Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВИНТОВОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ ПРИ УСЛОВИЯХ С. А. ЧАПЛЫГИНА

В. В. Румянцев

(Москва)

Рассмотрим движение твердого тела в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся в бесконечности.

Предположим [1], что тело и жидкость подвержены действию силы тяжести, и допустим, что вес вытесненной жидкости равен весу тела, причем центры тяжести тела и вытесняемого им объема жидкости лежат на равном расстоянии от плоскости Oxy, связанной с телом системы координат $Oxyz$. Пусть кинетическая энергия тела и жидкости определяется формулой

$$2T = P_1^2 + P_2^2 + 2P_3^2 + (b+c)R_1^2 + (b-c)R_2^2 + bR_3^2 \qquad (1)$$

где R_1, R_2, R_3, P_1, P_2, P_3 обозначают соответственно проекции на оси x, y, z главного вектора и главного момента импульсов, b и c — постоянные. Предположим также, что начальный импульс имеет вертикальную ось, как для возмущенного, так и для невозмущенного движений.

Уравнения движения твердого тела в жидкости для случая (1) можно, как показал С. А. Чаплыгин [1], записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dR_1}{dt} &= 2P_3R_2 - P_2R_3, & \frac{dP_1}{dt} &= P_2P_3 + cR_2R_3 + N\eta R_3 \\
\frac{dR_2}{dt} &= P_1R_3 - 2P_3R_1, & \frac{dP_2}{dt} &= -P_1P_3 + cR_1R_3 - N\xi R_3 \\
\frac{dR_3}{dt} &= P_2R_1 - P_1R_2, & \frac{dP_3}{dt} &= -2cR_1R_2 + N\xi R_2 - N\eta R_1
\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь N — постоянная величина, пропорциональная весу тела, причем $N > 0$ в случае, когда импульсивная сила совпадает по направлению с силой тяжести, и $N < 0$ в противоположном случае; $\xi = x - x'$, $\eta = y - y'$, где x и y — координаты центра тяжести тела, а x' и y' — координаты центра тяжести вытесненного им объема жидкости. Уравнения (2), как легко видеть, допускают интегралы

$$\begin{gathered}
P_1^2 + P_2^2 + 2P_3^2 + c(R_1^2 - R_2^2) - 2N\xi R_1 - 2N\eta R_2 = h \\
P_1R_1 + P_2R_2 + P_3R_3 = H \\
R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = n
\end{gathered} \qquad (3)$$

Помимо трех интегралов (3) в случае $H = 0$ Чаплыгин нашел четвертый интеграл

$$(P_1^2 - P_2^2 + cR_3^2 + 2N\xi R_1 - 2N\eta R_2)^2 + 4(P_1P_2 + N\eta R_1 + N\xi R_2)^2 = \text{const}$$

позволяющий вместе с приведенными выше свести задачу к квадратурам [1].

Уравнения (2) допускают частное решение

$$P_1 = P_1^\circ, \quad P_2 = P_2^\circ, \quad P_3 = 0, \quad R_1 = R_1^\circ, \quad R_2 = R_2^\circ, \quad R_3 = 0 \qquad (4)$$

если постоянные $P_1^\circ, \ldots, R_2^\circ$ удовлетворяют условиям

$$P_2^\circ R_1^\circ = P_1^\circ R_2^\circ \qquad N\xi R_2^\circ - N\eta R_1^\circ = 2cR_1^\circ R_2^\circ \qquad (5)$$

Частное решение (4) описывает постоянное винтовое движение твердого тела в жидкости. При этом очевидно постоянная $H \neq 0$.

Движение (4) примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость по отношению к переменным $R_1, \ldots, P_3$ при фиксированном значении постоянной n в последнем из интегралов (3). Допустим, что в возмущенном движении

$$P_1 = P_1^\circ + \alpha_1, \quad P_2 = P_2^\circ + \alpha_2, \quad R_1 = R_1^\circ + \beta_1, \quad R_2 = R_2^\circ + \beta_2$$

а для переменных R_3 и P_3 сохраним прежние обозначения.

Уравнения возмущенного движения тела допускают интегралы

$$V_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2P_3^2 + c(\beta_1^2 - \beta_2^2) + 2c(R_1^\circ\beta_1 - R_2^\circ\beta_2) + \\ + 2(P_1^\circ\alpha_1 + P_2^\circ\alpha_2) - 2N(\xi\beta_1 + \eta\beta_2) = \text{const} \tag{6}$$

$$V_2 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + P_3R_3 + R_1^\circ\alpha_1 + P_1^\circ\beta_1 + R_2^\circ\alpha_2 + P_2^\circ\beta_2 = \text{const}$$

$$V_3 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + R_3^2 + 2(R_1^\circ\beta_1 + R_2^\circ\beta_2) = 0$$

Построим функцию Ляпунова по методу Н. Г. Четаева в форме линейной связки интегралов (6):

$$V = V_1 - 2\lambda V_2 + (\mu + \lambda^2)V_3 = \alpha_1^2 - 2\lambda\alpha_1\beta_1 + (\mu + \lambda^2 + c)\beta_1^2 + \alpha_2^2 - 2\lambda\alpha_2\beta_2 + \\ + (\mu + \lambda^2 - c)\beta_2^2 + 2P_3^2 - 2\lambda P_3R_3 + (\mu + \lambda^2)R_3^2 \tag{7}$$

где

$$\lambda = \frac{P_1^\circ}{R_1^\circ} = \frac{P_2^\circ}{R_2^\circ}, \qquad \mu = \frac{N\xi}{R_1^\circ} - c = \frac{N\eta}{R_2^\circ} + c \tag{8}$$

Функция V представляет собой сумму трех квадратичных форм, каждая из которых будет определенно-положительной при выполнении следующих соответственно условий:

$$\mu + c > 0, \qquad \mu - c > 0, \qquad 2\mu + \lambda^2 > 0$$

Следовательно, достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (4) по отношению к переменным $R_1, \ldots, P_3$ является при этом условие (считая $c > 0$)

$$\frac{N\xi}{R_1^\circ} - 2c > 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{N\eta}{R_2^\circ} > 0 \tag{9}$$

Отметим, что условие (9) является достаточным и для устойчивости поступательного движения (4) при $P_1^\circ = P_2^\circ = 0$.

Если $\eta = 0$, то уравнения (2) допускают частное решение

$$P_1 = P_1^\circ, \quad P_2 = P_3 = 0, \quad R_1 = R_1^\circ, \quad R_2 = R_3 = 0 \tag{10}$$

описывающее постоянное винтовое движение твердого тела вдоль оси x, совпадающей при этом с вертикалью. Достаточным условием устойчивости такого движения по отношению к переменным $P_1, \ldots, R_3$ является, как легко видеть, первое из условий (9), если $c > 0$, или условие

$$\frac{N\xi}{R_1^\circ} > 0 \tag{11}$$

если $c < 0$, причем постоянная n здесь не фиксируется.

В случае $c = 0$ уравнения (2), как заметил С. А. Чаплыгин, «будут те самые, которыми характеризуется вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки» [1] в случае Ковалевской. Достаточным условием устойчивости движения (4) будет при этом условие [2] (11).

Поступила 11 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1, Гостехиздат, 1948.
2. В. В. Румянцев. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской. ПММ, т. XVIII, в. 4, 1954.