К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ (В СВЯЗИ СО СТАТЬЕЙ В. И. ФЕОДОСЬЕВА [1])

Х. М. Муштари

(Казань)

В. И. Феодосьев в указанной статье предложил рассматривать выпучившуюся оболочку как состоящую из двух частей: из области вмятины, контур которой определяется искомым полярным углом θ_1, и сопряженной с нею остальной части оболочки с малыми прогибами. Сама по себе такая мысль не вызывает возражений, но, к сожалению, конечные выводы исследования [1], выполненного на ее основе, не заслуживают доверия, так как они получены путем обычной процедуры интегрирования метода Бубнова-Галеркина в применении к решению рассматриваемой краевой задачи, имеющей необычный характер, так как в ней область интегрирования также является искомой. В настоящей заметке мы даем новое решение вопроса о нижнем критическом давлении для сферической оболочки, пользуясь указанной выше аппроксимацией формы выпучивания, но при этом для решения задачи мы применяем принцип возможных перемещений. Оказывается, что разрешающее сравнение, полученное таким путем, совпадает с уравнением метода Бубнова-Галеркина, если при применении последнего левую часть интегрируемого уравнения умножать на вариацию аппроксимирующей функции. Между тем в работе [1], применяя метод Галеркина, автор умножает левую часть уравнения на самую аппроксимирующую функцию, что в рассматриваемом случае приводит в первом приближении к большой погрешности.

Одновременно на данном примере мы обращаем внимание на то, что для наилучшего определения нижнего критического давления (т. е. давления выхлопа) необходимо за возможное перемещение, дающее переход от устойчивого состояния равновесия в неустойчивое состояние, принять то, при котором выхлоп осуществляется легче всего. Иначе говоря, за нижнее критическое давление следует принимать наибольшее из всех возможных значений этой величины, соответствующих выбранной форме выпучивания.

1. Рассмотрение вопроса в первом приближении. Будем пользоваться обозначениями статьи [1], а соответствующие ее формулы снабжать *. Пусть полюс сферы помещается в центре вмятины, а на контуре вмятины угол ϑ поворота дуги меридиана при выпучивании равен нулю. Примем для области вмятины, как и в статье [1]:

$$\vartheta = \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r_1}\frac{dw}{d\rho} = C(\rho^3 - \rho) \tag{1.1}$$

где r — расстояние от точки области до оси сферы, r_1 — расстояние от точки контура, $\rho = r / r_1$, $r \approx R\theta$ (R — радиус сферы). Из условия совместности деформаций (2*) по формуле (5*) определяем функцию напряжения $\psi = -T_1\rho / Eh$, где h — толщина оболочки. При этом меридиональное усилие на контуре равно

$$(T_1)_{\rho=1} = -Eh\psi \qquad (\rho = 1) \tag{1.2}$$

Из условия равновесия области вмятины в целом находим истинное значение перерезывающей силы на контуре:

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\rho r_1 - T_1(\theta_1\rho + \vartheta)|_{\rho=1} \tag{1.3}$$

Эта же величина, вычисленная по известным формулам, равна

$$Q_1^* = -D\left(\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2}\right) \qquad \text{при} \quad r = r_1 \tag{1.4}$$

Так как ϑ, взятое по (1.1), не удовлетворяет дифференциальному уравнению равновесия (3*), то имеется неувязка $Q_1 - Q_1^*$ в контурном значении перерезывающей силы.

Радиальный изгибающий момент и окружное удлинение выражаются известными формулами

$$M_1 = -\frac{D}{r_1}\left(\frac{d\vartheta}{d\rho} + \mu\frac{\vartheta}{\rho}\right), \qquad \varepsilon_2 = -\frac{d\psi}{d\rho} + \mu\frac{\psi}{\rho} \tag{1.5}$$

Для части оболочки вне вмятины (при $\theta \geqslant \theta_1$) В. И. Феодосьев принимает

$$\vartheta = Ae^{-k(\theta-\theta_1)}\sin k(\theta-\theta_1), \qquad k = (3(1-\mu^2))^{1/4}\sqrt{\frac{R}{h}} \tag{1.6}$$

Как известно, это решение пригодно для выражения краевого эффекта, если можно пренебречь единицей по сравнению с $k\theta$. В нашем случае контур области лежит недалеко от полюса, поэтому обычная приближенная теория краевого эффекта может привести к большой погрешности (см., например, § 71 работы [2]). Однако в первом приближении мы также примем (1.6) и, исходя из него, вычислим все кинематические и статические величины, характеризующие деформацию вне и на контуре вмятины. Приравнивая найденные таким образом контурные значения величин T_1, Q, M_1 и ε_2 для двух частей оболочки, приходим к формулам (11*) и (12*), которые при введении обозначений

$$\alpha = \frac{1}{k\theta_1}, \qquad q = \frac{pR}{2Eh}, \qquad \bar{p} = \frac{pR^2}{2Eh^2} \tag{1.7}$$

принимают вид:

$$C = 4\theta_1 - 48\theta_1(\alpha^2 + \alpha^3) \tag{1.8}$$

$$96\psi = C^2(\rho^7 - 4\rho^5 + 6\rho^3 - 3\rho) + 4C\theta_1(\rho^5 - 3\rho^3 + 2\rho) + 96(C\theta_1\alpha^3 + q)\rho \tag{1.9}$$

В дальнейшем мы отходим от хода решения, предложенного В. И. Феодосьевым, которое нам представляется ошибочным. В самом деле, пусть

$$L = -D\left(r\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r}\right) + \frac{T_1 r^2}{R} + T_1 r\vartheta + \frac{pr^2}{2}$$

Величина $(1/r)(dL/dr)$ равна сумме проекций на нормаль сил, действующих на единицу площади оболочки. При (1.1) она не равна нулю и представляет неуравновешенность, соответствующую выбранной форме выпучивания. Будем определять параметр C из условия равенства нулю суммы элементарных работ неуравновешенностей по всей площади оболочки при возможном перемещении δw. Таким образом, учитывая уравновешенность элементов вне вмятины, находим

$$2\pi\int_0^{r_1}\frac{1}{r}\frac{dL}{dr}(\delta w)\,r\,dr + 2\pi r_1(Q_1 - Q_1^*)\,\delta w\,\Big|_{r_1} = 0$$

Интегрируя по частям, находим

$$L\delta w\,\Big|_{r_1} + r_1(Q_1 - Q_1^*)\,\delta w\,\Big|_{r_1} - \int_0^{r_1} L\frac{d}{dr}(\delta w)\,dr = 0$$

В силу равенств (1.1), (1.3) и (1.4) контурные величины сокращаются. Но

$$\frac{d}{dr}(\delta w) = \delta\frac{dw}{dr} = \delta\vartheta$$

Таким образом, после небольших преобразований находим

$$\int_0^1\left\{\rho\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} + \frac{d\vartheta}{d\rho} - \frac{\vartheta}{\rho} + 4k^4\theta_1^2\left[\psi(\theta_1\rho + \vartheta) - q\theta_1\rho^2\right]\right\}\delta\vartheta\,d\rho = 0 \tag{1.10}$$

Выражение, стоящее здесь в фигурных скобках, будучи приравнено нулю, дает уравнение (3*). Для приближенного интегрирования этого последнего В. И. Феодосьев подставляет в него (1.1) и полученную неуравновешенность умножает на ϑ, а затем интегрирует по ρ и результат приравнивает нулю. Уравнение же (1.10), вытекающее из принципа возможных перемещений, показывает необходимость умножения не на ϑ, а на $\delta\vartheta$. Если бы область вмятины была задана, то имело бы место равенство $\delta\vartheta = (\rho^3 - \rho)\,\delta C$ и обе процедуры выравнивания неуравновешенностей совпадали бы. В данном же случае, как видно из граничного условия (1.8), варьирование C невозможно без варьирования θ_1, а величину $\rho = r / r_1 = \theta / \theta_1$ нельзя считать неварьируемой при варьировании C, ибо положение каждой фиксированной точки определяется координатой r (или θ).

Поэтому для вычисления вариации ϑ необходимо вернуться к независимой переменной r (или θ). Таким образом,

$$\delta\vartheta = \delta\left[C\left(\frac{\theta^3}{\theta_1^3} - \frac{\theta}{\theta_1}\right)\right] = \left(\frac{\theta^3}{\theta_1^3} - \frac{\theta}{\theta_1}\right)\delta C + C\left(-\frac{3\theta^3}{\theta_1^4} + \frac{\theta}{\theta_1^2}\right)\delta\theta_1$$

Исключая далее C и выражая $\delta\theta_1$ через δC при помощи (1.8), находим

$$\delta\vartheta = (a\rho^3 - \rho)(24\alpha^2 + 36\alpha^3)\,\delta C : (1 + 12\alpha^2 + 24\alpha^3)$$

где

$$a = (-1 + 24\alpha^2 + 30\alpha^3) : (12\alpha^2 + 18\alpha^3) \tag{1.11}$$

Подставляя это выражение, (1.1) и (1.9) в уравнение (1.10), после простых вычислений находим зависимость

$$\begin{aligned} 6q(a-2) = \Theta_1^2 \{\gamma^2 (0.7143a - 2) + \gamma\,[2.5 - a + 24(2-a)\,\alpha^3] + \\ + 0.35a - 0.75 + 24\alpha^3 (a - 1.5)(1 + 2\alpha) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\gamma = 1 - 12\alpha^2 (1 + \alpha) = \frac{C}{4\theta_1} \tag{1.13}$$

Задаваясь различными значениями θ_1, из этой зависимости определяем соответствующие значения нагрузки; приводим результаты вычислений для $k = 40$:

$\theta_1 =$	0.125,	0.150,	0.155,	0.165,	0.170,	0.175,	0.166,	0.180,
$\bar{p} =$	0.324,	0.142,	0.127,	0.113,	0.1125,	0.1125,	0.156,	0.438.

Из нее находим

$$\bar{p}_{\min} \approx 0.11 \tag{1.14}$$

Между тем при неправильной процедуре выравнивания неуравновешенностей в работе [1] было получено $\bar{p} = -0.13$.

2. Решение с уточнением краевого эффекта. Если $\theta \gg \theta_1$ — малый угол, то, как известно (см., например, § 71 работы [2]):

$$Q = C_1 \operatorname{Re} H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) + C_2 \operatorname{Im} H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) \tag{2.1}$$

$$Eh\vartheta \approx 2k^2 (C_1 \operatorname{Im} H_1^{(1)} - C_2 \operatorname{Re} H_1^{(1)}), \qquad T_1 = -\frac{pR}{2} - \frac{Q}{\theta}$$

$$\begin{aligned} T_2 = C_1\left[\frac{1}{\theta}\operatorname{Re} H_1^{(1)} + k(\operatorname{Im} H_0^{(1)} - \operatorname{Re} H_0^{(1)})\right] + \\ + C_2\left[\frac{1}{\theta}\operatorname{Im} H_1^{(1)} - k(\operatorname{Re} H_0^{(1)} + \operatorname{Im} H_0^{(1)})\right] - \frac{pR}{2} \end{aligned}$$

где $x = \sqrt{2}\,k\theta$, $\operatorname{Re} H_1^{(1)}, \ldots, \operatorname{Im} H_0^{(1)}$ — реальная и мнимые части цилиндрических функций третьего рода первого и нулевого порядка. При больших значениях аргумента применимы асимптотические разложения этих функций, причем, пренебрегая величинами порядка $(3\alpha / 16)^2$ по сравнению с единицей, можно положить

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi k\theta}\,\operatorname{Re} H_1^{(1)} &= -e^{-k\theta}\sqrt[4]{2}\left[\left(1 + \frac{3}{16k\theta}\right)\cos\varphi - \frac{3}{16k\theta}\sin\varphi\right] \\ \sqrt{\pi k\theta}\,\operatorname{Im} H_1^{(1)} &= -e^{-k\theta}\sqrt[4]{2}\left[\left(1 + \frac{3}{16k\theta}\right)\sin\varphi + \frac{3}{16k\theta}\cos\varphi\right] \quad \left(\varphi = k\theta + \frac{1}{8}\pi\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi k\theta}\,\operatorname{Re} H_0^{(1)} &= e^{-k\theta}\sqrt[4]{2}\left[\left(1 - \frac{1}{16k\theta}\right)\sin\varphi - \frac{1}{16k\theta}\cos\varphi\right] \\ \sqrt{\pi k\theta}\,\operatorname{Im} H_0^{(1)} &= e^{-k\theta}\sqrt[4]{2}\left[-\left(1 - \frac{1}{16k\theta}\right)\cos\varphi - \frac{1}{16k\theta}\sin\varphi\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Условие $\vartheta = 0$ при $\theta = \theta_1$ выполняется, если положить

$$\sqrt[4]{2}\, C_1 = -e^{-k\theta_1} \sqrt{\pi k\theta_1}\, A_1 \left\{\left(1 + \frac{3\alpha}{16}\right)\cos\varphi_1 - \frac{3\alpha}{16}\sin\varphi_1\right\} \qquad \left(\varphi_1 = k\theta_1 + \frac{1}{8}\pi\right) \tag{2.4}$$

$$\sqrt[4]{2}\, C_2 = -e^{k\theta_1} \sqrt{\pi k\theta_1}\, A_1 \left\{\left(1 + \frac{3\alpha}{16}\right)\sin\varphi_1 + \frac{3\alpha}{16}\cos\varphi_1\right\}$$

При этом

$$Q_1 = Q(\theta = \theta_1) \approx A_1 \left(1 + \tfrac{3}{8}\alpha\right) \tag{2.5}$$

Пользуясь формулами

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{Re} H_1^{(1)}) = -\frac{1}{x}\operatorname{Re} H_1^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Re} H_0^{(1)} - \operatorname{Im} H_0^{(1)})$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{Im} H_1^{(1)}) = -\frac{1}{x}\operatorname{Im} H_1^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Re} H_0^{(1)} + \operatorname{Im} H_0^{(1)})$$

и формулой (1.5), определяем

$$M_1(\theta = \theta_1) = -\frac{2k^3 D A_1}{EhR}\left(1 + \frac{3\alpha}{8}\right)$$

$$\varepsilon_2(\theta = \theta_1) = \frac{1}{Eh}\left\{\frac{\mu Q_1}{\theta_1} - (1-\mu)\frac{pR}{2} + A_1\left[\frac{1}{\theta_1} + k\left(1 - \frac{\alpha}{8}\right)\right]\right\}$$

Из условий сопряжения с областью вмятины находим зависимости

$$EhC = k^3 A_1\left(1 + \frac{3\alpha}{8}\right)\theta_1, \qquad C = 4\theta_1 + \frac{48\alpha}{k}(1 + 1.5\alpha) \tag{2.6}$$

При этом оказывается, что формула (12*) для определения ψ остается без изменения. В силу того, что взамен (1.8) мы теперь имеем (2.6), выражение $\delta\vartheta$ изменяется. При этом для определения нагрузки в функции от θ_1 можно пользоваться прежней зависимостью (1.12), в которой, однако, следует полагать

$$\gamma = 1 - 12\alpha^2(1 + 1.5\alpha) = \frac{C}{4\theta_1}, \qquad a = \frac{-1 + 24\alpha^2 + 45\alpha^3}{12\alpha^2 + 27\alpha^3} \tag{2.7}$$

Приводим результаты вычислений по этим формулам:

для $R \approx 970\ h$

$\theta_1 =$	0.125,	0.150,	0.165,	0.17,	0.175,	0.178,	0.18
$p =$	0.369,	0.145,	0.107,	0.1023,	0.1017,	0.1028,	0.1042

для $R = 544\ h$

$\theta_1 =$	0.17,	0.19,	0.20,	0.22,	0.23,	0.24,	0.25
$\bar{p} =$	0.332,	0.185,	0.147,	0.106,	0.101,	0.104,	0.112

Таким образом, при уточнении краевого эффекта находим

$$\bar{p}_{\min} = \min\left(\frac{pR^2}{2Eh}\right) = 0.10 \tag{2.8}$$

Оказывается, что погрешность от приближенного определения краевого эффекта (около 10%) не столь велика, как можно было ожидать. Выясняется также, что формулой (2.8) можно пользоваться при изменении R/h в широких пределах.

В заключение заметим, что, применяя метод Ритца-Тимошенко, при нескольких варьируемых параметрах Р. Г. Суркин получил [3] значение $\bar{p} = 0.17$.

Поступила 25 III 1954

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Об устойчивости сферической оболочки под действием внешнего равномерно распределенного давления, ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
2. Геккелер И. В. Статика упругого тела. ОНТИ, 1934.
3. Муштари Х. М., Суркин Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. ПММ, т. XIV, вып. 6, 1950.