Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955

Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ПРИТОК ГРУНТОВЫХ ВОД К ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДРЕНАМ

В. К. Белякова

(Москва)

Рассмотрим неустановившееся движение грунтовых вод при наличии одной или системы дрен в однородном и неоднородном грунтах.

1. Дрены в однородном неограниченном грунте. Предположим, что движение грунтовых вод обусловливается наличием одной дрены, центр которой помещен на глубину h под первоначальным уровнем грунтовых вод, принятым нами горизонтальным.

Введем систему декартовых координат XOY, расположив ось X вдоль первоначального уровня грунтовых вод; ось OY проведем вертикально вверх. Начало системы XOY выберем непосредственно над центром дрены.

Движение жидкости будет происходить с потенциалом скорости $\varphi(x, y, t)$. Вдоль свободной поверхности давление постоянно, и мы примем его равным нулю. Тогда на свободной поверхности будет выполняться условие

$$ky + \varphi(x, y, t) = 0 \tag{1.1}$$

Кроме того, на свободной поверхности будет выполняться еще условие[1]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad \left[c = \frac{k}{m}\right] \tag{1.2}$$

где k — коэффициент фильтрации, m — пористость.

Таким образом, определение потенциала скоростей $\varphi(x, y, t)$ сводится к интегрированию уравнения Лапласа $\triangle\varphi = 0$ при граничном условии (1.2) и начальном условии

$$y = -\frac{\varphi(x, 0, 0)}{k} = 0 \tag{1.3}$$

Условие (1.1) послужит в дальнейшем для определения формы свободной поверхности.

Поместим в центре дрены,— в точке $(0, -h)$, сток интенсивности $q(t)$, который будет представлять дрену. В симметричной точке $(0, h)$ поместим источник такой же интенсивности. Вместо функции $\varphi(x, y, t)$ определим функцию $\varphi_1(x, y, t)$, связанную с φ соотношением

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q(t)}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + (y+h)^2} + \frac{q(t)}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + (y-h)^2} + \varphi_1(x, y, t)$$

Решаем задачу в приближенной постановке, снося граничное условие (1.2) на ось x, т. е. будем предполагать, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = 0$$

Имея в виду это условие, перепишем его для функции

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + c\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{q(t)\,c}{\pi}\cdot\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2} = 0 \qquad \text{при } y = 0 \tag{1.4}$$

Рассмотрим гармоническую функцию переменных x и y во всей нижней полуплоскости:

$$\Phi(x, y, t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + c\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{q(t)\,c}{\pi}\,\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2}$$

Эта функция обращается в нуль при $y=0$. Следовательно, $\Phi(x, y, t) \equiv 0$ в нижней полуплоскости.

Таким образом, задача сводится к определению гармонической во всей полуплоскости функции φ_1, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + c\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{q(t)\,c}{\pi}\,\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2}$$

Имея в виду соотношение

$$-\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2} = \int\limits_0^\infty e^{\lambda(y-h)} \cos \lambda x\, d\lambda$$

будем искать функцию φ_1 в виде следующего интеграла:

$$\varphi_1(x, y, t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty A(t, \lambda)\, e^{\lambda(y-h)} \cos \lambda x\, d\lambda$$

Подставим это выражение в условие (1.4) и получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c\lambda A = cq, \qquad \text{или} \qquad A = c\int\limits_0^t q(\tau)\, e^{c\lambda(\tau-t)} d\tau$$

После этого функция φ_1 определится в следующем виде:

$$\varphi_1 = \frac{c}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{\lambda(y-h)} \cos \lambda x\, d\lambda \int\limits_0^t q(\tau) e^{c\lambda(\tau-t)}\, d\tau$$

На основании известной формулы

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-q\lambda}-e^{-r\lambda}}{\lambda} \cos p\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+r^2}{p^2+q^2} \qquad [r>0,\ q>0]$$

искомая функция φ может быть представлена в следующем виде:

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\ln\left[x^2+(y+h)^2\right] - \frac{q(t)}{4\pi}\ln\left[x^2+(y-h)^2\right] +$$

$$+\frac{q_0}{2\pi}\ln\left[x^2+(y-h-ct)^2\right] - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \dot{q}(\tau)\ln\left\{x^2+\left[y-h+c(\tau-t)\right]^2\right\} d\tau$$

где

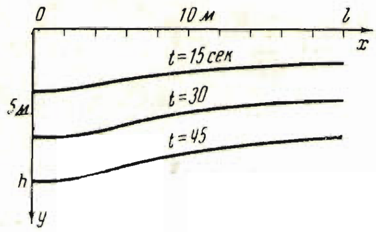
$$q_0 = q(0), \qquad \dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Предположим, что $q = \text{const}$. Тогда

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q}{4\pi}\ln\left[x^2+(y+h)^2\right] - \frac{q}{4\pi}\ln\left[x^2+(y-h)^2\right] - \frac{q}{2\pi}\left[x^2+(y-h-ct)^2\right]$$

Таким образом, в этом случае течение грунтовых вод можно рассматривать как течение, создаваемое стоком интенсивности q, помещенным в точке $(0-h)$, фиктивным стоком той же интенсивности, помещенным в симметричной точке $(0, h)$,



Фиг. 1

и перемещающимся по вертикали вверх с постоянной c фиктивным источником удвоенной интенсивности $2q$. Уравнение свободной поверхности возьмем в приближенном виде

$$y = -\frac{1}{k}\,\varphi(x, 0, t)$$

или

$$y = -\frac{q}{2\pi k}\ln\frac{x^2+(h+ct)^2}{x^2+h^2}$$

На фиг. 1 представлен вид свободной поверхности в данном случае для различных моментов времени. При этом полагалось

$$h = 5 \text{ м}, \qquad k = 0.1 \text{ см/сек}, \qquad c = 0.3 \text{ см/сек}$$

2. Предположим, что $\varphi = \varphi_0$ на некоторой эквипотенциали, проходящей через точку $(a, -h)$. Эту эквипотенциаль примем за контур дрены. Для исследования возьмем φ в виде

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\ln[x^2+(y-h)^2] + \frac{q(t)}{4\pi}\ln[x^2+(y+h)^2] + $$
$$+\frac{c}{\pi}\int_0^t q(\tau)\,\frac{2h+ct-c\tau}{a^2+(2h+ct-c\tau)^2}\,d\tau$$

Предположим, что a мало по сравнению с h, тогда

$$\varphi_0 = \frac{q(t)}{2\pi}\ln\frac{2h}{a} - \frac{1}{\pi}\int_0^t q(\tau)\,d\ln[2h+ct-c\tau]$$

Или, переписав иначе, получим

$$q_0 = q(t) - \lambda\int_0^t q(\tau)\,d\ln(2h+ct-c\tau) \qquad \left(q_0 = \frac{2\pi\varphi_0}{\ln(2h/a)},\ \ \lambda = \frac{2}{\ln(2h/a)}\right)$$

Для определения $q(t)$ имеем уравнение Вольтерра 2-го рода. Положим

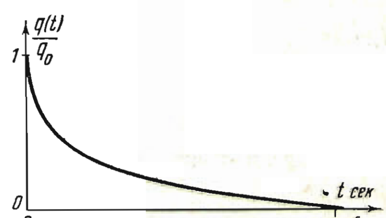
$$q = q_0 + \lambda q_1(t) + \lambda^2 q_2(t) + \ldots$$

и получим

$$q_1 = q_0\ln\frac{2h}{2h+ct}, \qquad q_2 = q_0\int_0^t \ln\frac{2h}{2h+c\tau}\,d\ln(2h+ct-c\tau) \quad \text{и т. д.}$$

Предполагая λ достаточно малым, построим график функции $q(t)$, ограничиваясь лишь первым приближением, т. е. полагаем

$$q(t) = q_0\left(1 - \lambda\ln\frac{2h}{2h+ct}\right)$$



Фиг. 2

График функции $q(t)$ представлен на фиг. 2. При составлении графика принималось $h = 5$ м, $c = 0.3$ см/сек, $\lambda = 0.22$.

Полученные результаты можно непосредственно применить для бесконечной системы дрен, равноотстоящих друг от друга на расстоянии $2l$, центры которых находятся на глубине h под первоначальным уровнем грунтовыходов. При решении используем формулу для потенциала бесконечной цепочки стоков

$$\varphi(x, y) = -\frac{q}{4\pi}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y+h)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]$$

Решая задачу для бесконечной системы дрен в той же постановке, что и в случае одной дрены, получим потенциал скоростей в виде

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\ln\left\{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y+h)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y-h)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]\right\} +$$

$$+\frac{q_0}{4\pi}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y-h-ct)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right] + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \dot{q}(\tau)\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y-h+ct-c\tau)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]d\tau$$

Для случая $q = \text{const}$ потенциал выражается формулой

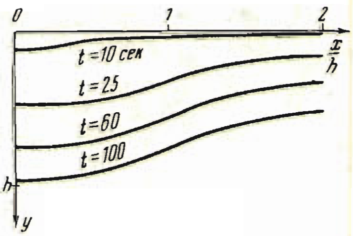
$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q}{4\pi}\ln\left\{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y+h)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y-h)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]\right\} +$$

$$+\frac{q}{4\pi}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y-h-ct)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]$$

Уравнение свободной поверхности будет иметь следующий вид:

$$y = -\frac{q}{2\pi k}\ln\frac{\operatorname{ch}[\pi(h+ct)/l] - \cos(\pi x/l)}{\operatorname{ch}(\pi h/l) - \cos(\pi x/l)}$$

Форма свободной поверхности представлена на фиг. 3. При этом $l = 10$ м, значения других параметров таковы же, что и в предыдущих случаях.



Фиг. 3

Рассмотрим случай, когда на некоторой эквипотенциали, проходящей через точку $(a, -h)$, задается значение потенциала $\varphi = \varphi_0$.

Тогда, если взять выражение потенциала в виде

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y+h)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right] + \frac{q(t)}{4\pi}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y-h)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^t q(\tau)\,d\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y-h+c\tau-ct)}{l} - \cos\frac{\pi a}{l}\right]$$

получим

$$\varphi_0 = \frac{q(t)}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(2\pi h/l) - \cos(\pi a/l)}{1-\cos(\pi a/l)} - \frac{1}{2\pi}\int_0^t q(t)\,d\ln\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi(2h+ct-c\tau)}{l} - \cos\frac{\pi a}{l}\right\}$$

или

$$q_0 = q(t) - \lambda\int_0^t q(\tau)\,d\ln\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi(2h+c\tau-ct)}{l} - \cos\frac{\pi a}{l}\right\}$$

где

$$q_0 = \frac{4\pi\varphi_0}{L}, \qquad \lambda = \frac{2}{L}, \qquad L = \ln\frac{\operatorname{ch}(2\pi h/l) - \cos(\pi a/l)}{\operatorname{ch}[\pi(2h+ct)/l] - \cos(\pi a/l)}$$

Как и прежде, имеем уравнение Вольтерра 2-го рода для расхода $q(t)$. Положим.

$$q(t) = q_0 + \lambda q_1(t) + \lambda^2 q_2(t) + \ldots$$

Тогда

$$q_1(t) = q_0 \ln \frac{\operatorname{ch}(2\pi h / l) - \cos(\pi a / l)}{\operatorname{ch}[\pi(2h + ct)/l] - \cos(\pi a / l)} \quad \text{и т. д.}$$

2. Дрена в ограниченном пласте. В этом случае, кроме условий (1.1) и (1.2), должно выполняться условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -b \tag{2.1}$$

Подобно тому, как это было сделано в п. 1, найдем потенциал

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi} \ln[x^2 + (y+h)^2] + \frac{q(t)}{4\pi} \ln[x^2 + (y-h)^2] +$$

$$+ \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(h+b)}\left[e^{-\lambda(y+b)} - e^{-\lambda(y+b)}\right]}{1 + e^{-2\lambda b}} \cos\lambda x \, d\lambda . \int_0^t q(\tau)\, e^{c\lambda\mu(\tau - t)}\, d\tau$$

где $\mu = \operatorname{th} b\lambda$. Если $q = \text{const}$, то

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{q}{4\pi} \ln \frac{x^2 + (y+h)^2}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2\lambda(y+b)}}{1 - e^{-2\lambda b}}\, e^{-\lambda(h+b)} \frac{\cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda -$$

$$- \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-2\lambda(y+b)}}{1 - e^{-2\lambda b}}\, e^{-\lambda(ct \operatorname{th}\lambda b + h + b)} \frac{\cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda$$

Уравнение свободной поверхности

$$y = -\frac{q}{2\pi k} \ln[x^2 + (h+b)^2] + \frac{q}{\pi k} \int_0^\infty e^{-\lambda(ct \operatorname{th}\lambda b + h + b)} \frac{\cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda$$

В случае $\varphi = \varphi_0$ на эквипотенциали, проходящей через точку $(a, -h)$, для определения расхода $q(t)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$q_0 = q(t) - \nu \int_0^t q(\tau)\, K(\tau, t)\, d\tau$$

$$K(\tau, t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(h+b)}\left[e^{\lambda(b-h)} - e^{-\lambda(b-h)}\right]}{1 + e^{-2\lambda b}}\, e^{c\lambda\mu(\tau - t)} \cos a\lambda \, d\lambda$$

$$q_0 = \frac{2\pi\varphi_0}{\ln(2h/a)}, \qquad \nu = \frac{2c}{\ln(2h/a)}$$

3. Дрена в двуслойном грунте. Пусть верхний пласт толщиной b имеет коэффициент фильтрации k_1. Нижний слой, простирающийся неограниченно вниз, имеет коэффициент фильтрации k_2. Потенциал скоростей верхнего слоя обозначим через φ_1, нижнего — φ_2. Найдем потенциалы φ_1 и φ_2 при условии (1.4) и условиях

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} \quad \text{при } y = -b \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad \text{при } y = -b \tag{3.2}$$

Дрена в верхнем слое. Представим искомые функции φ_1 и φ_2 в виде

$$\varphi_1(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\ln[x^2+(y+h)^2] + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty [A(\lambda, t)e^{\lambda y} + B(\lambda, t)e^{\ \lambda y}]\cos\lambda x\, d\lambda$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty C(\lambda, t)e^{\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda r$$

Удовлетворяя граничные условия, получим

$$\varphi_1(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\ln[x^2+(y+h)^2] + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty [e^{\lambda y} + \delta e^{-\lambda(2b+y)}]\frac{1+\delta e^{2\lambda(h-b)}}{1+\delta e^{-2\lambda b}}e^{-\lambda h}\cos\lambda x\, d\lambda\times$$

$$\times\int\limits_0^t\left[cq(\tau) - \frac{\dot{q}(\tau)}{\lambda}e^{c\lambda\mu(\tau-t)}d\tau - \frac{q(t)\,\delta}{4\pi}\ln[x^2+(h-2b-y)^2]\right]$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \frac{1-\delta}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{\lambda(y-h)}\frac{1+\delta e^{2\lambda(h-b)}}{1+\delta e^{-2\lambda b}}\cos\lambda x\, d\lambda\int\limits_0^t\left[cq(\tau) - \frac{\dot{q}(\tau)}{\lambda}\right]e^{c\lambda\mu(\tau-t)}d\tau -$$

$$-\frac{(1-\delta)\,q(t)}{4\pi}\ln[x^2+(y+h)^2]$$

где

$$\delta = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}, \qquad \mu = \frac{1-\delta e^{-2\lambda b}}{1+\delta e^{-2\lambda b}}$$

Дрена в нижнем слое. В этом случае функции φ_1 и φ_2 будем искать в виде

$$\varphi_1(x, y, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty [A(\lambda, t)e^{\lambda y} + B(\lambda, t)e^{-\lambda y}]\cos\lambda x\, d\lambda$$

$$\varphi_2(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\ln[x^2+(y+h)^2] + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty C(\lambda, t)e_{\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda.$$

Для функций φ_1 и φ_2 получим следующие выражения:

$$\varphi_1(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\frac{3k_1+k_2}{k_1+k_2}\ln[x^2+(y+h)^2] +$$

$$+\frac{k_1}{\pi(k_1+k_2)}\int\limits_0^\infty\frac{[e^{\lambda y}+\delta e^{-\lambda(2b+y)}]e^{-\lambda h}}{1+\delta e^{-2\lambda b}}\cos\lambda x\, d\lambda\int\limits^t\left[cq(\tau) - \frac{\dot{q}(\tau)}{\lambda}\right]e^{\lambda c\mu(\tau-t)}d\tau$$

$$\varphi_2(x, y, t) = -\frac{q(t)}{4\pi}\ln[x^2+(y+h)^2] - \frac{q(t)}{4\pi}\ln[x^2+(y-h)^2] +$$

$$+\frac{q(t)}{2\pi}\ln[x^2+(y+2b-h)^2] +$$

$$+\frac{(1-\delta)\,k_1}{\pi(k_1+k_2)}\int\limits_0^\infty e^{\lambda(y-h)}\cos\lambda x\, d\lambda\int\limits_0^t\frac{e^{\lambda c\mu(\tau-t)}}{1+\delta e^{-2\lambda b}}\left[cq(\tau) - \frac{\dot{q}(\tau)}{\lambda}\right]d\tau$$

Подобным образом можно рассмотреть задачу о дрене в двуслойном грунте ограниченной мощности. Отметим, что изложенный приближенный метод применим до момента времени, когда депрессионная кривая достигнет поверхности древы.

Поступила 23 X 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гос. изд. тех.-теорет. литературы, М., 1952.