Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ МОМЕНТНОГО ДОКРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

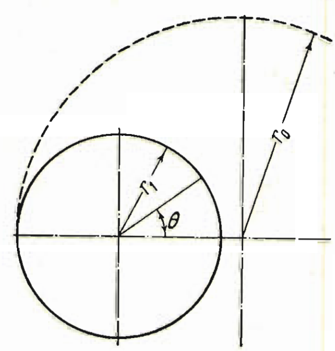
Н. А. Алфутов

(Москва)

При расчетах на устойчивость докритическая форма равновесия оболочек считается часто безмоментной. Между тем в инженерной практике встречаются оболочки и с моментным докритическим симметричным состоянием равновесия, например оболочки, свернутые из заготовок другой кривизны. Для этих оболочек представляет практический интерес оценить влияние первоначального моментного состояния на величину критической нагрузки.

Решение будем вести энергетическим методом. Чтобы не затемнять смысла решения выкладками, мы определим вначале критическую нагрузку для кольца, а затем внесем соответствующие изменения в формулу для критического давления цилиндрической оболочки.

Рассмотрим кольцо радиуса $r_1$, свернутое из заготовки радиуса $r_0$ (фиг. 1). При этом мы считаем, что гибка заготовки от радиуса $r_0$ до $r_1$ происходит в упругой области. Составим выражение полной потенциальной энергии кольца $A = U + \Pi$, где $U$ — внутренняя потенциальная энергия, $\Pi$ — потенциал внешних сил.




Фиг. 1

Внутренняя энергия кольца выражается формулой

$$U = \frac{IE}{2}\int_0^{2\pi} \varkappa^2 r_1\, d\theta + \frac{FE}{2}\int_0^{2\pi} \varepsilon^2 r_1\, d\theta \tag{1}$$

где $I$ и $F$—момент инерции и площадь поперечного сечения кольца.

Ввиду моментности докритической формы равновесия квадратичные члены следует удерживать не только в выражении для относительного удлинения $\varepsilon$, но и в выражении для изменения кривизны $\varkappa$. Тогда[1]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{dv}{r_1 d\theta} - \frac{w}{r_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{r_1 d\theta} + \frac{v}{r_1}\right)^2 \\ \varkappa &= \varkappa_0 + \frac{1}{r_1}\left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{dv}{d\theta}\right) + \frac{1}{r_1}\left(\frac{dw}{r_1 d\theta} + \frac{v}{r_1}\right)^2 \\ \varkappa_0 &= \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1}\left(1 - \frac{r_1}{r_0}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $v$ — перемещение в направлении касательной к окружности, $w$ — перемещение в направлении нормали.

Из работы [2] для потенциала внешних сил $\Pi$ берем следующую зависимость:

$$\Pi = -\frac{1}{2} q \int_0^{2\pi} \left(2w + w\varepsilon - \frac{v^2}{r_1} - \frac{dw}{d\theta}\frac{v}{r_1}\right) r_1 d\theta \tag{3}$$

где $q$ — радиальная нагрузка.

Теперь зададимся функциями перемещений $v$ и $w$, через которые у нас выражена потенциальная энергия кольца. Будем считать, что при потере устойчивости средняя линия кольца не растягивается, и возьмем [2]

$$v = \frac{a}{n} r_1 \sin n\theta, \qquad w = w_0 + a r_1 \cos n\theta + \frac{1}{2} a^2 r_1 \left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2 \sin^2 n\theta \tag{4}$$

где $a$ — безразмерный свободный параметр, $w_0$ — перемещение докритической формы равновесия.

Проинтегрировав при выбранных функциях перемещений выражение $A = U + \Pi$, получим

$$A = A_0 + \frac{1}{2}\pi \frac{IE}{r_1}(n^2-1)^2\left[1 + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{r_1}{r_0}\right)\right] - \frac{1}{2}\pi q r_1^2 (n^2-1) \tag{5}$$

где $A_0$ — потенциальная энергия докритического состояния равновесия. Условие минимума полной потенциальной энергии кольца $dA/da = 0$ дает выражение для критической нагрузки $q_*$:

$$q_* = \frac{IE}{r_1^3}(n^2-1)\left[1 + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{r_1}{r_0}\right)\right] = q_*^\circ \eta \qquad \left(\eta = 1 + \frac{r_1 \varkappa_0}{n^2}\right) \tag{6}$$

где $\eta$ — коэффициент, учитывающий разность кривизн оболочки и заготовки, $q_*^\circ$ — обычное значение критической нагрузки при $r_0 = r_1$. Очевидно, минимальное $q_*^\circ$ будет при $n = 2$

$$q_* = 3\frac{IE}{r_1^3}\left(1 + \frac{r_1\varkappa_0}{4}\right) \tag{7}$$

Если кольцо свернуто из прямолинейной заготовки (тогда $\varkappa_0 = 1/r_1$), то при $n = 2$

$$q_* = 3\frac{IE}{r_1^3}\frac{5}{4} = \frac{5}{4} q_*^\circ \tag{8}$$

В том же случае, если $r_0 > r_1$, значение $q_*$ оказывается меньше $q_*^\circ$; в частности, при $r_0 = 0.2 r_1$ из (7) получим $q_* = 0$.

На основании проведенного исследования устойчивости кольца легко сделать соответствующее изменение в выражении для критического давления цилиндрической оболочки, опертой по двум краям [2]. Дело в том, что разность кривизн $(1/r_1 - 1/r_0)$ повлияет лишь на изменение внутренне потенциальной энергии изгиба оболочки в окружном направлении, а все остальные величины останутся теми же, что в работе [2]. После несложных выкладок получим

$$p_* = \frac{Eh}{r_1(1-\mu^2)}\left\{\frac{1}{\left(\frac{nl}{\pi r_1}\right)^2\left[\frac{2}{1-\mu} + \left(\frac{nl}{\pi r_1}\right)^2\right]} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12 r_1^2}\left[\eta(n^2-1) + 2\frac{n^2-1+\mu}{\left(\frac{nl}{\pi r_1}\right)^2} + \left(\frac{\pi r_1}{l}\right)^4 \frac{1}{(n^2-1)}\right]\right\} \tag{9}$$

где $l$ — длина образующей, $h$ — толщина оболочки.

Из формулы (9) видно, что рассмотренное в работе первоначальное моментное состояние имеет существенное значение только для очень длинных оболочек, теряющих устойчивость с образованием малого числа волн в окружном направлении. В том случае, когда $n > 3$, разность кривизн оболочки и заг отовки приктически не влияет на величину критического давления

Поступила 21 XI 1954

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
2. Алфутов Н. А. К расчету оболочек на устойчивость энергетическим методом. Инженерный сборник 1955, том 22.