Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОДИН СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

П. В. Харламов

(Сталино)

1. Рассмотрим систему, состоящую из простирающейся беспредельно тяжелой несжимаемой жидкости и находящегося в ней тяжелого твердого тела, причем жидкость находится в безвихревом движении и покоится в бесконечности. Вязкостью жидкости пренебрегаем. Полагаем, что вес тела P равен весу вытесненной им жидкости. Обозначим через ρ расстояние между центром тяжести тела C и центром тяжести C' вытесненного телом объема жидкости. Наиболее полно исследовано движение тела при $\rho = 0$. Чаплыгин указал случай интегрируемости уравнений движения при $\rho \neq 0$[1]. Ниже рассмотрен еще один случай интегрируемости уравнений движения тела в жидкости. При $\rho = 0$ этот случай исследован Клебшем и Альфаном[5,6].

2. Полагаем, что кинетическая энергия рассматриваемой системы имеет вид:

$$2T = \lambda (K_x^2 + K_y^2) + \mu K_z^2 + \alpha (N_x^2 + N_y^2) + \beta N_z^2 + 2\sigma (K_x N_x + K_y N_y) + 2\tau K_z N_z$$

Здесь λ, μ, α, β, σ, τ — постоянные величины, определяемые формой тела и распределением его массы, K_x, K_y, K_z и N_x, N_y, N_z — соответственно проекции импульсивной силы $\mathbf{K}$ и импульсивной пары $\mathbf{N}$ на оси $Oxyz$, неизменно связанные с телом. Полагаем, что $\overline{C'C} = \rho\mathbf{k}$ где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси Oz.

Вводя векторы угловой скорости тела ω и скорости $\mathbf{U}$ точки O, записываем уравнения движения тела в виде [4]

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \omega\times \mathbf{K} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \omega \times\mathbf{N} + \mathbf{U}\times \mathbf{K} = \rho\mathbf{k}\times \mathbf{P} \tag{2.1}$$

Первое уравнение означает, что импульсивная сила остается постоянной по величине и направлению в неподвижной системе координат. При $K = 0$ уравнение (2.1) имеет форму уравнения, описывающего движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа. Полагая $K \neq 0$, подчиним импульсивную силу условию

$$\mathbf{P} = \frac{P}{K}\mathbf{K} \tag{2.2}$$

При этом уравнения (2.1) допускают интегралы

$$2T - 2\rho\frac{P}{K}K_z = h, \quad K_x N_x + K_y N_y + K_z N_z = Kn, \quad K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K^2 \tag{2.3}$$

Здесь h, Kn, K^2 — постоянные интегрирования. Для нахождения четвертого интеграла умножим скалярно обе стороны равенства (2.1) на $\mathbf{k}$:

$$\frac{dN_z}{dt} + \omega_x N_y - \omega_y N_x + U_x K_y - U_y K_x = 0 \tag{2.4}$$

Проекции векторов ω и $\mathbf{U}$ на оси $Oxyz$ равны

$$\omega_x = \frac{\partial T}{\partial N_x} = \alpha N_x + \sigma K_x, \quad \omega_y = \frac{\partial T}{\partial N_y} = \alpha N_y + \sigma K_y, \quad \omega_z = \frac{\partial T}{\partial N_z} = \beta N_z + \tau K_z \tag{2.5}$$

$$U_x = \frac{\partial T}{\partial K_x} = \lambda K_x + \sigma N_x \quad U_y = \frac{\partial T}{\partial K_y} = \lambda K_y + \sigma N_y, \quad U_z = \frac{\partial T}{\partial K_z} = \mu K_z + \tau N_z$$

Поэтому уравнение (2.4) принимает вид:

$$\frac{dN_z}{dt} = 0 \qquad \text{или} \qquad N_z = \text{const} = \nu \tag{2.6}$$

Направим ось ζ неподвижной системы координат $O'\xi\eta\zeta$ параллельно вектору **K**. Вводя углы прецессии ψ, нутации θ и собственного вращения φ, получаем

$$K_x = K\sin\theta\sin\varphi, \qquad K_y = K\sin\theta\cos\varphi, \qquad K_z = K\cos\theta \tag{2.7}$$

Пользуясь известными формулами

$$\omega_x = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin \quad + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi, \quad \omega_y = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi, \quad \omega_z = \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}$$

и формулами (2.7), находим из (2.5)

$$\alpha N_x = \left(\frac{d\psi}{dt} - \sigma K\right)\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi,$$
$$\alpha N_y = \left(\frac{d\psi}{dt} - \sigma K\right)\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi, \qquad \beta\nu = \left(\frac{d\psi}{dt} - \tau K\right)\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} \tag{2.8}$$

Пользуясь выражениями (2.6), (2.5) и (2.1), преобразуем первые два интеграла (2.3) к виду

$$\lambda K^2\sin^2\theta + \mu K^2\cos^2\theta + \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{d\psi}{dt} - \sigma K\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \beta\nu^2 +$$
$$+ 2\frac{\sigma}{\alpha}K\left(\frac{d\psi}{dt} - \sigma K\right)\sin^2\theta + 2\tau\nu K\cos\theta - 2\rho P\cos\theta = h \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt} - \sigma K\right)\sin^2\theta + \alpha\nu\cos\theta = \alpha n$$

Исключая из этих равенств $d\psi/dt$, получаем (2.10)

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u), \qquad f(u) = (a + a'u + a''u^2)(1 - u^2) - (b - b'u)^2, \qquad u = \cos\theta$$

Здесь для сокращения записи положено

$$a = \alpha(h - \lambda K^2 - \beta\nu^2 - 2\sigma K n), \qquad a'' = \alpha(\lambda - \mu)K^2$$
$$a' = 2\alpha[\rho P + K\nu(\sigma - \tau)], \qquad b = \alpha n, \quad b' = \alpha\nu$$

При обращении эллиптического интеграла

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{f(u)}} \tag{2.11}$$

получаем
$$u = \Phi(t - t_0) \tag{2.12}$$

Из третьего равенства (2.8) и второго (2.9) имеем

$$\frac{d\psi}{dt} = \sigma K + \alpha\frac{n - \nu u}{1 - u^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \beta\nu - (\sigma - \tau)Ku - \alpha\frac{n - \nu u}{1 - u^2}u \tag{2.13}$$

и, на основании (2.12) из (2.10) и (2.13) находим θ, ψ и φ как функцию времени.

3. Уравнения (2.1) имеют при условии (2.2) частное решение

$$N_x = N_y = 0, \qquad N_z = \nu, \qquad K_x = K_y = 0, \qquad K_z = K \tag{3.1}$$

Исследуем устойчивость этого движения по отношению к переменным N_x, N_y, N_z, K_x, K_y, K_z. Для возмущенного движения вводим обозначения

$$N_x = \varepsilon, \quad N_y = \varepsilon', \quad N_z = \nu + \varepsilon'', \quad K_x = \delta, \quad K_y = \delta', \quad K_z = K + \delta''$$

Уравнения возмущенного движения имеют интегралы

$$V_1 = \lambda(\delta^2 + \delta'^2) + \mu(\delta''^2 + 2K\delta'') + \alpha(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) + \beta(\varepsilon''^2 + 2\nu\varepsilon'') +$$
$$+ 2\sigma(\varepsilon\delta + \varepsilon'\delta') + 2\tau(\delta''\varepsilon'' + \nu\delta'' + K\varepsilon'') - 2\rho(P/K)\delta''$$

$$V_2 = \varepsilon\delta + \varepsilon'\delta' + \varepsilon''\delta'' + \nu\delta'' + K\varepsilon''$$

$$V_3 = \delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + 2K\delta'', \qquad V_4 = \varepsilon'' \tag{3.2}$$

Функцию Ляпунова ищем в виде[3]

$$V = V_1 + 2AV_2 + \left[\frac{\rho P}{K^2} - (\tau + A)\frac{\nu}{K} - \mu\right] V_3 - 2\left[\beta\nu + (\tau + A) K\right] V_4 + CV_4^2 \qquad (3.3)$$

Величины A и C подлежат определению. Подставив значения V_1, V_2, V_3 и V_4 из (3.2) в (3.3), записываем функцию V в виде суммы трех форм:

$$\begin{aligned} V = &\left[\frac{\rho P}{K^2} - (\tau + A)\frac{\nu}{K} + \lambda - \mu\right]\delta^2 + 2(\sigma + A)\varepsilon\delta + \alpha\varepsilon^2 + \\ &+ \left[\frac{\rho P}{K^2} - (\tau + A)\frac{\nu}{K} + \lambda - \mu\right]\delta'^2 + 2(\sigma + A)\varepsilon'\delta' + \alpha\varepsilon'^2 + \\ &+ \left[\frac{\rho P}{K^2} - (\tau + A)\frac{\nu}{K}\right]\delta''^2 + 2(\tau + A)\varepsilon''\delta'' + (C + \beta)\varepsilon''^2 \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Для положительности первых двух форм достаточно, чтобы величина A удовлетворяла условию

$$\alpha\left\{\frac{\rho P}{K^2} - (\tau + A)\frac{\nu}{K} - \frac{1}{2}\left[\,|\lambda - \mu| + \mu - \lambda\right]\right\} - (\sigma + A)^2 > 0 \qquad (3.5)$$

или

$$(\sigma + A)^2 + \alpha\frac{\nu}{K}(\sigma + A) - \alpha\left\{(\sigma - \tau)\frac{\nu}{K} + \frac{\rho P}{K^2} - \frac{1}{2}\left[\,|\lambda - \mu| + \mu - \lambda\right]\right\} < 0 \qquad (3.6)$$

Такие значения A могут быть указаны, если данные в (3.1) значения ν и K подчинены условию

$$\alpha\frac{\nu^2}{K^2} + 4\left\{(\sigma - \tau)\frac{\nu}{K} + \frac{\rho P}{K^2} - \frac{1}{2}\left[\,|\lambda - \mu| + \mu - \lambda\right]\right\} > 0 \qquad (3.7)$$

Для любого значения параметра A всегда может быть указана величина C так, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\rho P}{K^2} - (\tau + A)\dfrac{\nu}{K} & \tau + A \\ \tau + A & C + \beta \end{vmatrix} > 0 \qquad (3.8)$$

Неравенство

$$\frac{\rho P}{K^2} - (\tau + A)\frac{\nu}{K} > \frac{1}{2}\left[\,|\lambda - \mu| + \mu - \lambda\right]$$

имеющее место при выполнении условия (3.5), совместно с неравенством (3.8) обеспечивает положительность третьей формы, входящей в (3.4). Таким образом, при выполнении условия (3.7) всегда возможно указать значения величин A и C, при которых интеграл V будет определенно-положительным относительно переменных ε, ε', ε'', δ, δ', δ''. На основании теоремы Ляпунова[2] этим доказана устойчивость движения (3.1) по отношению к переменным N_x, N_y, N_z, K_x, K_y, K_z.

Поступила 26 X 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. XI, вып. 2, 1903.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
3. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, вып. 1, 1954.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. ГИТТЛ, 1948.
5. Clebsch. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Mathem. Annalen, Bd. III, 1871.
6. Halphen. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. Journal de Mathématiques, t. IV, série IV, 1888.