Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ КАЧЕСТВЕННОЙ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Н. П. Еругин
(Ленинград)

В обзоре идет речь о том, как возникали некотрые пороблемы в различных отделах теории обыкновенных уравнений, кем и в какой мере они разрешались, какая связь между ними имеется и к каким выводам эта связь приводит.

Сначала рассматриваются некоторые известные задачи из аналитической теории линейных дифференциальных уравнений.

Пусть дана система n линейных дифференциальных уравнений, записанная в матричной форме:

$$\frac{dX}{dz} = XP(z) \tag{1}$$

Здесь $P(z)$ — матрица коэффициентов, элементы которой $p_{kl}(z)$ суть однозначные аналитические функции в окрестности точки $z = a$, другими словами, матрица $P(z)$ в окрестности точки $z = a$ представима рядом Лорана

$$P(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k (z-a)^k \tag{2}$$

где P_k — постоянные матрицы n-го порядка, X — интегральная матрица n-го порядка, составленная из n линейно независимых решений, так что каждая строчка матрицы X образована решением заданной линейной системы дифференциальных уравнений.

Таким образом

$$D(X(z)) \neq 0 \qquad (D \text{ — знак определителя}) \tag{3}$$

в области регулярности коэффициентов $p_{kl}(z)$.

Интегральная матрица $X(z)$, вообще говоря, будет многозначной функцией от z в окрестности точки $z = a$. Поэтому, обозначая через z° значение z после обхода точки $z = a$, будем иметь $X^\circ(z^\circ) \neq X(z)$. Но в силу (3) имеем

$$X^\circ(z^\circ) = CX(z) \tag{4}$$

где C — постоянная матрица. Равенство (4) выражает тот факт, что одна фундаментальная система решений переходит во всякую другую фундаментальную систему при помощи линейного преобразования с постоянными коэффициентами.

Пусть матрица $X(z)$ определена начальным значением в точке $z = b$ и b° есть точка, имеющая координаты b, но расположенная на следующем верхнем листе Римана. Тогда из (4) имеем

$$C = X^\circ(b^\circ)\, X^{-1}(b) \tag{5}$$

В силу (3) матрица C определена единственным образом.

Пусть $X(b) = I$ — единичная матрица. Тогда интегральная матрица $X(z)$ называется нормированной в точке $z = b$. В этом случае $C = X^\circ(b^\circ)$ и формула

$$Y = CX \tag{6}$$

доставляет любую интегральную матрицу с начальным значением C в точке $z = b$.

---

[1] Доклад, прочитанный на научной сессии Физико-математического сектора АН КазССР 20 апреля 1954 г.

Будем далее рассматривать только нормированную в точке $z = b$ интегральную матрицу. В этом случае в равенстве (4) $C = X^\circ(b^\circ)$. Мы обозначим $X(b^\circ) = V$ и равенство (4) запишем в виде

$$X(z^\circ) = VX(z) \tag{7}$$

Это равенство показывает, что интегральная матрица $X(z)$ (нормированная в точке $z = b$) при обходе однозначной особой точки $z = a$ коэффициентов $p_{kl}(z)$ умножается слева на некоторую постоянную матрицу V, которая называется интегральной подстановкой вокруг точки $z = a$.

Введем в рассмотрение матрицы

$$2\pi i\, W = \ln V \qquad \text{или} \qquad V = e^{2\pi i\, W}$$

$$Z(z) = (z-a)^{-W} X(z) = e^{-W \ln(z-a)} X(z)$$

Имеем

$$Z(z^\circ) = e^{-W \ln(z-a) - 2\pi i\, W} VX(z) = (z-a)^{-W} e^{-2\pi i\, W} VX(z) = z - a)^{-W} X(z)$$

Отсюда видим, что матрица $Z(z)$ есть однозначная функция от z в окрестности точки $z = a$. Таким образом,

$$X(z) = (z-a)^W Z(z) \tag{8}$$

где W — постоянная матрица и $Z(z)$ представима в виде ряда Лорана в окрестности точки $z = a$

$$Z(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k (z-a)^k \tag{9}$$

Здесь z_k — постоянные матрицы. Матрица W называется по Лаппо-Данилевскому[1] показательной подстановкой.

В формуле (8) множитель $(z-a)^W$ дает полную характеристику многозначности матрицы $X(z)$ в окрестности точки $z = a$. Можно сказать, что и матрица W полностью характеризует или определяет многозначную особенность матрицы $X(z)$ в окрестности точки $z = a$. Известно, что если в формуле (2) нет отрицательных степеней $z - a$, меньших -1:

$$P(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} P_k (z-a)^k \tag{10}$$

то $z = a$ называется регулярной особой точкой системы (1). В этом случае в формуле (9) не будет отрицательных степеней $z - a$; другими словами, имеем [1]

$$X(z) = (z-a)^W \sum_{k=0}^{\infty} z_k (z-a)^k \tag{11}$$

Здесь, таким образом, множитель $(z-a)^W$ характеризует не только многозначную, но всю особенность матрицы $X(z)$ в окрестности точки $z = a$.

Предположим, что

$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{u_k}{z - a_k} \tag{12}$$

---

[1] Решение вида (11) построено Лаппо-Данилевским в случае, когда характеристические числа матрицы P_{-1} не отличаются на целые числа. Конструкция решения вида (11) в случае, когда характеристические числа матрицы (11) отличаются на целые числа, исследована Л. И. Донской; ее работа была опубликована [2] в 1952 г. Результат Л. И. Донской несколько иным методом получен в книге Ф. Р. Гантмахера [3] (1953); о работе Л. И. Донской автор, повидимому, не знал, так как ссылки на работу Л. И. Донской не сделано.

где u_k — постоянные матрицы, называемые по Лаппо-Данилевскому дифференциальными подстановками.

Тогда система (1) имеет только регулярные особые точки (включая и особую точку $z = \infty$), эта система будет системой типа Фукса.

Лаппо-Данилевский [1] построил интегральную матрицу в случае (12) в виде ряда композиций

$$X(b \mid z) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} u_{j_1} \ldots u_{j_\nu} L(b \mid a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} \mid z) \tag{13}$$

и показал, что этот ряд сходится при всех конечных значениях $u_1 \ldots u_m$. Здесь b означает, что матрица нормирована в точке $z = b$.

Матрицу $V(a_j)$ также получаем в виде целого ряда композиций

$$V(a_j) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} u_{j_1} \ldots u_{j_\nu} P_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} \mid b)$$

Лаппо-Данилевский показал также, что матрицы W_j представимы в виде

$$W_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} u_{j_1} \ldots a_{j_\nu} Q_j(u_{j_1}, \ldots, a_j \mid b) \tag{14}$$

и эти ряды композиций сходятся при достаточно малых значениях $u_1, \ldots, u_m$. Однако, как показал Лаппо-Данилевский, общее представление W_j, т. е. справедливое при всех значениях $u_1, \ldots, u_m$, имеет вид:

$$W_j = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sum\limits_{\chi=1}^{\nu} \sum\limits_{j_1 \ldots j_\chi}^{1 \ldots m} u_{j_1} \ldots u_{j_\chi} \delta_{\nu-\chi}(u_j) Q_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\chi} \mid b)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(u_j)} \tag{15}$$

Здесь $\delta_{\nu-\chi}(u_j)$ — многочлены от элементов матрицы u_j

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(u_j)$$

целый ряд от элементов матрицы u_j и ряд, стоящий в числителе формулы (15), сходится при всех конечных значениях матриц $u_1 \ldots u_m$. Отсюда видим, что W_j есть мероморфная функция от матриц $u_1 \ldots u_m$, т. е. элементы матрицы W_j суть отношения целых рядов от элементов матриц $u_1 \ldots u_m$. Этим Лаппо-Данилевский разрешил проблему Пуанкаре о выделении многозначного множителя матрицы $X(z)$.

Он здесь, кроме того, дал генеральное представлнеие W_j в виде ряда композиций и дал полную аналитическую характеристику W_j как функций $u_1 \ldots u_m$.

Пусть теперь

$$P(z) = \sum_{k=-s}^{\infty} T_k z^k \qquad (s > 1) \tag{16}$$

где T_k — постоянные матрицы. Здесь точка $z = 0$ есть иррегулярная особая точка системы (1). В этом случае Лаппо-Данилевский интегральную матрицу $X(z)$ построил в виде

$$X(b \mid z) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1 + \cdots + p_\mu + \mu} x^{p_{\mu+1} + \cdots + p_\nu + \nu - \mu} \times$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{\mu} \alpha^{*(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\chi=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\chi)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\chi x \tag{17}$$

и показал, что этот ряд сходится при всех конечных значениях матриц $T_{-s},\dots, T_0$, $T_1,\dots$ (при которых ряд (16) сходится).

Здесь $\alpha^{*(k)}_{p_1\dots p_\mu}$ и $\alpha^{(\chi)}_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}$ — рациональные числа, определяемые рекуррентными формулами Лаппо-Данилевского. Интегральную подстановку в этом случае Лаппо-Данилевский получил в виде ряда

$$V(b) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1\dots p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\dots T_{p_\nu} b^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \times \tag{18}$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \alpha^{*(\lambda)}_{p_1\dots p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\chi=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\chi)}_{p_{\mu+1}\dots p_\nu} \lg^\chi b$$

также сходящегося при всех конечных значениях матриц $T_s, \dots, T_0, T_1, \dots$.

Показательная подстановка Лаппо-Данилевским найдена[1] в виде ряда

$$W(b) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1\dots p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\dots T_{p_\nu} Q_{p_1\dots p_\nu}(b) \tag{19}$$

сходящегося при условии, что

$$\sum_{p=-s}^{\infty} |T_p| \tag{20}$$

есть величина достаточно малая. Этим Лаппо-Данилевский разрешил проблему Пуанкаре о представлении W как функции $T_{-s}, \dots, T_0, T_1, \dots$ в случае иррегулярной особой точки $z=0$ при указанном предположении относительно ряда (20).

В работах автора получено генеральное представление показательной подстановки W и доказано, что W есть бесконечно значная функция от матриц $T_{-s}, \dots \dots, T_0, T_1, \dots$ Здесь, таким образом, полностью решена проблема Пуанкаре о явном представлении W через $T_{-s}, \dots, T_0, T_1, \dots$ и дана аналитическая характеристика W как функции матриц $T_{-s}\dots T_0, T_1\dots$. Строго говоря, в работах Пуанкаре дано некоторое общее представление решений и группы монодромии линейного дифференциального уравнения при помощи известного теперь общего метода, основанного на разложении решений линейных уравнений в ряд по параметрам, входящим в правые части уравнений. В этих же работах был поставлен вопрос об исследовании функциональной зависимости характеристических чисел логарифма матриц группы монодромии от параметров линейного дифференциального уравнения. Точная формулировка проблемы о выделении из интегральной матрицы системы линейных дифференциальных уравнений многозначного множителя, а также множителя, характеризующего существенную особенность, была дана в работах Лаппо-Данилевского. Здесь именно точно формулирована и задача о генеральном представлении и аналитической характеристике функциональной зависимости W от параметров заданной линейной системы дифференциальных уравнений. Эти проблемы Лаппо-Данилевский назвал проблемами Пуанкаре.

Естественно поэтому эту проблему о построении явного выражения для W и исследовании W как функции дифференциальных подстановок [$U_1, \dots, U_m$ в случае (12) или $T_{-s}, \dots, T_0, T_1, \dots$ в случае (16)] называть проблемой Пуанкаре — Лаппо-Данилевского.

---

[1] В работе [4] показано, что W можно получить в виде

$$W = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1\dots p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\dots T_{p_\nu} b^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1\dots p_\mu} \alpha^{(1)}_{p_{\mu+1}\dots p}.$$

В случае, когда матрицы T второго порядка, в работе автора [4] получено генеральное представление W в виде

$$\mathrm{W} = \frac{\ln\left[t + \sqrt{t^2 - 1}\,\right]}{2\pi i \sqrt{t^2 - 1}}\left[\mathrm{V}e^{-\pi i\sigma(\mathrm{T}_{-1})} - t\right] + \frac{\sigma(\mathrm{T}_{-1})}{2} \tag{21}$$

где $\sigma(T_{-1})$ — след матрицы T_{-1}.

$$t = \frac{\sigma(\mathrm{V})}{2}\, e^{-\pi i \sigma(\mathrm{T}_{-1})} \tag{22}$$

а V дано, например, формулой (18). Для случая n уравнений общее представление W получено в работе [5].

Для дальнейшего заметим, что, как показал Лаппо-Данилевский, существует такая интегральная матрица системы (16), показательная подстановка которой имеет вид:

$$\mathrm{H} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} \mathrm{T}_{p_1} \ldots \mathrm{T}_{p_\nu}\, \delta^{(0)}_{p_1 + \cdots + p_\nu + \nu}\, \alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu} \tag{23}$$

где $\delta^{(0)}_p$ — символ Кронекера и ряд (23) сходится при достаточно малых $\mathrm{T}_{-s}, \ldots, \mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \ldots$.

Если имеем систему

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{X} \sum_{k=-s}^{e} \mathrm{T}_k z^k \tag{24}$$

т. е. только конечное число матриц T_k отличных от нуля, то вместо прежних формул для $\mathrm{V}(b)$, W и H имеем

$$\mathrm{V}(b) = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{e} \mathrm{T}_{p_1} \ldots \mathrm{T}_{p_\nu}\, b^{p_1 + \cdots + p_\nu + \nu} \times \tag{25}$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \alpha^{*(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\chi=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\chi)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\chi b$$

$$\mathrm{W} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{e} \mathrm{T}_{p_1} \ldots \mathrm{T}_{p_\nu}\, b^{\,p_1 + \cdots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \ldots p_\mu}\, \alpha^{(1)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \tag{26}$$

$$\mathrm{H} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{e} \mathrm{T}_{p_1} \ldots \mathrm{T}_{p_\nu}\, \delta^{(0)}_{p_1 + \cdots + p_\nu + \nu}\, \alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu} \tag{27}$$

Здесь можно положить $b = 1$. Тогда, например, формула (25) принимает вид:

$$\mathrm{V}(1) = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{e} \mathrm{T}_{p_1} \ldots \mathrm{T}_{p_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \ldots \mu}\, \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \tag{28}$$

Рассмотрим теперь систему n линейных уравнений в матричном виде

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{XP}(t) \qquad \mathrm{P}(t + 2\pi) = \mathrm{P}(t) \tag{29}$$

предполагая матрицу коэффициентов $\mathrm{P}(t)$, как указано, периодической; в силу этого матрица $\mathrm{X}(t + 2\pi)$ есть также решение уравнения (29); но, вообще говоря,

$$\mathrm{X}(t+2\pi) \neq \mathrm{X}(t).$$

Однако по свойству фундаментальной системы решений линейной системы

$$X(t+2\pi)=VX(t) \tag{30}$$

где V — постоянная матрица. Если $X(0)=I$, т. е. интегральная матрица нормирована в точке $t=0$, то

$$V=X(2\pi) \tag{31}$$

Известно, что при всех значениях t имеем

$$X(t)=I+\sum_{k=1}^{\infty}X_k(t) \qquad \left(X_k(t)=\int_0^t X_{k-1}(t)\,P(t)\,dt, \quad X_0=I\right) \tag{32}$$

Ряд (32) сходится равномерно во всяком конечном интервале изменения t. Следовательно,

$$V=I+\sum_{k=1}^{\infty}X_k(2\pi) \tag{33}$$

Таким образом, интегральная матрица $X(t)$ при увеличении t на период матрицы $P(t)$ умножается слева на постоянную матрицу V.

Введем в рассмотрение матрицы

$$Z(t)=e^{-At}X(t), \qquad V=e^{2\pi A} \tag{34}$$

Имеем

$$Z(t+2\pi)=e^{-At}e^{-2\pi A}\,VX(t)=e^{-At}X(t)=Z(t) \tag{35}$$

Таким образом, матрица $Z(t)$ оказывается периодической с периодом 2π, $X(t)$ имеет вид:

$$X(t)=e^{At}Z(t) \tag{36}$$

Формула (36), как известно, вообще выражает собой свойство приведенных систем [6]. Это порождает задачу дать способ нахождения решений системы (29) в виде (36). Надо дать способ нахождения матриц A и $Z(t)$.

В нашей работе [6] дан способ вычисления матриц A и $Z(t)$. Он состоит в следующем. Записываем систему (29) в виде

$$\frac{dX}{dt}=XP\lambda \qquad (\lambda \text{ — численный параметр}) \tag{37}$$

Матрицу V для этой системы имеем в виде

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(2\pi)\,\lambda^k \tag{38}$$

где $X_k(t)$ определены формулами (32). Ряд (38) сходится при всех конечных значениях λ; следовательно, сходится и при $\lambda=1$, когда система (37) переходит в систему (29).

На основании этого доказано, что имеем разложения

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\lambda^k \qquad Z(t)=I+\sum_{k=1}^{\infty}Z_k(t)\,\lambda^k \tag{39}$$

сходящиеся при достаточно малых λ.

Чтобы найти A_k и Z_k, ищем решение системы (37) в виде (36). Подставляя выражение (36) в (37), получим

$$\frac{dZ}{dt}=ZP\lambda-AZ \tag{40}$$

Подставляя сюда выражения (39) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем уравнения

$$\frac{dZ_k}{dt} = Z_{k-1}P - A_k - \sum_{e=1}^{k-1} A_e Z_{k-e}, \qquad \frac{dZ_1}{dt} = P - A_1 \tag{41}$$

Отсюда шаг за шагом находим A_k и $Z_k(t)$, подчиняя $Z_k(t)$ условию периодичности. Так, например, из второго уравнения (41) находим

$$A_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\,dt, \qquad Z_1 = \int_0^t [P(t) - A_1]\,dt \tag{42}$$

Так же найдем и остальные Z_k, A_k.

Найденные таким образом ряды (39), вообще говоря, сходятся не при всех λ и не всегда при $\lambda = 1$, что желательно, чтобы получить матрицы A и Z (t) для системы (29).

Обращаем, однако, внимание на следующее обстоятельство. Очевидно, характеристические числа матрицы A дают полную качественную характеристику решений системы (29). Для нахождения же характеристических чисел матрицы A мы всегда можем воспользоваться найденным для нее рядом (39), так как в нашей работе [6] доказано, что инварианты матрицы A (39) (т. е. коэффициенты характеристического уравнения) всегда суть целые функции от λ, т. е. сходящиеся при всех λ. В частности, определители Гурвица матрицы A (39) будут сходиться при всех λ и, следовательно, при $\lambda = 1$, когда получаем матрицу A для системы (29).

Приравнивая, например, нулю определитель матрицы A (39) при $\lambda = 1$, мы получим условие, при выполнении которого, очевидно, система (29) будет иметь периодическое с периодом 2π решение. Это уравнение доставляет связь между параметрами, входящими в матрицу P (t), при которой система (29) имеет периодическое с периодом 2π решение.

Заметим, что вопросы качественной характеристики на основе матрицы A и вопросы существования периодических решений требуют здесь многих дополнительных замечаний, которые мы за неимением времени делать не будем. Это будет отмечено в подробной работе, подготовленной к печати.

Этот метод изучения системы (29) можно применять весьма разнообразным образом, записывая систему (29) в виде

$$\frac{dX}{dt} = X\,[P_0(t) + \lambda P_1(t)] \tag{43}$$

так, чтобы при $\lambda = 0$ получалась система, интегрируемая в конечном виде, а при $\lambda = 1$ система (29).

Мы снова имеем возможность представить матрицу A в виде

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k \tag{44}$$

и инварианты матричного ряда (44) будут целыми функциями параметра λ. К этому следует, однако, также сделать многие дополнения, которых мы касаться не будем.

Мы поставим теперь вопрос о том, как можно получить генеральное представление для матрицы A и установим связь между этими задачами качественной теории линейных систем с периодическими коэффициентами и изложенной выше задачей Пуанкаре — Лаппо-Данилевского. С этой целью рассмотрим систему вида

$$\frac{dX}{dt} = X\left[b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k \cos kt + a_k \sin kt\right] \tag{45}$$

где b_k и a_k — постоянные матрицы n-го порядка. Решение системы (45) имеем в виде

$$X = e^{At} N(t) \tag{46}$$

где A — постоянная матрица и $N(t)$ — периодическая с периодом 2π.

Вопрос состоит в том, чтобы построить аналитическое выражение матриц A и $N(t)$ при всех значениях матриц b_k и a_k. Заметим прежде всего, что если обозначим через $u_1 \dots u_{2m+1}$ матрицы $b_0, b_1 \dots b_m, a_1 \dots a_m$, то интегральную матрицу $X(t)$ системы (45) легко получить в виде

$$X(t) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots 2m+1} u_{j_1} \dots u_{j_\nu} M_{j_1 \dots j_\nu}(t) \tag{47}$$

и этот ряд будет сходиться при всех конечных значениях матриц $u_1, \dots, u_{2m+1}$. Здесь

$$\sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots 2m+1} u_{j_1} \dots u_{j_\nu} M_{j_1 \dots j_\nu}(t) = X_\nu(t) \tag{48}$$

где $X_\nu(t)$ определены равенствами (32). Следовательно, имеем

$$V = X(2\pi) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots 2m+1} u_{j_1} \dots u_{j_\nu} M_{j_1 \dots j_\nu}(2\pi) \tag{49}$$

Заменяя в системе (45)

$$\sin kt = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}, \qquad \cos kt = \frac{z^k + z^{-k}}{2}, \qquad z = e^{it} \tag{50}$$

получим

$$T_k = -i \frac{(b_{k+1} - ia_{k+1})}{2} \qquad (k \geqslant 0) \tag{51}$$

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=-m-1}^{m-1} T_k z^k, \qquad T_k = -i \frac{(b_{-k-1} + ia_{-k-1})}{2} \qquad (k < -1)$$

$$T_1 = -ib_0$$

Таким образом, система (45) преобразуется в систему (51), совпадающую с системой (24), для которой V (1) W (1), и H (1) имеем в виде (25), (26) и (27), а общее представление матрицы W (1) дано, например, в случае матриц второго порядка в виде (21). Запишем интегральную матрицу $X(z)$ системы (24) в виде

$$X(z) = z^W N(z) \tag{52}$$

согласно (8). Подставляя сюда $z = e^{it}$, получим

$$X(e^{it}) = e^{iWt} N(e^{it}) \tag{53}$$

Так как функция $N(z)$ однозначная в окрестности точки $z = 0$, то функция $N(e^{it})$ является периодической с периодом 2π. Следовательно, (53) доставляет нам решение системы (45) в виде (36), причем $A = iW$. Так как для W мы имеем представление при всех конечных значениях матриц T_k, то и для A получаем общее представление для всех конечных значений матриц a_k и b_k. Тем самым мы имеем и для $Z(t)$ общее представление, так как

$$N(e^{it}) = Z(t) = e^{-At} X(t) \tag{54}$$

Как уже было отмечено выше, инварианты матрицы A суть целые функции от элементов матриц b_0, b_k и a_k, откуда видим, что инварианты матрицы W также являются целыми функциями от элементов матриц T_k. Но инварианты матрицы W совпадают с инвариантами матрицы H, так как инварианты матриц W и H, как известно, подобны [1].

Это позволяет решать качественные вопросы линейных систем при помощи матрицы H, данной равенством (27), где $\alpha^{(1)}_{p_1 \dots p_\nu}$,— рациональные числа, определяемые формулами Лаппо-Данилевского. Так, например, уравнение D (H) =0 определяет связь между параметрами системы, при которой система имеет периодическое решение. Определяя из этого уравнения приближенные значения этих параметров и подставляя их в полученное выше общее представление A и N (t), получим решение системы [например, (45)] в виде (46), близкое к периодическому.

Рассмотрим в качестве примера уравнение Матье

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a - 2q \cos 2t)\, y = 0$$

эквивалентное системе, записанной в матричной форме:

$$\frac{dX}{d\tau} = X \left[\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{Vmatrix} \cos \tau \right], \qquad \tau = 2t$$

Эта система преобразуется в систему вида (51)

$$\frac{dX}{d\tau} = X \left[T_{-2}\, z^{-2} + T_{-1}\, z^{-1} + T_0\right]$$

где

$$T_{-2} = -\frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_{-1} = -\frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_0 = -\frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{Vmatrix}$$

Оставляя в формуле (27) слагаемые при $\nu \leqslant 7$, получим

$$D(A) \doteq -D(H) \doteq -\frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} aq^2 + \frac{25}{128} q^4 + \frac{1}{2} a^2 q^4\right)$$

Из уравнения D (H) = 0 найдем

$$a_1 = -\frac{1}{2} q^2 + \frac{7}{128} q^4 + 0\,(q^4), \qquad a_2 = -\frac{2+q^2}{q^4} + \frac{1}{2} q^2 - \frac{7}{128} q^4 + o\,(q^4)$$

где $o(q^4)$ означает малую порядка выше q^4 при $q \to 0$. При таких значениях a уравнение Матье имеет периодические решения. Подставляя

$$a = -\frac{1}{2} q^2 + \frac{7}{128} q^4 \qquad \text{или} \qquad a = -\frac{2+q^2}{q^4} + \frac{1}{2} q^2 - \frac{7}{128} q^4$$

в общее представление A и N (t), получим решение вида $X = e^{At} N(t)$, доставляющее решение, близкое к периодическому.

Здесь, как видим, $a_1 \to 0$, $aa_2 \to -\infty$ при $q \to 0$.

В работе Б. П. Демидовича [9] рассматривалась система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_\omega}{dt} = X_\omega\, P_\omega\,(t) \tag{55}$$

---

[1] Так как всякая интегральная матрица Y (t) получается из интегральной матрицы X (t) по формуле $Y = CX$, где C — постоянная матрица.

где $P_\omega(t)$ — непрерывная периодическая матрица с периодом ω и существует

$$\lim \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega P_\omega(t)\,dt = M \qquad \text{при } \omega \to +0 \tag{56}$$

Здесь доказана следующая теорема: Если существует M, то характеристические показатели системы (55) $\lambda = \lambda(\omega)$ при надлежащем выборе мнимой части $\lambda(\omega)$ стремятся к характеристическим числам λ_0 матрицы M.

Отсюда автор делает вывод о том, что если вещественные части характеристических чисел λ_0 отрицательны, то при достаточно малых ω нулевое решение системы (55) асимптотически устойчиво, а если числа λ_0 чисто мнимые, то об устойчивости ничего сказать нельзя. По поводу этого можно сказать следующее. Предполагая ради простоты рассуждения $P_\omega(t)$ представимой рядом Фурье

$$P_\omega(t) = C_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\omega) \cos\frac{2\pi t}{\omega} k + B_k(\omega) \sin\frac{2\pi t}{\omega} k$$

мы из условия (56) выводим, что $C_0(\omega) \to M$ при $\omega \to 0$ (можно отбросить знак плюс перед нулем). Заменяя в системе (55) $2\pi t = \tau\omega$, получим

$$\frac{dX}{d\tau} = XP\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)\frac{\omega}{2\pi},$$

$$P\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) = C_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\omega)\cos\tau k + B_k(\omega)\,\tau k \tag{57}$$

Здесь имеем матрицу $X = e^{A\tau} z(\tau)$ в виде (36), где A согласно (39) и (41):

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k$$

$$A_1 = C_0(\omega), \quad z_1(\tau) = \int\limits_0^\tau \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega)\cos\tau k + B_k(\omega)\text{in}\,\tau k\right] d\tau \tag{58}$$

Мы также последовательно найдем $A_2(\omega)$, $A_3(\omega)$.

Возвращаясь к независимой переменной t, получим

$$X = e^{Bt} N(t), \; B = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{k-1} = C_0(\omega) + A_2(\omega)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) + \ldots$$

Отсюда очевидны результативные утверждения Б. П. Демидовича, а кроме того, получаем следующее. Если матрица M имеет характеристические числа с вещественной частью, равной нулю, но вещественные части характеристических чисел матрицы $C_0(\omega) + A_2(\omega)\,\omega/2\pi$ при всех достаточно малых ω отрицательны, то нулевое решение системы (55) при достаточно малых ω асимптотически устойчиво[10].

Можно привлекать к рассмотрению и следующие приближения матрицы B. Следует заметить еще, что указанная теорема Б. П. Демидовича есть частный случай теоремы Н. Н. Боголюбова, так как после записи системы (55) в виде (57) мы получаем линейную систему, являющуюся частным случаем общего вида нелинейной системы, рассмотренной Н. Н. Боголюбовым[8].

Основная теорема [11] К. П. Персидского о правильных системах вскрывает одно из важнейших свойств правильных систем, состоящее в том, что характеристичные числа правильных систем являются предельными значениями характеристических чисел некоторой последовательности систем с периодическими коэффициентами.

Это позволяет надеяться на возможность использования изложенных здесь методов и при изучении правильных систем.

В заключение надо сказать, что на связь между рассматриваемыми здесь задачами аналитической и качественной теорий линейных систем обыкновенных уравнений обратил внимание А. М. Ляпунов в своей докторской диссертации. Именно, он указал один класс систем $2n$ линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \qquad P(t+\omega) = P(t)$$

которые преобразуются к двум системам n-го порядка, имеющим точку $z = 0$ регулярной особой точкой, вследствие чего вопрос о разыскании характеристических показателей этой системы делается чисто алгебраическим вопросом. Этот класс, однако, является таким, что в случае системы двух уравнений будет частным случаем системы, в которой

$$P(t)\int_0^t P(t)\,dt = \int_0^t P(t)\,dt\,P(t)$$

В этом случае имеем

$$X = \exp\int_0^t P(t)\,dt$$

и, следовательно, вопрос о характеристических показателях делается сразу элементарным.

Во времена Ляпунова, до работ Лаппо-Данилевского, проблема Пуанкаре была далека от разрешения. Теперь общий замысел А. М. Ляпунова о приведении указанной здесь задачи качественной теории системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами к проблеме аналитической теории стал более плодотворным. Как уже было указано выше, теорема К. П. Персидского связывает все это и с правильными системами, введенными в теорию дифференциальных уравнений А. М. Ляпуновым.

Поступила 13 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Lappo-Danilevsky J. A. Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, vol. I. Труды Физико-математического института им. В. А. Стеклова, 1934.
2. Донская Л. И. Построение решения линейной системы в окрестности регулярной особой точки в особых случаях. Вестник Ленинградского университета, № 6, серия матем., физики и химии, 1952.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИТТЛ. М., 1953.
4. Erougine N. Sur la subsitution exposante pour quelques systèmes irrégulières. Матем. сб., т. 42, 6, 1935.
5. Еругин Н. П. О показательной подстановке системы линейных дифференциальных уравнений (проблема Пуанкаре). Матем. сб., т. 3 (45), в 3, 1938.
6. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. XIII,1946.
7. Poincaré H. Sur les groupes des équations linéaires. Acta Math., t. 4, 1884.
8. Боголюбов Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. Академии наук УССР, 1945.
9. Демидович Б. П. О некоторых свойствах характеристических показателей системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Ученые записки Московского университета, т. VI, вып. 163, 1952.
10. Штокало И. З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Матем. сб., т. 19, № 2, 1946.
11. Персидский К. П. О характеристических числах дифференциальных уравнений. Изв. АН Казахской ССР, серия мат. и мех., вып. 1,1947.