Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОЛУЧЕНИЯ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} z_s + Z_s(t, z_1, \ldots, z_n, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где a_{si} — постоянные; $Z_s(t, z, \mu)$ аналитические функции переменных $z_1, \ldots, z_n$ в некоторой окрестности точки $z_1 = \cdots = z_n = 0$ и параметра μ при $|\mu| \leqslant \mu^*$, где μ^* — положительное число; относительно t функции Z_s непрерывны и периодичны периода 2π; причем $Z_s(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$. Разложение в ряды функций $Z_s(t, z_1, \ldots, z_n, 0)$ не содержат линейных членов.

Будем искать периодическое решение системы (1.1), которое при $\mu = 0$ обращается в тривиальное решение $z_s = 0$ порождающей системы (система (1.1) при $\mu = 0$). К такой задаче приводятся многочисленные вопросы отыскания периодических решений нелинейных систем методом малого параметра.

Если среди корней характеристического уравнения

$$|a_{si} - \delta_{si}\lambda| = 0 \tag{1.2}$$

нет критических (т. е. равных числам вида $\pm N\sqrt{-1}$, где $N = 0, 1, 2, \ldots$), то задача решается известной теоремой Пуанкаре [1]. А именно, решение такого рода будет единственным и аналитическим относительно параметра μ. Его можно найти в виде рядов с неизвестными периодическими коэффициентами вида

$$z_s(t) = \mu Z_s^{(1)}(t) + \mu^2 Z_s^{(2)}(t) + \cdots \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

В этом сообщении необходимые и достаточные условия существования периодических решений для систем вида (1.1) в критическом случае устанавливаются не подсчетом общего решения системы (1.1) в окрестности точки $\mu = 0$ по степеням μ [2—7], а построением общего периодического решения некоторой вспомогательной системы. При этом условия получаются в явной форме.

Система (1.1) при помощи линейного неособого преобразования с постоянными или периодическими коэффициентами (периода 2π) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1i}}{dt} &= X_{1i}(t, x, y, \mu) \\ \frac{dx_{\nu_i i}}{dt} &= x_{\nu_i-1, i} + X_{\nu_i i}(t, x, y, \mu) \\ \frac{dy_j}{dt} &= c_{j1}y_1 + \cdots + c_{je}y_e + Y_j(t, x, y, \mu) \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, \ldots, k \\ \nu_i = 2, \ldots, m_i \\ j = 1, \ldots, l \end{matrix}\right) \tag{1.3}$$

Здесь $m_1 + \cdots + m_k$ — число критических корней уравнения (1.2); $c_{j\sigma}$ — постоянные такие, что уравнение $|c_{j\sigma} - \delta_{j\sigma}\lambda| = 0$ не имеет критических корней; функции такого же рода, что и соответствующие функции в системе (1.1).

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1i}}{dt} &= X_{1i}(t, x, y, \mu) + W_i \\ \frac{dx_{\nu_i i}}{dt} &= x_{\nu_i-1, i} + X_{\nu_i i}(t, x, y, \mu) \\ \frac{dy_j}{dt} &= c_{j1}y_1 + \cdots + c_{je}y_e + Y_j(t, x, y, \mu) \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, \ldots, k \\ \nu_i = 1, \ldots, m_i \\ j = 1, \ldots, l \end{matrix}\right) \tag{1.4}$$

Эта система отличается от (1.3) тем, что к первым уравнениям с выделенными критическими корнями добавлены постоянные величины W_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Будем искать частное решение вспомогательной системы с начальными условиями

$$x_i(0) = \beta_{1i}, \quad x_{\nu_i i}(0) = \beta_{\nu_i i}, \quad y_j(0) = \gamma_j \quad (i = 1, \ldots, k; \ \nu_i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, l) \tag{1.5}$$

где β и γ — постоянные. Справедлива следующая теорема.

1) Взяв произвольно $\beta_{m_i i} = \beta_i$ достаточно малым по модулю ($|\beta_i| < \beta^*$, где β^* — некоторое положительное число) можно подобрать остальные β и γ в начальных условиях (1.5) и W в уравнениях (1.4) так, что соответствующее решение системы (1.4) будет периодическим периода 2π.

Это периодическое решение вспомогательной системы (1.4) будет аналитическим относительно параметра μ, обращающимся при $\mu = 0$ в тривиальное решение $x = y = 0$ системы (1.4) при $W_i = 0$. Поэтому его можно искать в виде рядов с неизвестными периодическими коэффициентами, расположенных по целым и положительным степеням параметра μ, с произвольными начальными значениями для функций $x_{m_i i}(0) = \beta_i$.

2) Если $\{x^*, y^*\}$ — периодическое решение вспомогательной системы, то соответствующие постоянные W_i определяются формулами

$$W_i^* = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_{1i}(t, x^*, y^*, \mu)\, dt \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.6}$$

3) Для того чтобы исходная система (1.3) имела периодическое решение, при $\mu = 0$ обращающееся в тривиальное, необходимо и достаточно, чтобы система

$$W_j^*(\beta_1 \ldots, \beta_k, \mu) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{1.7}$$

имела решение $\beta_i = \beta_i(\mu)$, где $\beta_i(0) = 0$. Причем периодических решений у системы (1.3) будет столько, сколько решений имеет система (1.7).

Доказательство. Легко установить, что решение вспомогательной системы с начальными условиями (1.5) имеет вид

$$x_{1i}(t) = \beta_{1i} + W_i t + O_{1i}(t, \beta, \gamma, w, \mu)$$

$$x_{2i}(t) = \beta_{2i} + \beta_{1i}t + W_i\frac{t^2}{2!} + O_{2i}(t, \beta, \gamma, w, \mu)$$

. . . .

$$x_{m_i i}(t) = \beta_{m_i i} + \beta_{m_i-1, i}t + \cdots + \beta_{1i}\frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} + W_i\frac{t^{m_i}}{m_i!} + O_{m_i i}(t, \beta, \gamma, w, \mu)$$

$$y_j = \gamma_1 y_{j1}(t) + \cdots + \gamma_e y_{je}(t) + O_j(t, \beta, \gamma, w, \mu)$$

Здесь $Q|_{\mu=0}$ функции, содержащие β и γ в степенях не ниже второй, такие, что $O(t, 0, 0, 0, 0) \equiv 0$; $y_{j\sigma}$ — нормальная фундаментальная система решений однородных уравнений

$$\frac{dy_j}{dt} = c_{j1}y_1 + \cdots + c_{je}y_e \qquad (j = 1, \ldots e)$$

Для того чтобы решение вспомогательной системы с начальными условиями (1.5) было периодическим периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия

$$[x(t, \beta, \gamma, w, \mu)] = 0, \qquad [y(t, \beta, \gamma, w, \mu)] = 0$$

где обозначено $[f(t)] = f(2\pi) - f(0)$. Запишем эти условия в развернутом виде

$$2\pi w_i + [O_{1i}(t, \beta, \gamma, w, \mu)] = 0$$

$$2\pi\beta_{1i} + w_1 \frac{(2\pi)^2}{2!} + [O_{2i}(t, \beta, \gamma, w, \mu)] = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.8)$$

$$\beta_{m\,i}\, 2\pi + \beta_{m_i-1,\,i} \frac{(2\pi)^2}{2!} + \cdots + \beta_{1i} \frac{(2\pi)^{m_i-1}}{(m_i-1)!} + w_i \frac{(2\pi)^{m_i}}{m_i!} + [O_{m_i i}(t, \beta, \gamma, w, \mu)] = 0$$

$$[y_{j1}(2\pi)]\gamma_1 + [y_{j2}(2\pi)]\gamma_2 + \cdots + [y_{je}(2\pi)]\gamma_e + [O_j(t, \beta, \gamma, w, \mu)] = 0$$

$$(j = 1, \ldots, l;\ i = 1, \ldots, k)$$

Эта система должна быть разрешена в окрестности точки $\beta = \gamma = \mu = 0$ относительно w, γ и $\beta_{\nu_i i}$ $(\nu_i = 1, \ldots, m_i - 1)$. Якобиан системы относительно этих переменных в точке $\beta = \gamma = \mu = 0$ отличен от нуля и равен следующему выражению

$$(2\pi)^{\Sigma} \prod_{j=1}^{l} (\exp 2\pi\lambda_j - 1) \neq 0, \qquad \Sigma = \sum_{i=0}^{k} m_j$$

где λ_j — корни характеристического уравнения $|c_{i\sigma} - \delta_{i\sigma}\lambda| = 0$. Согласно теореме о неявных функциях из уравнений (1.8) мы найдем γ, w и $\beta_{\nu_i i}$ $(\nu_i = 1, \ldots, m_i - 1)$ как аналитические функции β_i и μ в окрестности точки $\beta = w = \gamma = \mu = 0$, которые обращаются в нуль при $\beta_i = \mu = 0$ $(\beta_i \equiv \beta_{m_i i})$.

Таким образом, первое утверждение доказано. Мы показали, что для достаточно малых по модулю начальных значений $\beta_1, \ldots, \beta_k$ последних переменных в каждой группе с номером i существует единственное периодическое решение вспомогательной системы, которое при $\mu = \beta_i = 0$ обращается в тривиальное решение.

Допустим теперь, что x^*, y^*, $\beta_1, \ldots, \beta_k$, μ, t — периодическое решение вспомогательной системы. Подставив его в систему (1.4), мы получим тождества по $t, \beta, \ldots, \beta_k, \mu$. Интегрируя последние по t в пределах от 0 до 2π, получаем формулы (1.6). Условия $W_i^*(\beta_1, \ldots, \beta_k, \mu) = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ очевидно достаточны для существования периодического решения исходной системы. Так, если существует система значений $\beta_i(\mu)$, где $\beta_i(0) = 0$ такая, что $w_i^*(\beta_1(\mu), \ldots, \beta_n(\mu), \mu) \equiv 0$, то периодическое решение вспомогательной системы, в котором положено $\beta_i = \beta_i(\mu)$, будет периодическим решением исходной системы (1.3).

Покажем, что это условие (1.7) будет необходимым для существования периодического решения исходной системы, обращающегося при $\mu = 0$ в тривиальное решение. Для этой цели разрешим последние уравнения (1.8) относительно γ_j и $\beta_{\nu_i,\, i}$ $(\nu_i = 1, \ldots, m_i - 1)$ и подставим в первые уравнения каждой из i групп. При этом получим уравнения относительно w_i, $\beta_i\mu$ вида.

$$2\pi w_i + \Phi_i(\beta_1, \ldots, \beta_k, \mu) + w_1 F_{1i}(\beta w, \mu) + \cdots + w_k F_{ki}(\beta w \mu) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k)$$

где F обращаются в нуль при $\beta = \mu = w = 0$.

При $W_i = 0$ они, очевидно, обращаются в необходимые и достаточные условия существования периодического решения исходной системы (1.3). Последние условия определяются k равенствами $\Phi_j(\beta_1, \ldots, \beta_k, \mu) = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Допустим теперь, что при какой-то системе значений $\beta_i = \beta_i(\mu)$, но таких, что $\beta_i(0) = 0$ будет

$$\Phi_i(\beta_1(\mu), \ldots, \beta_k(\mu), \mu) = 0$$

Тогда выполнены и условия $w_i^*(\beta_1(\mu), \ldots, \beta_k(\mu), \mu) = 0$, так как система уравнений

$$2\pi w_i + w_1 F_{1i}(\beta(\mu), \mu, w) + \cdots + w_k F_{ki}(\beta(\mu), \mu, w) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

в окрестности точки $w_i = \mu = 0$ имеет единственное решение, и это решение будет тривиальным решением $w_i = 0$. Отсюда вытекает необходимость условий (1.7). Теорема доказана.

2. Подсчет периодического решения вспомогательной системы осуществляется следующим образом. Полагая постоянные w_i в уравнениях (1.4) в виде рядов с неизвестными коэффициентами

$$w_i = w_i^{(1)}\mu + w_i^{(2)}, \ \mu^2 + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

ищем периодическое решение в виде

$$\begin{aligned} x_{\nu_i} &= x_{\nu_i i}^{(0)} + x_{\nu_i i}^{(1)}, \ \mu + x_{\nu_i i}^{(2)}, \ \mu^2 + \cdots \\ y_j &= y_j^{(0)} + \mu y_j^{(1)} + \mu^2 y_j^{(2)} + \cdots \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, l; \quad i = 1, \ldots, k \\ \nu_i = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

где $x_{\nu_i}{}^{i(\sigma)}$, y_j — неизвестные периодические коэффициенты периода 2π. Начальные условия для последних функций в каждой группе уравнений определяется согласно (1.5) условиями

$$x_{m_i i}^{(0)} = \beta_i, \qquad x_{m_i i}^{(\sigma)}(0) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots)$$

Начальные значения для остальных функций в каждом приближении определяются однозначно из условия существования периодического решения.

3. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, \ x_1, \ \ldots \ x_n, \ \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где X_s — аналитические функции x и μ в некоторой области и непрерывные периодические функции времени t периода 2π. Допустим, что при система имеет периодическое решение

$$x_s^{(0)} = \varphi_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

периода 2π. Будем искать периодическое решение системы (3.1), которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее решение (3.2). Так ставится задача, когда мы используем метод малого параметра для отыскания периодического решения [1,7]. Для того чтобы найти это решение, сделаем замену переменных, положив

$$Z_s = x_s - \varphi_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

При этом задача приводится к отысканию периодического решения для системы типа (1.1), которое при $\mu = 0$ обращается в тривиальное решение. Последняя система будет отличаться от системы (1.1) тем, что коэффициенты a_{ij}, вообще говоря, будут периодическими функциями периода 2π. Ясно, что она может быть при помощи линейного неособого преобразования приведена к виду системы (1.1).

Поступила 28 XI 1953

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Малкин. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, ОГИЗ, 1949, стр. 15
2. А. А. Андронов и А. Витт. К математической теории захватывания. Журнал прикл. физики, т. VII, в. 4, 1930.
3. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. О явлениях резонанса рода. Журн. тех. физики, т. II, в. 7—8, 1930.
4. Бернштейн и Иконников. К математической теории вынужденных колебаний в автоколебательных системах с двумя степенями свободы. Журн. тех. физики, т. IV, в. 1, 1934
5. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин. Теория колебаний. ОНТИ, 1937,
6. И. Г. Малкин. К теории периодических решений Пуанкаре. ПММ, т. XIII, в. 6, 1949.
7. Г. А. Мерман. Новый класс периодических решений в ограниченной задаче Хилла. Труды Ин-та теорет. астрономии, в. 1, 1952.