## ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ А. И. КАЛАНДИЯ «ИЗГИБ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ В ВИДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА» [1]

Работа А. Н. Каландия содержит важные и нужные исследования по регулярности полученных им бесконечных систем (1.33) и (1.34). Однако подстрочное примечание к ст. 702 содержит несправедливое утверждение.

Как в работе А. И. Каландия, так и в работе М. П. Шереметьева [2] для фактического получения решения приходится пользоваться усеченной системой. Поэтому замечание А. И. Каландия, что М. П. Шереметьев «предлагает усеченную систему для приближенного решения, опираясь при этом на теорему существования рассматриваемой краевой задачи», в равной степени должно относиться и к его решению.

На самом же деле, как это следует ниже, все основные уравнения (1.8) — (1.14) и (1.33), (1.34), полученные А. И. Каландия, легко можно получить методом, предложенным М. П. Шереметьевым.

Действительно, возьмем граничные условия, указанные в [2]:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\,\varphi_1'(t) + \psi_1(t) = f_1(t) && \text{на } L_2 \\
&-\varkappa\overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\,\varphi_1'(t) + \psi_1(t) = f_1(t) + ic_1t + c && \text{на } L_1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

После преобразования эллиптического кольца на круговое функцией

$$z = A(\zeta + m\zeta^{-1})$$

граничные условия примут вид:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\varphi(\sigma)} + (\rho^2\sigma^{-1} + m\rho^{-2}\sigma)\frac{\varphi'(\sigma)}{1 - m\sigma^{-2}} + \psi(\sigma) = f(\sigma) && \text{на } \gamma_2 \\
&-\varkappa\overline{\varphi(\sigma)} + (\sigma^{-1} + m\sigma)\frac{\varphi'(\sigma)}{1 - m\sigma^{-2}} + \psi(\sigma) = f(\sigma) + ic(\sigma^{-1} + m\sigma) + c && \text{на } \gamma_1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ будем искать в виде

$$\varphi(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta), \qquad P_1(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\zeta^\nu, \qquad P_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^{-n}$$

$$\psi(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta), \qquad Q_1(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu\zeta^\nu, \qquad Q_2(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\zeta^{-\nu}$$

Положим, что

$$f(\sigma_2) = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\sigma_2{}^k + \beta_k\sigma_2{}^{-k}), \qquad f(\sigma_1) = \sum_{k=0}^{\infty}(\delta\ -{}^{k} + \gamma\ \sigma_1{}^{-k})$$

Умножим уравнения (2) на

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma_j}{\sigma_j -} \qquad (j = 1,2)$$

и проинтегрируем соответственно по $\gamma_1$ и $\gamma_2$ при значениях $|\zeta| < 1$, $|\zeta| > 1$, $|\zeta| < \rho$, $|\zeta| > \rho$. Из полученных в результате интегрирования четырех уравнений исключаем $Q_1(\zeta)$ и $Q_2(\zeta)$. Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях $\zeta$ в оставшихся уравнениях дает

$$\frac{1}{2}\lambda\frac{y}{\sqrt{m}} + \delta_0 + \gamma_0 + c = 0$$

$$m(\varkappa + \rho^{-2})\,\bar{a}_1 + (1 - \rho^2)\,c_1 = \frac{1}{2}\lambda x - m\delta_1 + m\alpha_1 - icm^2$$

$$m(\varkappa+\rho^{-4})a_2+2(1-\rho^2)c_2=\frac{1}{2}\lambda y\frac{1}{\sqrt{m}}-m\delta_2+m\alpha_2$$

$$m(\varkappa+\rho^{-6})\overline{a}_3+3(1-\rho^2)c_3+\lambda c_1 m^{-1}=2\lambda x\frac{1}{\sqrt{m}}-m\delta_3+m\alpha_3$$

$$-(\varkappa+\rho^2)\overline{c}_1+m(\rho^2-1)a_1-ic=\gamma_1-\beta_1-\frac{1}{2}\lambda x$$

$$-(\varkappa+\rho^4)\overline{c}_2+2m(\rho^2-1)a_2=\gamma_2-\beta_2-\frac{1}{2}\lambda\sqrt{m}\,y \qquad (3)$$

$$-(\varkappa+\rho^6)\overline{c}_3+3m(\rho^2-1)a_3-\lambda a_1=\gamma_3-\beta_3-2\lambda mx$$

$$m(\varkappa+\rho^{-2k})\overline{a}_k+k(1-\rho^2)c_k+\lambda\sum_{\nu=1}^{(k-1)/2}(k-2\nu)c_{k-2\nu}m^{-\nu-1}=$$

$$=\alpha_k-\delta_k+2\lambda\left[P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})(-1)^{k+1}\right](\sqrt{m})^{-k-1}$$

$$-(\varkappa+\rho^{2k})\overline{c}_k+km(\rho^2-1)a_k-\lambda\sum_{\nu=1}^{(k-1)/2}(k-2\nu)a_{k-2\nu}m^{\nu-1}=$$

$$=\gamma_k-\beta_k-2\lambda\left[P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})(-1)^{k+1}\right](\sqrt{m})^{k-1}$$

где

$$x=P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})$$

$$y=P_1'(\sqrt{m})-P_1'(-\sqrt{m})$$

$$\lambda=(1-\rho^2)(1-m^2\rho^{-2})$$

Из уравнения (3) легко получаются уравнения (1.8) — (1.14) [2], если учесть, что

$$\delta_n-m\delta_{n+2}=A_n' \quad (n=1,2,\ldots), \qquad \gamma_n-m\gamma_{n-2}=A_{-n}' \quad (n=2,3,\ldots)$$

$$\alpha_n-m\alpha_{n+2}=A_n''\rho^{-n} \quad (n=1,2,\ldots), \qquad \beta_n-m\beta_{n-2}=A_{-n}''\rho^{-n} \quad (n=2,3,\ldots)$$

$$\delta_0+\gamma_0-m\delta_2=A_0', \qquad \alpha_0+\beta_0-m\alpha_2=A_0'', \qquad \gamma_1-m\delta_1=A_{-1}^1, \qquad \beta_1-m\alpha_1=A_{-1}''$$

Уравнения (1.33), (1.34) работы [2] получаются, если учесть, что

$$A=\frac{1}{2}x=\sum_{s=1}^{\infty}m^{s-1}(2s-1)c_{2s}, \qquad B=\frac{1}{2}y\frac{1}{\sqrt{m}}=2\sum_{s=1}^{\infty}m^{s-1}sa_{2s},$$

$$A_{-1}=\beta_1-\gamma_1, \qquad A_{-2k+1}=\beta_{2k-1}-\gamma_{2k-1},$$

$$A_1=\alpha_1-\delta_1 \qquad A_{2k-1}=\alpha_{2k-1}-\delta_{2k-1} \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

$$A_{-2k}=\beta_{2k}-\gamma_{2k}, \qquad A_{2k}=\alpha_{2k}-\delta_{2k}$$

Из приведенного видно, что основные уравнения работы [2] (1.8) — (1.14), (1.33), (1.34) могут быть получены из одного и того же уравнения (3) путем различных комбинаций его членов.

Поступила 15 XI 1954

*В. А. Лихачев*

ЛИТЕРАТУРА


1. Каландия А. Т. Изгиб упругой пластинки в виде эллиптического кольца. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.
2. Шереметьев М. П. Упругое равновесие эллиптического кольца. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.