$$

имеет решение

$$V^* = V^*(0)\exp\left(-\int W dt\right) = V(0)\exp\left(-\int W dt\right) \tag{2.2}$$

Следовательно, любая функция V, определяемая совокупными дифференциальными уравнениями (1.11), (1.12) и любыми начальными условиями, будет, наверное, удовлетворять неравенству

$$V(t) \leqslant V(0)\exp\left(-\int W dt\right) \tag{2.3}$$

если функция $\varphi(\sigma)$ принадлежит к классу (A).

Следовательно, для устойчивости регулируемой системы (1.1) достаточно, чтобы функция W принимала на поверхности (1.13) положительные значения, какова бы ни была знакоопределенная и всюду положительная функция F^2 и функция $\varphi(\sigma)$ класса (A).

Итак, вопрос об устойчивости данной системы регулирования сведен к составлению условий определенной положительности функции W на поверхности (1.13).

Эти условия могут быть формулированы в двух доступных формах. Например, составим определители

$$\begin{vmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{k1} & \ldots & B_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad \begin{vmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1n} & Q_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1} & \ldots & B_{nn} & Q_n \\ Q_1 & \ldots & Q_n & \rho + h \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

и образуем неравенства Сильвестра. Левые части неравенств содержат время. Их выполнение для любого t в N служит необходимым и достаточным условием положительности формы W.

С другой стороны, всегда существует линейное преобразование к новым переменным, приводящее вещественную квадратичную форму к каноническому виду

$$-W = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k^2 \tag{2.5}$$

причем собственные значения формы суть положительные и вещественные корни уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} B_{11}-\lambda \ . \ . \ . \ B_{1n} & Q_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ B_{n1} \ . \ . \ . \ B_{nn}-\lambda & Q_n \\ Q_1 \ . \ . \ . \ Q_n & \rho+h-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.6)$$

Рассмотрим уравнение $\Delta(-\lambda)=0$ и составим для него неравенства Гурвица

$$\Delta_1 > 0, \ \dots, \ \Delta_{n+1} > 0 \qquad (2.7)$$

Левые части неравенств содержат время. Их выполнение служит необходимым и достаточным условием положительности формы W. Отсюда вытекает теорема: если параметры регулятора выбраны так, что неравенства (2.4) или неравенства (2.7) выполняются для каждого значения t в области N, то регулируемая система (1.1) устойчива, каковы бы ни были возмущения и функция $f(\sigma)$ класса (A) или подкласса (A′).

3. Для иллюстрации изложенного рассмотрим пример. Уравнения возмущенного движения системы суть

$$T^2\ddot{\psi} + U\dot{\psi} + k\psi + \eta = 0$$
$$\dot{\eta} = f(\sigma), \qquad \sigma = a\psi + E\dot{\psi} + G^2\ddot{\psi} - \frac{1}{l}\eta \qquad (3.1)$$

Эта система изучалась ранее в предположении постоянства величин k, U, T, a, l, E, G.

Для упрощения последующих рассуждений преобразуем уравнения (3.1) к новым переменным, определенным при помощи равенств

$$\sigma = p_1\psi + p_2\dot{\psi} - \frac{1}{i}\eta, \qquad \zeta = m\psi + n\dot{\psi} \qquad (3.2)$$

где обозначено

$$p_1 = a - qG^2, \quad p_2 = E - pG^2, \quad q = \frac{k}{T^2}, \quad p = \frac{U}{T^2}, \quad i = \frac{lT^2}{T^2 + lG^2}$$

а m, n — пока произвольные постоянные.

В новых переменных уравнения (3.1) могут быть записаны так:

$$\dot{\eta}_1 = b_{11}^\circ\eta_1 + b_{12}^\circ\eta_2$$
$$\dot{\eta}_2 = b_{21}^\circ\eta_1 + b_{22}^\circ\eta_2 + n_2^\circ\sigma \qquad (3.3)$$
$$\dot{\sigma} = p_1^\circ\eta_1 + p_2^\circ\eta_2 - \rho\sigma - \frac{1}{i}f(\sigma)$$

Здесь

$$\eta_1 = \psi, \qquad \eta_2 = \zeta, \qquad b_{11}^\circ = -\frac{m}{n}, \qquad b_{12}^\circ = \frac{1}{n}, \qquad \rho = \frac{1}{i}\frac{di}{dt} - \frac{lp_2}{T^2 + lG^2}$$

$$b_{21}^\circ = -m\left[\frac{m}{n} - \frac{U + lE}{T^2 + lG^2}\right] - \frac{n(k + al)}{T^2 + lG^2}, \qquad b_{22}^\circ = -\left[\frac{U + lE}{T^2 + lG^2} - \frac{m}{n}\right]$$

$$p_1^\circ = \frac{1}{n}\left[\dot{p}_2 + \frac{p_2}{i}\frac{di}{dt} + p_1 - \frac{p_2(U + lE)}{T^2 + lG^2}\right] \qquad (3.4)$$

$$p_2^\circ = \dot{p}_1 - \frac{m}{n}\dot{p}_2 + \frac{p_1}{i}\frac{di}{dt}\frac{mp_2}{ni}\frac{di}{dt} - \frac{p_2(k + al)}{T^2 + lG^2} - \frac{mp_1}{n} + \frac{m}{n}\frac{U + lE}{T^2 + lG^2}p_2$$

Для составления формы W рассмотрим преобразование (3.5)

$$a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 = V\sqrt{a_{11}}\zeta_1, \qquad a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 = V\sqrt{a_{22}}\zeta_2, \qquad \sigma = \frac{V}{S}\zeta$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\eta_1 = \frac{V}{\Delta_1}\left[a_{22}\sqrt{a_{11}}\zeta_1 - a_{21}\sqrt{a_{22}}\zeta_2\right]$$

$$\eta_2 = \frac{V}{\Delta_2}\left[-a_{12}\sqrt{a_{11}}\zeta_1 + a_{11}\sqrt{a_{22}}\zeta_2\right] \tag{3.6}$$

$$\sigma = \frac{V}{S}\zeta$$

По формулам (1.10) находим следующие выражения для коэффициентов формы:

$$B_{11} = \frac{a_{12}b_{12}^\circ - a_{22}b_{11}^\circ}{\Delta_2}, \qquad B_{22} = \frac{a_{21}b_{21}^\circ - a_{11}b_{22}^\circ}{\Delta_2}a_{22}$$

$$B_{12} = \frac{a_{12}(b_{11}^\circ + b_{22}^\circ) - (a_{11}b_{12}^\circ + a_{22}b_{21}^\circ)}{2\Delta_2}\sqrt{a_{11}a_{22}}$$

$$Q_1 = \frac{S\sqrt{a_{11}}}{2\Delta_2}(a_{12}p_2^\circ - a_{22}p_1^\circ), \qquad Q_2 = \frac{\sqrt{a_{22}}}{2\Delta_2 S}\left[-\Delta_2 n_2^\circ + S^2(a_{21}p_1^\circ - a_{11}p_2^\circ)\right]$$

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

В дальнейшем рассмотрим частный случай выбора формы F^2, в котором $a_{12} = a_{21} = 0$.

Тогда имеем

$$B_{11} = -b_{11}^\circ, \qquad B_{12} = -b_{22}^\circ, \qquad B_{12} = -\frac{a_{11}b_{12}^\circ + a_{22}b_{21}^\circ}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}}$$

$$Q_1 = -\frac{Sp_1^\circ}{2\sqrt{a_{12}}}, \qquad Q_2 = -\frac{\sqrt{a_{22}}}{2S}\left[n_2^\circ + \frac{S^2p_2^\circ}{a_{22}}\right]$$

Образуем неравенства (2.4). Первое неравенство имеет вид: $m/n > 0$. Оно не является существенным и всегда может быть выполнено. Для второго из них имеем

$$B_{11}B_{22} - B_{12}^2 = b_{11}^\circ b_{22}^\circ - \frac{(a_{11}b_{12}^\circ + a_{22}b_{21}^\circ)^2}{4a_{11}a_{22}}$$

Раскроем его, воспользовавшись формулами (3.4). Имеем

$$4a_{11}a_{22}\frac{m}{n}\left[\frac{U+lE}{T^2+lG^2} - \frac{m}{n}\right] > \frac{a_{11}^2}{n^2} + m^2a_{22}^2\left[\frac{U+lE}{T^2+lG^2} - \frac{m}{n}\right]^2 +$$
$$+ \frac{n^2a_{22}^2(k+al)^2}{(T^2+lG^2)^2} - \frac{2mna_{22}^2(k+al)}{T^2+lG^2}\left[\frac{U+lE}{T^2+lG^2} - \frac{m}{n}\right] +$$
$$+ \frac{2a_{11}a_{22}}{n}\left[m\left(\frac{U+lE}{T^2+lG^2} - \frac{m}{n}\right) - \frac{n(k+al)}{T^2+lG^2}\right]$$

Положим

$$\frac{U+lE}{T^2+lG^2} - \frac{m}{n} = y, \qquad \frac{k+al}{T^2+lG^2} = x \tag{3.7}$$

и произведем в неравенстве элементарные преобразования, после чего получим кривую, определяющую контур области устойчивости по переменным x, y:

$$F(xy) = n^2 a_{22}{}^2 x^2 + m^2 a_{22}{}^2 y^2 - 2mna_{22}{}^2 xy -$$

$$- 2a_{11}a_{22}x - 2\,\frac{m}{n}\,a_{11}a_{22}y + \frac{a_{11}{}^2}{n^2} = 0 \qquad (3.8)$$

Легко убедиться, что кривая является параболой, касающейся оси y в точке с положительной ординатой a_{11} / mna_{22} и оси x в точке с положительной абсциссой $a_{11} / n^2 a_{22}$. Расположение параболы изображено на фиг. 1.

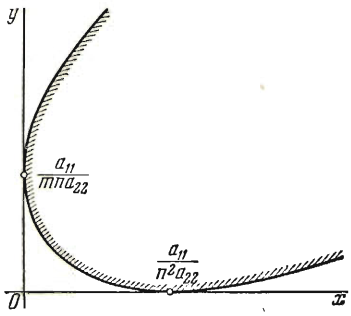

Рис. 1

Внутренние точки параболы отвечают значениям параметров регулятора, при которых система устойчива, т. е.

$$B_{22} = y > 0, \qquad F(xy) < 0 \qquad (3.9)$$

Остается рассмотреть последнее условие. Оно имеет вид: (3.10)

$$B_{11}Q_1{}^2 + B_{22}Q_2{}^2 < (\rho + h)(B_{11}B_{22} - B_{12}{}^2)$$

Для того чтобы это условие выполнялось, необходимо, чтобы

$$\rho + h > 0 \qquad (3.11)$$

Таким образом, для устойчивости системы (3.1) достаточно выбрать параметры регулятора согласно неравенствам (3.9), (3.10), (3.11).

Поступила 16 XII 1954

Институт автоматики
и телемеханики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1950. (Тут же имеется библиография.)
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
3. Летов А. М. К теории качества нелинейных регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, т. XIV, № 5, 1953.
4. Ведров В. С. Об устойчивости движения. Труды ЦАГИ, вып. 327, 1937.
5. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.
6. Лебедев А. А. К задаче об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
7. Лебедев А. А. Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.