

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ШАРА  
 В НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

В. А. Ломакин

(Москва)

Исследуем деформации и напряжения, возникающие в изотропном шаре (радиуса  $R$ ) в нестационарном симметричном температурном поле. Исследование проведем в предположении, что в рассматриваемом диапазоне температур механические свойства материала изменяются мало, и потому будем считать их не зависящими от температуры.

По условию симметрии главными осями напряжений и деформаций будут направление центрального радиуса  $r$  и два любых, перпендикулярных к нему направления на сфере  $r = \text{const}$ . Двум последним направлениям придадим индексы 1, 2, а радиальному направлению — индекс 3. Тогда в силу симметрии

$$e_2 = e_1 \quad \sigma_2 = \sigma_1 \quad (1)$$

Имеем также

$$e = \frac{1}{3}(2e_1 + e_3) \quad e_i = \frac{2}{3}(e_1 - e_3) \text{ sign}(e_1 - e_3) \\ \text{sign } x = \frac{x}{|x|} \quad (2) \\ \sigma = \frac{1}{3}(2\sigma_1 + \sigma_3), \quad \sigma_i = (\sigma_1 - \sigma_3) \text{ sign}(e_1 - e_3)$$

Деформация тела в указанных условиях будет простой (по определению А. А. Ильюшина [1]). В этом можно убедиться непосредственно вычисляя компоненты направляющих тензоров напряжений и деформаций, которые в рассматриваемой задаче оказываются постоянными.

Следовательно, для решения поставленной задачи может быть использована теория малых упруго-пластических деформаций [1], законы которой с учетом действия температуры при условии упругой неизменяемости объема имеют вид [2]:

$$D_s = \frac{2\sigma_i}{3e_i} D_e, \quad \sigma_i = \Phi(e_i), \quad e = \alpha(T - T_0) \quad (3)$$

Здесь  $T = T(r, t)$  — температура в момент времени  $t$ ,  $T_0 = T(r, 0)$  — начальная температура,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Обозначим через  $w = w(r, t)$  радиальное перемещение; тангенциальное перемещение в силу симметрии будет равно нулю. В выражении  $w$  время  $t$  можно считать параметром, и, следовательно,

$$e_3 = \frac{dw(r, t)}{dr}, \quad e_1 = e_2 = \frac{w(r, t)}{r} \quad (4)$$

Используя последнее из соотношений (3), получим дифференциальное уравнение для определения  $w(r, t)$ :

$$\frac{dw}{dr} + 2\frac{w}{r} = 3\alpha(T - T_0) \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5) при условии  $[w]_{r=0} = 0$ , получим

$$w(r, t) = \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r r^2 T(r, t) dr - \alpha T_0 \quad (6)$$

Теперь из (4) найдем деформации:

$$e_1 = e_2 = \frac{3\alpha}{r^3} \int_0^r r^2 T(r, t) dr - \alpha T_0 \quad (7)$$

$$e_3 = 3\alpha T - \frac{6\alpha}{r^3} \int_0^r r^2 T(r, t) dr - \alpha T_0$$

Из (2) на основании (7) получим для интенсивности деформаций

$$e_i = 2\alpha \left( \frac{3}{r^3} \int_0^r r^2 T(r, t) dr - T \right) \text{sign}(e_1 - e_3) \quad (8)$$

Величина  $\text{sign}(e_1 - e_3)$  легко определяется, если известно температурное поле. Например, при охлаждении с поверхности равномерно нагретого шара  $T(r, t)$  является не отрицательной и не возрастающей по  $r$  функцией; следовательно,

$$T(r, t) \leq \frac{3}{r^3} \int_0^r x^2 T(x, t) dx$$

Таким образом, в этом случае  $\text{sign}(e_1 - e_3) = 1$  и

$$e_i = 2\alpha \left[ \frac{3}{r^3} \int_0^r r^2 T(r, t) dr - T(r, t) \right] \quad (9)$$

Из (8) видно, что при температуре, не зависящей от  $r$ ,  $e_i = 0$  и чем сильнее зависимость  $T$  от  $r$ , тем больше интенсивность деформаций.

Для определения напряжений  $\sigma_3(r, t)$  и  $\sigma_1(r, t) = \sigma_2(r, t)$  используем уравнение равновесия, которое в случае шара имеет вид:

$$\frac{d\sigma_3}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_3 - \sigma_1) = 0 \quad (10)$$

Учти (2) и интегрируя это уравнение при условии  $[\sigma_3]_{r=R} = 0$ , найдем

$$\sigma_3(r, t) = 2 \text{sign}(e_1 - e_3) \int_R^r \frac{\sigma_i(r, t)}{r} dr \quad (11)$$

Напряжения  $\sigma_1 = \sigma_2$  определяется теперь из соотношений (2)

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_i \text{sign}(e_1 - e_3) \quad (12)$$

Таким образом, поставленная задача решена. Если известно температурное поле  $T(r, t)$ , то напряженное и деформированное состояние шара при произвольном законе упрочнения  $\sigma_i = \Phi(e_i)$  полностью определится формулами (11), (12), (8), (7).

Функция  $T(r, t)$  в общем случае является решением уравнения теплопроводности для шара

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (13)$$

при соответствующих краевых условиях. Имея решение этой краевой задачи, можно по полученным выше формулам рассчитать напряжения и деформации для любого момента времени  $t$ ; в частности, можно определить и остаточные напряжения, воспользовавшись теоремой А. А. Ильюшина о разгрузке<sup>[1]</sup>.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу, имеющую и самостоятельный интерес. Пусть шар равномерно нагрет до температуры  $T_0$ . В начальный момент ( $t = 0$ ) поверхность шара мгновенно охлаждается до температуры, равной нулю, и остается при этой температуре на протяжении всего процесса охлаждения. Будем считать также, что материал шара обладает линейным упрощением<sup>[1]</sup>:

$$\sigma_i = 3G [(1 - \lambda) e_i + \lambda e_s] \quad \left( \lambda = 1 - \frac{1}{3G} \frac{d\sigma_i}{de_i} = \text{const} \right) \quad (14)$$

В упругой области имеет место то же соотношение при  $\lambda = 0$ .

Пусть шар находится в упруго-пластическом состоянии. Границу упругой и пластической областей обозначим через  $r = b$ . Тогда ясно, что величина  $b$  является функцией  $t$  и зависит от параметра  $e_s$ . Значение  $b = b(t, e_s)$  найдем из того условия, что  $e_i$  достигает при  $r = b$  значения  $e_s$ , т. е. из соотношения

$$e_i(r, t) \Big|_{r=b} = e_s \quad (15)$$

Итак, в момент времени  $t$  в шаре имеются

$$\begin{array}{ll} \text{упругая зона} & 0 \leq r < b(t, e_s) \\ \text{пластическая зона} & b(t, e_s) \leq r \leq R \end{array} \quad (16)$$

Формула для радиального напряжения (11) с учетом (14) и (16) примет вид:

$$\sigma_3(r, t) = 6G \left[ \int_R^r \frac{e_i(r, t)}{r} dr - \lambda \int_R^b \frac{e_i(r, t)}{r} dr + \lambda e_s \ln \frac{b}{R} \right] \quad (17)$$

Здесь  $b = b(t, e_s)$  есть решение уравнения (15).

Перейдем к определению остаточных напряжений. Для этого воспользуемся теоремой о разгрузке<sup>[1]</sup>. На расстоянии  $r$  от центра шара нагрузка сменяется разгрузкой в некоторый момент  $t = t_1$ , причем ясно, что  $t_1$  является функцией  $r$ . Зависимость  $t_1(r)$  найдем из условия

$$\frac{\partial}{\partial t} e_i(r, t) \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (18)$$

Согласно теореме о разгрузке остаточные напряжения определяются разностью между действительно имеющимися напряжениями при значении  $t = t_1(r)$  и теми упругими напряжениями, которые возникли бы в шаре в этот момент, если бы в нем не создавалось пластического состояния. Следовательно, остаточные напряжения  $\sigma_{30}$  и  $\sigma_{10} = \sigma_{20}$  определяются соотношениями

$$\sigma_{30}(r) = [\sigma_3(r, t) - \sigma_3^{(e)}(r, t)] \Big|_{t=t_1(r)}, \quad \sigma_{10}(r) = [\sigma_1(r, t) - \sigma_1^{(e)}(t, t)] \Big|_{t=t_1(r)} \quad (19)$$

где  $\sigma_3^{(e)}$  получается из (17) при  $\lambda = 0$ :

$$\sigma_3^{(e)} = 6G \int_R^r \frac{e_i(r, t)}{r} dr \quad (20)$$

На основании (17) и (12) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{30}(r) &= 6G\lambda \left( e_s \ln \frac{b}{R} - \int_R^b \frac{e_i(r, t)}{r} dr \right) \Big|_{t=t_1(r)} \\ \sigma_{10}(r) &= \sigma_{20}(r) = \sigma_{30}(r) + (\sigma_i - 3Ge_i) \Big|_{t=t_1(r)} \end{aligned} \quad (21)$$

Остаточные напряжения будут полностью определены, если известны функции  $\epsilon_i(r, t)$ ,  $b(t, \epsilon_s)$ ,  $t_1(r)$ , которые легко определяются, если известно решение  $T(r, t)$  уравнения теплопроводности (13).

Краевые условия рассматриваемой задачи будут следующие:

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_0 = \text{const} \\ T(r, t) &= 0 \\ T(0, t) &\neq \infty \end{aligned} \quad (22)$$

Для сокращения числа параметров, определяющих задачу, введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad \tau = \frac{at}{R^2}$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности; искомые функции также можно представить в безразмерном виде

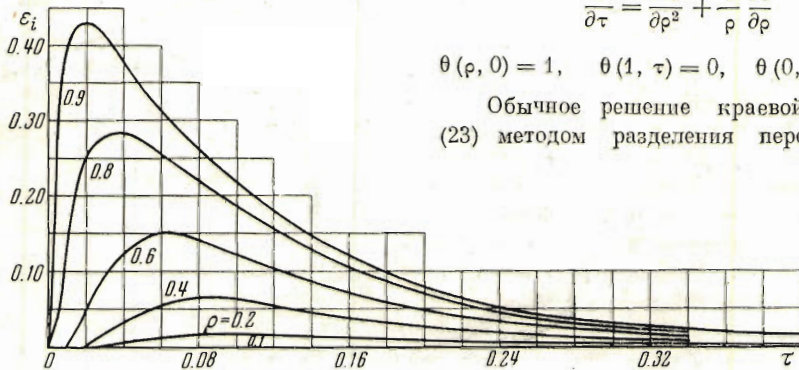
$$\epsilon_i(\rho, \tau) = \frac{\epsilon_i(r, t)}{2\alpha T_0}, \quad \beta(\tau, \epsilon_s) = \frac{b(t, \epsilon_s)}{R}, \quad \tau_1(\rho) = \frac{at_1(r)}{R^2}$$

Уравнение (13) и краевые условия (22) преобразуются при этом в следующие:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \quad (23)$$

$$\theta(\rho, 0) = 1, \quad \theta(1, \tau) = 0, \quad \theta(0, \tau) \neq \infty$$

Обычное решение краевой задачи (23) методом разделения переменных



Фиг. 2

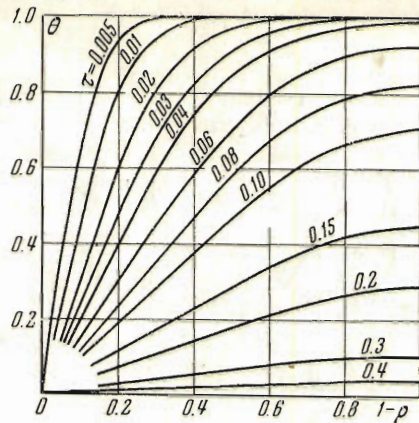
приводит к ряду с плохой сходимостью для начальных моментов времени. Операционные методы позволяют получить решение краевой задачи (23) в виде ряда, быстро сходящегося при малых значениях  $\tau$ . Это решение имеет вид [3]:

$$\theta(\rho, \tau) = 1 - \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{erf} \frac{(2n-1) + \rho}{2\sqrt{\tau}} - \operatorname{erf} \frac{(2n-1) - \rho}{2\sqrt{\tau}} \right) \left( \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \right) \quad (24)$$

Процесс охлаждения практически заканчивается при  $\tau \geq 0,4$ , причем до этих значений  $\tau$  ряд (24) имеет достаточно быструю сходимость. На фиг. 1 приведены кривые распределения температуры  $\theta$  по  $\rho$  для различных значений  $\tau$  — от 0.005 до 0.4.

Интенсивность деформаций (9) теперь определится по формуле

$$\epsilon_i(\rho, \tau) = \frac{3}{\rho^3} \int_0^{\rho} \rho^2 \theta(\rho, \tau) d\rho - \theta(\rho, \tau) \quad (25)$$



Фиг. 1

На фиг. 2 представлены результаты вычисления  $\epsilon_i$  в зависимости от  $\tau$  при различных значениях  $\rho$ . Далее на основании (15) из условия

$$\epsilon_i(\rho, \tau) \Big|_{\rho=\beta} = \epsilon_s$$

определяем границу упругой и пластической областей  $\beta = \beta(\tau, \epsilon_s)$ .

На фиг. 3 показаны области упругой деформации I, активной пластической деформации II и разгрузки III в плоскости  $\rho\tau$  для значения параметра  $\epsilon_s = 0,15$ .

Момент  $\tau = \tau_1(\rho)$  начала разгрузки определится согласно (18) из соотношения

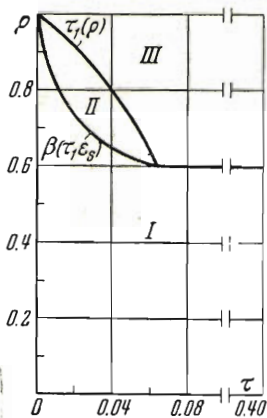
$$\frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon_i(\rho, \tau) \Big|_{\tau=\tau_1} = 0$$

Вводя безразмерные величины для напряжений

$$\sigma_{30}^\circ(\rho) = \frac{\sigma_{30}(\rho)}{\sigma_s} \frac{\epsilon_s}{2\lambda}, \dots$$

из (21) найдем

$$\sigma_{30}^\circ(\rho) = \left[ \epsilon_s \ln \beta + \int_{\beta}^1 \frac{\epsilon_i(\rho, \tau)}{\rho} d\rho \right] \Big|_{\tau=\tau_1(\rho)} \quad (26)$$



Фиг. 3

Распределение остаточных напряжений, вычисленных по формулам (26), при

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_s}{2\lambda T_0} = 0,15$$

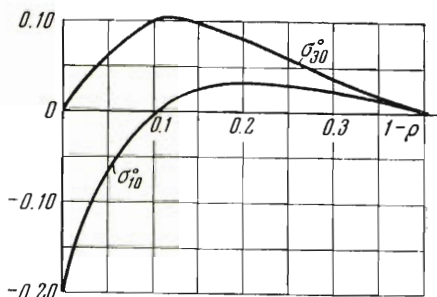
показано на фиг. 4. Характер распределения напряжений согласуется с экспериментальными данными. Однако величины остаточных напряжений при  $\rho \geq 0,9$  получились несколько завышенными, так как в этой области при разгрузке происходят вторичные пластические деформации, которые нами не учитывались. Учет вторичных пластических деформаций принципиальных затруднений не вызывает и может быть произведен по схеме, которая использована в данной работе, — это требует лишь дополнительных вычислений. Необходимо заметить, что вторичные пластические деформации не будут возникать при более мягких граничных условиях либо при большем значении параметра  $\epsilon_s$ ; в этих случаях величина остаточных напряжений будет точно выражаться формулами (26).

Отметим, что в случае идеальной пластичности напряжения в шаре определяются полученными выше формулами при  $\lambda = 1$ .

Поступила 16 XII 1954

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
2. Огибалов П. М. Теория пластических деформаций при высоких температурах тела. Вестник Московского университета, № 12, 1950.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехиздат. 1952.



Фиг. 4