Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, СВОДЯЩИХСЯ К ТЕОРИИ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ

М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер

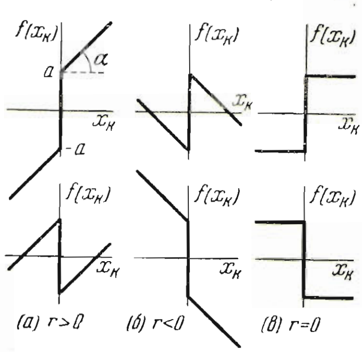
(Москва)

Рассмотрим колебательную систему, описываемую уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(p)\, x_j - M_i z = A_i \sin(\Omega t + \varphi_i)$$
$$z = f(x_k) \qquad \left(i = 1, \ldots, n,\ p = \frac{d}{dt} \right) \tag{1}$$

где x_j и z—обобщенные координаты системы, $d_{ij}(p)$ — многочлены с действительными коэффициентами, Ω, M_i, A_i и φ_i — заданные числа, а функция $f(x_k)$ соответствует одному из графиков, показанных на фиг. 1. На ней $r = \operatorname{tg} \alpha$ и a — заданные числа, k — одно из чисел $1, \ldots, n$.

Многие задачи теории колебаний сводятся к определению периодических решений системы (1), когда все $A_i = 0$ (автоколебания) или при $A_i \neq 0$ (вынужденные колебания в полосе захватывания). Частными случаями таких систем с $r < 0$ (фиг. 1, *б*) являются, например, задача об автоколебаниях маятника Фруда-Жуковского [1] и многие иные задачи с учетом сухого трения при линейной зависимости коэффициента трения от скорости (см., например, [2]), а также задача о возбуждении струны смычком. В последнем случае система вида (1) заменяется аналогичным дифференциальным уравнением в частных производных. Примером задачи с $r > 0$ (фиг. 1, *а*) служит задача о вынужденных колебаниях системы, содержащей детали, зажатые между двумя пружинами с предварительным натягом [3,4]. Наконец, при $r = 0$ (фиг. 1, *в*) к рассматриваемым уравнениям сводится теория систем релейного действия [5—8] и теория некоторых режимов в системах, содержащих кулоновское трение с коэффициентом трения, не зависящим от скорости [9].



Фиг. 1

Случаи $r = 0$ и $r \neq 0$ рассматривались до сих пор порознь. Решение задач для $r = 0$ продвинуто далеко вперед работами [5—9].

Между тем результаты, полученные при $r = 0$, носят общий характер и немедленно распространяются на системы с любым $r \neq 0$. Это непосредственно следует из того очевидного и в частных задачах использовавшегося факта, что график 1, *а* и 1, *б* получается из 1, *в* путем добавления линейной характеристики, т. е. что при любом r

$$f(x_k) = r x_k + a \operatorname{sign} x_k \tag{2}$$

где r и a — произвольные действительные числа.

Действительно, исключая из (1) все x_j, кроме x_k, получаем

$$D(p)\,x_k = K(p)\,z + \Sigma R_i(p)\,A_i \sin(\Omega t + \varphi_i) \tag{3}$$

Здесь

$$D(p) = |\,d_{ij}(p)\,|_1^n, \qquad K(p) = \sum_{i=1}^{n} M_i R_i(p)$$

$R_i(p)$ — алгебраическое дополнение элемента $D(p)$, принадлежащего k-му столбцу и i-й строке.

Используя (2), можно заменить уравнение (3) уравнением

$$D_1(p)\,x_k = K(p)\,z_1 + \sum_{i=1}^{n} R_i(p) \sin(\Omega t + \varphi_i) \tag{4}$$

где

$$D_1(p) = D(p) - rK(p), \qquad z_1 = a \operatorname{sign} x_k$$

Отыскание периодических решений системы (1) или, что то же самое, системы (3) и определение условий устойчивости найденных периодических решений сводится к такой же задаче для уравнения (4), у которого в нелинейной функции z_1 уже $r = 0$, но в отличие от (3) операторный многочлен $D(p)$ заменен на $D_1(p)$.

В работах [5,7,8] для определения симметричного периодического режима релейной системы ($r = 0$) найдены уравнение периодов и характеристическое уравнение, решающее вопрос об их устойчивости. Коэффициенты этих уравнений выражены через корни λ_k уравнения $D(p) = 0$. Из изложенного следует, что результаты работ [5,7,8] верны и для $r \neq 0$, если всюду вместо корней λ_k подставить корни λ_k^* уравнения $D(p) - rK(p) = 0$.

Задача о влиянии r на периодические режимы и их устойчивость сводится, таким образом, к задаче об определении траекторий, описываемых корнями уравнения $D(p) - rK(p) = 0$ в комплексной плоскости при изменении действительного параметра r. Возникающие вследствие этого затруднения легко обходятся, если воспользоваться результатами работы [6], где периодические режимы и условия их устойчивости определяются по функциям

$$U = \operatorname{Re} \frac{K(i\omega)}{D(i\omega)}, \qquad V = \operatorname{Im} \frac{K(i\omega)}{D(i\omega)}$$

которые могут быть определены непосредственно по заданным уравнениям движения. Заменим с этой целью U и V соответственно на

$$\frac{U^*}{U^{*2} + V^{*2}}, \qquad \frac{V^*}{U^{*2} + V^{*2}}$$

где

$$U^* = \operatorname{Re} \frac{D(i\omega)}{K(i\omega)}, \qquad V^* = \operatorname{Im} \frac{D(i\omega)}{K(i\omega)}$$

Заметим затем, что

$$\frac{D_1(i\omega)}{K(i\omega)} = \frac{D(i\omega)}{K(i\omega)} - r$$

Следовательно, для того чтобы определить периодические решения и их устойчивость при $r \neq 0$, надо действовать так же, как это предложено в [6] для $r = 0$, но годограф $D(i\omega)/K(i\omega)$ надо сместить параллельно действительной оси на $-r$. Исследование влияния r на периодические режимы сводится к повторению одних и тех же операций над годографом, последовательно смещаемым вдоль действительной оси.

В связи с тем, что функция $D(i\omega)/K(i\omega)$ может быть получена и для систем уравнений более общего вида (системы с запаздыванием, системы с распределенными параметрами и т. д.), все изложенное непосредственно распространяется и на такие системы. Обратим также внимание на то, что приведенные рассуждения сохраняют свою силу и тогда, когда годограф $D(i\omega)/K(i\omega)$ (его называют в теории регулирования амплитудно-фазовой характеристикой) находится экспериментально (см., например, [10]), а не из системы дифференциальных уравнений вида (1).

Поступила 25 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелков С. П. Маятник Фруда. Журнал технической физики, III, 1933.
2. Кононенко В. О. Автоколебания при трении, близкие к гармоническим. Сборник трудов Института строительной механики Академии наук УССР, № 19, 1954.
3. Лурье А. И. и Чекмарев А. П. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков. ПММ. I, № 3, 1937.
4. Иориш Ю. И. Защита самолетного оборудования от вибрации. Оборонгиз, 1949.
5. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
6. Цыпкин Я. З. Вынужденные колебания в релейных системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, XIII, № 5, 1952; Об устойчивости периодических режимов в релейных системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, XIV, № 5, 1954.
7. Неймарк Ю. И. О периодических режимах и устойчивости релейных систем. Автоматика и телемеханика, XIV, № 5, 1933.
8. Неймарк Ю. И. и Кубланов И. М. Исследование периодических режимов простейшей системы релейного регулирования температуры. Автоматика и телемеханика, XIV, № 5, 1953.
9. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А. Теория матриц и ее приложения. Иноиздат, 1950.
10. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования двигателей. Гостехиздат, 1952.