Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ТЕМПЕРАТУРА НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА В ПОТОКЕ С ПУЛЬСИРУЮЩИМИ СКОРОСТЬЮ И ТЕМПЕРАТУРОЙ

А. Н. Гордов

(Ленинград)

При измерении пульсирующих температур газовых потоков широкое распространение получил метод тонких цилиндрических проволочек. Учет термической инерции этих проволочек проводится обычно в предположении постоянства коэффициента теплоотдачи α. Такое предположение является мало приемлемым, так как обычно с пульсациями температуры имеют место синхронные пульсации скорости газового потока, а следовательно, и коэффициента теплоотдачи.

Попытаемся получить решение в общем виде, исследуя температурное поле неограниченного цилиндра под воздействием температуры среды, подчиняющейся уравнению

$$t(\tau) = t_{\text{ср}} + A_1 \cos \omega\tau \tag{1}$$

Будем рассматривать критерий Био $hR = (\alpha / \lambda) R$ также подчиняющимся уравнению гармонических колебаний

$$hR = h_0 R + A_2 R \cos \omega\tau \tag{2}$$

Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial\theta(r, \tau)}{\partial\tau} = a\left(\frac{\partial^2\theta(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta(r, \tau)}{\partial r}\right) \tag{3}$$

с начальным условием

$$\theta(r, 0) = \theta_0 = t_0 + t_{\text{ср}} \tag{4}$$

и граничными условиями

$$\left(\frac{\partial\theta(r, \tau)}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial\theta(r, \tau)}{\partial r}\right)_{r=R} - [h_0 + A_2 \cos \omega\tau]\,[t_{\text{ср}} + A_1 \cos \omega\tau - \theta(R, \tau)] = 0 \tag{6}$$

Используем методы операционного исчисления. Применение теоремы смещения

$$L[e^{a\tau} f(\tau)] = F(s - a)$$

позволяет выразить граничное условие (6) в изображениях в виде

$$\theta'(R_1 s) - \frac{h_0 t_{\text{ср}}}{s} - \frac{h_0 A_1 s}{s^2 + \omega^2} + h_0\theta(R, s) - \frac{t_{\text{ср}} A_2 s}{s^2 - \omega^2} - A_1 A_2 \frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)} +$$
$$+ \frac{A_2}{2}\theta(R, s - i\omega) + \frac{A_2}{2}\theta(R, s + i\omega) = 0 \tag{7}$$

Решение уравнения (3) в изображениях с учетом (4) и (5) имеет вид:

$$\theta(r, s) = \frac{t_0}{s} + BJ_0\left(r\sqrt{s / a}\right) \tag{8}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Подставляя (8) в (7) и определяя величину произвольной постоянной B, получим следующее решение в изображениях нашей задачи:

$$\theta(r, s) = \frac{t_{\text{ср}}}{s} + \frac{A_1 [h_0 R s^2 (s^2 + 4\omega^2) + A_2 R (s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\omega^2)]}{s(s^2 + \omega^2)(s^2 + 4\omega^2)\,\Omega(s)} J_0\left(r\sqrt{\frac{s}{a}}\right)$$

$$\Omega(s) = \left\{R\sqrt{\frac{s}{a}}\, J_1\left(R\sqrt{\frac{s}{a}}\right) + h_0 R J_0\left(R\sqrt{\frac{s}{a}}\right) + \right. \tag{9}$$

$$\left. + \frac{1}{2} A_2 R \left[J_0\left(R\sqrt{\frac{s - i\omega}{a}}\right) + J_0\left(R\sqrt{\frac{s + i\omega}{a}}\right)\right]\right\}$$

Знаменатель этой дроби имеет корни

$$s_1 = 0, \quad s_2 = i\omega, \quad s_3 = -i\omega, \quad s_4 = 2i\omega, \quad s_5 = -2i\omega$$

и бесчисленное множество корней

$$s_n = -\frac{\mu_n{}^2 a}{R^2} \qquad \left(HR = R\sqrt{\frac{\omega}{a}}\right)$$

где μ_n — корни трансцендентного уравнения

$$h_0 R J_0(\mu) = \mu J_1(\mu) + \frac{1}{2} A_2 R\, [J_0(\sqrt{\mu^2 + iH^2R^2}) + J_0(\sqrt{\mu^2 - iH^2R^2})]$$

При переходе к оригиналу функции корни s_n определяют собой члены бесконечного ряда, характеризующего переходную стадию процесса. Этот ряд может быть получен из выражения (9). Каждый из членов этого ряда быстро убывает со временем, протекшим с начала процесса. Длительность переходной стадии, определяющаяся критериальными величинами $h_0 R$, $A_2 R$ и HR, в подавляющем большинстве встречающихся на практике случаев не превышает нескольких секунд. Эта переходная стадия не представляет большого практического интереса.

Поэтому в дальнейшем ограничимся решением задачи для установившегося состояния, представляющего наибольший практический интерес, для которого все члены бесконечного ряда, характеризующего переходную стадию, обращаются в нуль.

В этом случае нахождение оригинала функции можно ограничить членами, определяющимися первыми пятью корнями параметра s.

Переход к оригиналу функции дает для первого члена решения значение, равное $t_{\text{ср}}$. При помощи первого корня s_1 получим выражение для второго члена решения

$$M_1 = \frac{A_1 A_2 R}{2(h_0 R + A_2 R \operatorname{ber} HR)} \tag{10}$$

Третий член решения для средней объемной температуры при помощи корней s_2 и s_3 после ряда преобразований получаем в виде

$$M_2 = N_2 \cos(\omega\tau + \varphi_1)$$

где

$$N_2 = \frac{2A_1 h_0 R}{HR} (\operatorname{ber}'^2 HR + \operatorname{bei}'^2 HR)^{1/2} \{[h_0 R \operatorname{ber} HR + HR \operatorname{ber}' HR +$$

$$+ \frac{1}{2} A_2 R (1 + \operatorname{ber} \sqrt{2}\, HR)]^2 + [h_0 R \operatorname{bei} HR + HR \operatorname{bei}' HR + \frac{1}{2} A_2 R \operatorname{bei} \sqrt{2}\, HR]^2\} \tag{11}$$

при этом

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = HR (\operatorname{ber}'^2 HR \operatorname{bei}'^2 HR) + h_0 R (\operatorname{bei} HR \operatorname{bei}' HR + \operatorname{ber} HR \operatorname{ber}' HR) +$$

$$+ \frac{1}{2} A_2 R [(1 + \operatorname{ber} \sqrt{2}\, HR) \operatorname{ber}' HR + \operatorname{bei} \sqrt{2}\, HR \operatorname{bei}' HR] \times$$

$$\times \{h_0 R (\operatorname{ber} HR \operatorname{bei}' HR - \operatorname{bei} HR \operatorname{ber}' HR) +$$

$$+ \frac{1}{2} A_2 R [(1 + \operatorname{ber} \sqrt{2}\, HR) \operatorname{bei}' HR - \operatorname{bei} \sqrt{2}\, HR \operatorname{ber}' HR]\}^{-1} \tag{12}$$

Четвертый, последний, член решения для установившихся колебаний средней объемной температуры получим при помощи корней s_4 и s_5 в виде

$$M_3 = N_3 \cos(2\omega\tau - \varphi_2)$$

где

$$N_3 = \frac{A_1 h_0 R A_2 R}{\sqrt{2} HR}(\mathrm{ber}'^2 \sqrt{2}\, HR + \mathrm{bei}'^2 \sqrt{2}\, HR)^{1/2} \times$$

$$\times \{[h_0 R\, \mathrm{ber} \sqrt{2}\, HR + \sqrt{2}\, HR\, \mathrm{ber}' \sqrt{2}\, HR + \tfrac{1}{2} A_2 R(\mathrm{ber}\, HR + \mathrm{ber}\sqrt{3}\, HR)]^2 + \tag{13}$$

$$+ [h_0 R\, \mathrm{bei} \sqrt{2}\, HR + \sqrt{2}\, HR\, \mathrm{bei}' \sqrt{2}\, HR + \tfrac{1}{2} A_2 R(\mathrm{bei}\, HR + \mathrm{bei}\sqrt{3}\, HR)]^2\}^{-1/2}$$

при этом

$$\mathrm{tg}\,\varphi_2 = \sqrt{2}\, HR(\mathrm{ber}'^2 \sqrt{2}\, HR + \mathrm{bei}'^2 \sqrt{2}\, HR) + h_0 R(\mathrm{bei}\sqrt{2}\, HR\, \mathrm{bei}'\sqrt{2}\, HR +$$

$$+ \mathrm{ber}\sqrt{2}\, HR\, \mathrm{ber}'\sqrt{2}\, HR) + \tfrac{1}{2} A_2 R[(\mathrm{ber}\, HR + \mathrm{ber}\sqrt{3}\, HR)\,\mathrm{ber}'\sqrt{2}\, HR +$$

$$+ (\mathrm{bei}\, HR + \mathrm{bei}\sqrt{3}\, HR)\,\mathrm{bei}'\sqrt{2}\, HR]\ \{h_0 R\,(\mathrm{ber}\sqrt{2}\, HR\, \mathrm{bei}'\sqrt{2}\, HR - \tag{14}$$

$$- \mathrm{bei}\sqrt{2}\, HR\, \mathrm{ber}'\sqrt{2}\, HR) + \tfrac{1}{2} A_2 R[(\mathrm{ber}\, HR + \mathrm{ber}\sqrt{3}\, HR)\,\mathrm{bei}'\sqrt{2}\, HR - (\mathrm{bei}\, HR +$$

$$+ \mathrm{bei}\sqrt{3}\, HR)\,\mathrm{ber}'\sqrt{2}\, HR]\}^{-1}$$

Следовательно,

$$\bar{\theta}(\tau) = t_{\text{ср}} + M_1 + M_2 + M_3 = t_{\text{ср}} + M_1 + N_2\cos(\omega\tau - \varphi_1) + N_3\cos(2\omega\tau - \varphi_2) \tag{15}$$

В процессе преобразования получающихся выражений были использованы соотношения [1]

$$J_0(x\sqrt{i}) = \mathrm{ber}\, x + i\, \mathrm{bei}\, x, \qquad J_0(x\sqrt{-i}) = \mathrm{ber}\, x - i\, \mathrm{bei}\, x \tag{16}$$

При $A_2 R \to 0$ члены M_1 и M_3 обращаются в нуль и, следовательно, уравнение (15) естественно переходит в выражение для колебаний средней объемной температуры цилиндра при постоянном значении критерия Био

$$\bar{\theta}(\tau) = t_{\text{ср}} +$$

$$+ \frac{2A_1 hR}{HR}\left(\frac{\mathrm{ber}'^2 HR + \mathrm{bei}'^2 HR}{[hR\,\mathrm{ber}\, HR + HR\,\mathrm{ber}' HR]^2 + [hR\,\mathrm{bei}\, HR + HR\,\mathrm{bei}' HR]^2}\right)^{1/2}\cos(\omega\tau - \varphi_1)$$

где

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{\mathrm{ber}\, HR\,\mathrm{ber}' HR + \mathrm{bei}\, HR\,\mathrm{bei}' HR}{\mathrm{ber}\, HR\,\mathrm{bei}' HR - \mathrm{bei}\, HR\,\mathrm{ber}' HR} + \frac{HR}{hR}\,\frac{\mathrm{ber}'^2 HR + \mathrm{bei}'^2 HR}{\mathrm{ber}\, HR\,\mathrm{bei}' HR - \mathrm{bei}\, HR\,\mathrm{ber}' HR}$$

Использование для значений $x < 1.5$ разложений

$$\mathrm{ber}\, x = 1 - \frac{x^4}{2^6} + \frac{x^8}{2^8(4!)^2} - \cdots$$

$$\mathrm{bei}\, x = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \frac{x^{10}}{2^{10}(5!)^2} - \cdots$$

$$\mathrm{ber}'\, x = -\frac{x^3}{2^4} + \frac{x^7}{2^7 3!4!} - \frac{x^{11}}{2^{11}5!6!} + \cdots$$

$$\mathrm{bei}'\, x = \frac{x}{2} - \frac{x^5}{2^5 2!3!} + \frac{x^9}{2^9 4!5!} - \cdots$$

[1] Таблицы функций Тамсона ber x и bei x приведены в справочнике Двайта «Таблицы интегралов и другие математические функции» ГИИЛ, М., 1948.

дает возможность найти приближенные соотношения

$$\frac{N_3}{N_2} \approx \frac{A_2 R}{2}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 \approx 2 \operatorname{tg} \varphi_1$$

Анализ уравнения (15) позволяет сделать следующие выводы о характере установившихся колебаний температуры неограниченного цилиндра, находящегося в условиях синхронных и синфазных синусоидальных колебаний температуры и коэффициента теплоотдачи окружающей среды.

1. Средняя температура цилиндра смещается относительно средней температуры среды $t_{\text{ср}}$ на величину M_1. Следовательно, недоучет влияния изменений коэффициента теплоотдачи приводит к ошибочным результатам измерения средней температуры среды $t_{\text{ср}}$.

Можно показать, что если колебания коэффициента теплоотдачи сдвинуты по фазе на угол φ_0 относительно колебаний температуры, то смещение M_1 средней температуры цилиндра относительно средней температуры среды $t_{\text{ср}}$ определится выражением

$$M_1 = \frac{A_1 A_2 R \cos \varphi_0}{2\left[h_0 R + A_2 R\left(\cos \varphi_0 \operatorname{ber} HR - \sin \varphi_0 \operatorname{bei} HR\right)\right]}$$

Таким образом, смещение средней температуры цилиндра M_1 обращается в нуль только при сдвиге фаз $\varphi_0 = \pm {}^1\!/_2\,\pi$. Во всех остальных случаях средняя температура цилиндра не будет равна средней температуре среды.

2. Кривая изменения температуры цилиндра в каждом цикле является результатом наложения двух гармоник с кратными частотами и различными амплитудами. В результате такого наложения, даже при синусоидальном законе изменения температуры среды, изменение температуры цилиндра выражается несимметричной кривой. Следовательно, недоучет влияния переменного коэффициента теплоотдачи при анализе зарегистрированных несимметричных кривых колебаний температуры проволочки может привести к ошибочным заключениям о несинусоидальности изменений температуры среды.

Поступила 10 VII 1954