Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА, ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ В ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В. И. Зубов
(Ленинград)

В 1953 г., Н. П. Еругин [1] поставил ряд узловых вопросов, связанных с методами Ляпунова об установлении устойчивости движения и о представлении общего решения в области асимптотической устойчивости.

В настоящей работе, предпринятой под влиянием этого доклада, решаются многие вопросы, поставленные в нем.

В первом разделе показано, что функция Ляпунова, удовлетворяющая некоторому специальному уравнению в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)(1 + v)$$

существует во всей области асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и изучен ряд ее свойств, опираясь на которые, удалось дать уравнение границы области асимптотической устойчивости и необходимое и достаточное условие устойчивости в целом.

Изложение всей теории ведется сначала для случая голоморфных правых частей и отрицательных вещественных частей всех корней определяющего уравнения. Затем в § 7 удалось перенести развитую теорию на общий случай систем дифференциальных уравнений. В § 8, пользуясь свойствами функции Ляпунова, дается общий вид систем, имеющих наперед заданную область асимптотической устойчивости невозмущенного движения.

Во втором разделе дается представление общего решения в области асимптотической устойчивости в виде рядов, сходящихся или на всей оси $(-\infty, +\infty)$, или на полуоси $(0, +\infty)$ либо $(-\infty, 0)$. При этом не требуется, чтобы все корни определяющего уравнения имели отрицательные действительные части. Там же дан ряд методов для отыскания области, целиком погруженной в область асимптотической устойчивости, и нахождения предельного цикла.

Ряд работ советских математиков был посвящен решению проблемы существования функции Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость невозмущенного движения в целом. Е. А Барбашин и Н. Н. Красовский [2] в предположении продолжимости решения на $(-\infty, 0)$ решили эту проблему. В настоящей работе их теорема получается как частный случай.

Е. А. Барбашин [3], предполагая, что правые части системы дифференциальных уравнений принадлежат классу c^r $(r \geqslant 1)$ и удовлетворяют еще условиям, обеспечивающим продолжимость всех траекторий на всем протяжении времени $-\infty < t < +\infty$, решил в положительном смысле вопрос о существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости нулевого решения.

В настоящей работе, в § 7, этот вопрос решен для случая, когда правые части удовлетворяют лишь условиям, гарантирующим существование единственного решения

$$x_i = x_i(t,\ x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ), \qquad x_i(t_0) = x_i^\circ \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

без требования продолжимости любого решения на все значения t от $-\infty$ до $+\infty$.

Однако функция Ляпунова в этом случае имеет лишь непрерывную производную по t, а частные производные по переменным x_i, вообще говоря, не будут непрерывными. Заметим, что в статье Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [4], вышедшей в свет после того, как настоящая работа была послана в печать, решен вопрос о существовании функции Ляпунова в целом в предположении, что правые части системы дифференциальных уравнений принадлежат классу c^1.

Отметим, что общее решение системы дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями при некоторых дополнительных предположениях было сделано А. Пуанкаре [5]. Однако оно не является эффективным[1]. Данная работа была проделана под руководством Н. П. Еругина. Его теорема 5 о том, что граница области асимптотической устойчивости невозмущенного движения состоит из целых траекторий, является центральным местом при рассмотрении основных свойств функции Ляпунова. Отметим еще, что в § 2—6 развиты методы для решения общей задачи (§ 7). Эти методы применяются в этих параграфах к классической, исследованной еще Ляпуновым системе дифференциальных уравнений и поэтому могут быть легко восприняты читателем.

1. Существование функции Ляпунова во всей области асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы дифференциальных уравнений

§ 1. Постановка вопроса. Пусть задана система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (f_i(0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что невозмущенное движение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво.

Говорят, что точка $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ принадлежит области асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x_1 = \cdots = x_n = 0$, если интегральная кривая $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, проходящая в момент $t = 0$ через точку $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, обладает свойством

$$x_1^2 + \cdots + x_u^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

В том случае, когда каждая точка фазового пространства принадлежит области асимптотической устойчивости невозмущенного движения, говорят, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво в целом. Границу области асимптотической устойчивости составляют, как показал Н. П. Еругин [6], интегральные кривые системы (1.1). Если точка P лежит на граничной интегральной кривой, то в сколь угодно малой ее окрестности имеются точки, как принадлежащие области асимптотической устойчивости, так и не принадлежащие ей. Будем считать далее, что

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{m_1+\cdots+m_n \geqslant 2}^{\infty} P_i^{(m_1, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_n^{m_n} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где a_{ik}, $P_i^{(m_1, \ldots, m_n)}$ — постоянные вещественные числа.

[1] Общее решение в аналогичной форме было использовано также К. П. Персидским [8].

Эти ряды будем считать сходящимися всюду.

Предположим, что корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения

$$|A - \lambda E| = 0, \qquad \{A\}_{ik} = a_{ik}$$

имеют отрицательные вещественные части.

Задача, которую мы решаем, заключается в следующем

1. Найти уравнения границы области асимптотической устойчивости невозмущенного движения.

2. Дать необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости в целом.

Решим эту задачу для системы двух уравнений, аналогично она решается и для системы n уравнений.

§ 2. Об одном уравнении в частных производных. Рассмотрим систему (1.1) для $n = 2$

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \tag{2.1}$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ — ряды, удовлетворяющие предположениям § 1.

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial v}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} f_2(x, y) = \varphi(x, y)\,[1 + f_1^2 + f_2^2]\,[1 + v(x, y)] \tag{2.2}$$

где $\varphi(x, y)$ — определенно-положительная квадратичная форма; впрочем, $\varphi(x, y)$ можно предполагать определенно-положительной формой степени $2m$, $m \geqslant 1$. При таком выборе $\varphi(x, y)$ функция $v(x, y)$ может быть получена единственным образом под видом сходящегося ряда, обращающегося в 0 при $x = y = 0$. Это следует из теоремы Ляпунова [7].

Будем искать $v(x, y)$ в виде ряда

$$v(x, y) = v_2(x, y) + v_3(x, y) + \cdots \tag{2.3}$$

где $v_m(x, y)$ — однородная форма степени m относительно x, y.

Подставляя (2.3) в (2.2), получим для определения $v_m(x, y)$ систему уравнений

$$(m = 3, 4, \ldots$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_2}{\partial x} f_{11}(x, y) + \frac{\partial v_2}{\partial y} f_{21}(x, y) = \varphi_2(x, y), \qquad f_{11}(x, y) = a_{11}x + a_{12}y \\ &\frac{\partial v_m}{\partial x} f_{11}(x, y) + \frac{\partial v_m}{\partial y} f_{21}(x, y) = R_m(x, y), \qquad f_{21}(x, y) = a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $R_m(x, y)$ является известной формой степени m, если найдены уже $v_2(x, y)$, $v_3(x, y), \ldots, v_{m-1}(x, y)$. Из системы (2.4) найдем последовательно $v_2(x, y)$, $v_3(x, y), \ldots, v_n(x, y)$. Функция $v_2(x, y)$, как следует из теоремы Ляпунова [7], найдется под видом определенно-отрицательной квадратичной формы.

Распространим область задания функции $v(x, y)$ на всю область устойчивости невозмущенного движения $x = 0$, $y = 0$ системы (2.1).

Возьмем достаточно малые значения x_0, y_0, при которых функция $v(x, y)$ уже определена.

Построим решение $x = x(t, x_0, y_0)$, $y = y(t, x_0, y_0)$ системы (2.1) и подставим в функцию $v(x, y)$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \varphi(x, y)(1 + f_1^2 + f_1^2)[1 + v(x, y)]$$

Откуда

$$1 + v(x, y) = [1 + v(x_0, y_0)]\, e^{J(t)} \tag{2.5}$$

$$J(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(x, y)[1 + f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)]\, dt \tag{2.6}$$

Преобразуем $J(t)$ в криволинейный интеграл:

$$J(t) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\varphi(x, y)[1 + f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)](x\,dx + y\,dy)}{xf_1(x, y) + yf_2(x, y)} \tag{2.7}$$

Если окажется $xf_1(x, y) + yf_2(x, y) = 0$ в некоторой точке $x = a$, $y = b$, принадлежащей области устойчивости, то обязательно

$$yf_1(x, y) - xf_2(x, y) \neq 0$$

в точке (a, b), так как в противном случае точка (a, b) была бы точкой покоя. В окрестности такой точки (a, b) можно принять для (2.6)

$$dt = \frac{y\,dx - x\,dy}{yf_1(x, y) - xf_2(x, y)} \tag{2.8}$$

Тогда в (2.5)

$$J(t) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\varphi(x, y)[1 + f_1^2 + f_2^2](y\,dx - x\,dy)}{yf_1(x, y) - xf_2(x, y)}$$

Здесь криволинейный интеграл берется по пути, представляющему собой интегральную кривую, проходящую в момент $t = t_0$ через точку (x_0, y_0), а в момент t через точку (x, y).

Таким образом, в любой точке (x, y), принадлежащей области асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (2.1), функция $v(x, y)$ определена.

§ 3. Свойства функции $v(x, y)$. Из приведенного рассуждения вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Функция $v(x, y)$ является функцией Ляпунова, устанавливающей асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = y = 0$ системы (2.1). Причем эта функция распространена на всю область асимптотической устойчивости.

Введем далее вдоль каждой интегральной кривой системы (2.1) свою независимую переменную

$$s = \int_{t_0}^{t} [1 + f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)]\, dt$$

Тогда система (2.1) примет вид:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{f_1(x, y)}{1 + f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{f_2(x, y)}{1 + f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)}. \tag{3.1}$$

Правые части системы (3.1) при любых (x, y) ограничены. Откуда следует, что интегральная кривая $x = x(s)$, $y = y(s)$ системы (3.1) продолжима на всю ось s $(-\infty, +\infty)$. Заметим, что

$$\frac{dv}{ds} = \varphi(x, y)[1 + v(x, y)]$$

Отсюда

$$1 + v(x, y) = [1 + v(x_0, y_0)] e^{\mathit{\Phi}(s)}, \qquad \mathit{\Phi}(s) = \int_0^s \varphi(x, y)\, ds \tag{3.2}$$

где (x_0, y_0) — та точка, через которую проходит интегральная кривая системы (3.1) в момент $s = 0$.

Обозначим через A область асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = y = 0$. Определим теперь множество значений функции $1 + v(x, y)$, принимаемых ею при $(x, y) \in A$.

Теорема 2. При $(x, y) \in A$ справедливо

$$0 < 1 + v(x, y) \leqslant 1$$

Доказательство. Как было показано в § 2, при достаточно малых значениях (x, y) функция $1 + v(x, y)$ может быть представлена сходящимся рядом

$$1 + v(x, y) = 1 + v_2(x, y) + v_3(x, y) + \cdots$$

где $v_m(x, y)$ — однородная форма m-й степени относительно x, y и $v_2(x, y)$ — определенно-отрицательная квадратичная форма. Отсюда следует, что функция $1 + v(x, y)$ имеет максимум в точке $(0, 0)$, равный единице.

По $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < 1)$ можно найти $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только $x_0^2 + y_0^2 < \delta^2$, так сейчас же $1 + v(x_0, y_0) < 1 - \varepsilon$.

Для этих значений x_0, y_0 имеем (3.2). Откуда следует, что вдоль интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0) при $s = 0$, функция $1 + v(x, y)$ при $s \in (0, -\infty)$ остается меньше $1 + v(x_0, y_0)$, т. е. меньше единицы, и в то же время в нуль не обращается, так как

$$1 + v(x_0, y_0) > 1 - \varepsilon > 0$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим связную компоненту множества точек, содержащую точку $(0, 0)$, определенную условием $\lambda < 1 + v(x, y) \leqslant 1$, где $\lambda \in (0, 1)$, и обозначим эту компоненту через $G(\lambda_0)$. Как непосредственно следует из теоремы Н. П. Еругина [6], при значении λ_0, достаточно близком к единице, $G(\lambda_0)$ является областью, ограниченной замкнутой кривой

$$1 + v(x, y) = \lambda_0 \tag{3.3}$$

Такие значения λ_0 и будем рассматривать ниже. Затем можно будет показать, что $G(\lambda)$ является ограниченной областью при всех $\lambda \in (0, 1)$.

Выше функция $1 + v(x, y)$ была определена всюду внутри области A. Определим теперь предельное значение функции $1 + v(x, y)$ на границе области A. Пусть точка $M(\xi, \eta)$ принадлежит границе области A.

Теорема 3. Предельное значение функции $1+v(x, y)$ при $(x, y) \to (\xi, \eta)$ изнутри области A равно нулю, какова бы ни была точка (ξ, η), принадлежащая границе области A.

Доказательство. Как следует из теоремы Н. П. Еругина [6] о структуре области A, всегда можно найти отличное от нуля расстояние от точки $(0, 0)$ до границы области A. Обозначим его через ρ.

Далее выберем значение λ_0, настолько близкое к единице, чтобы область $G(\lambda_0)$ целиком содержалась в круге $x^2+y^2=\rho^2$. Выберем теперь произвольную последовательность точек $b_1, b_2, b_3, \ldots$, принадлежащих области $A-G(\lambda_0)$, и $b_i \to M(\xi, \eta)$ при $i \to +\infty$. Теорема будет доказана, если покажем, что для любой такой последовательности $\{b_i\}$ соответствующая последовательность $\{1+v(b_i)\}$ сходится к нулю при $i \to +\infty$.

Интегральная кривая, проходящая через точку b_i в момент $s=0$, при возрастании s пересечет кривую $1+v(x, y)=\lambda_0$ в точке a_i в момент $s(b_i)$. Заметим, что при $s > s(b_i)$ интегральная кривая остается в области $G(\lambda_0)$. Покажем, что последовательность положительных чисел $s(b_i)$ не ограничена. Если предположить противное, то $s(b_i) < S < +\infty$. Пусть граничная интегральная кривая, проходящая через точку $M(\xi, \eta)$ в момент $s=0$, достигает точки $M_1(\xi_1, \eta_1)$ в момент $s=S$.

Как следует из теоремы о непрерывности решения системы (3.1) по начальным данным, по числу S и $^1/_4\,\rho$ найдется $\varepsilon>0$, что как только $r(M, M^\circ)<\varepsilon$, так сейчас же $r(M_1, M_1{}^\circ)< {}^1/_4\,\rho$, где точки $M^\circ, M_1{}^\circ$ лежат на интегральной кривой, проходящей через точку M° в момент $s=0$ и через точку $M_1{}^\circ$ в момент $s=S$. По найденному значению $\varepsilon>0$ можно найти $N(\varepsilon)$, что как только $n \geqslant N(\varepsilon)$, так сейчас же $r(M, b_n)<\varepsilon$.

Тогда точка интегральной кривой $x=x(s, b_n)$, $y=y(s, b_n)$ в момент $s=S$ должна находиться в $^1/_4\,\rho$-окрестности точки $M_1(\xi_1, \eta_1)$, что невозможно, так как, как было показано, эта точка должна лежать внутри области $G(\lambda_0)$, которая не имеет общих точек с кругом

$$(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2=\frac{1}{16}\rho^2$$

Этим установлено, что для любой последовательности $\{b_i\} \in A-G(\lambda_0)$ и $r(b^i, M) \to 0$, $s(b_i) \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Изучим теперь последовательность $\{1+v(b_i)\}$. Так как $1+v(a_i)=\lambda_0$, то из (3.2) имеем, что $1+v(b_i) \to 0$ при $i \to +\infty$. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. В пространстве (x, y, v) уравнение $v=v(x, y)$ определяет интегральную поверхность, которая определена в каждой точке $(x, y) \in A$. Из теоремы 3 следует, что линии, образующие границу этой поверхности, имеют вид: $x=x(s, M)$, $y=y(s, M)$, $v=-1$, где M — точка границы области A. Эти граничные линии являются интегральными кривыми следующей системы:

$$\frac{dx}{ds}=\frac{f_1(x, y)}{1+f_1{}^2(x, y)+f_2{}^2(x, y)}, \qquad \frac{dy}{ds}=\frac{f_2(x, y)}{1+f_1{}^2(x, y)+f_2{}^2(x, y)} \tag{3.4}$$

$$\frac{dv}{ds}=\varphi(x, y)[1+v]$$

т. е. являются характеристиками уравнения (2.2) в частных производных.

Следствие 2. Как следует из изложенного выше, продолжение интегральной поверхности $v = v(x, y)$ за область A, в которой она определена единственным образом, может быть сделано различными способами, так как граничные линии поверхности $v = v(x, y)$ являются характеристиками уравнения (2.2) и всегда можно сделать продолжение (предполагается—только за обыкновенные точки) интегральной поверхности $v(x, y)$ так, чтобы $\partial v / \partial x$ и $\partial x / \partial y$ были непрерывными функциями x, y.

Перейдем к дальнейшему изложению свойств функции $1 + v(x, y)$.

Теорема 4. Каково бы ни было значение $\lambda \in (0, 1)$, $G(\lambda)$ является ограниченной областью, содержащейся в области A.

Доказательство. По определению множество $G(\lambda)$ связное.

Покажем, что оно открытое. Пусть точка $(\xi, \eta) \in G(\lambda)$, т. е.

$$\lambda < 1 + v(\xi, \eta) \leqslant 1$$

Тогда в силу непрерывности функции $v(x, y)$ найдется $\varepsilon(\delta) > 0$ такой, что при $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \leqslant \varepsilon^2$ будет

$$|v(x, y) - v(\xi, \eta)| < \delta, \quad -\delta + v(\xi, \eta) < v(x, y) < v(\xi, \eta) + \delta$$

Выберем величину δ такой, чтобы

$$v(\xi, \eta) + \delta \leqslant 0, \qquad v(\xi, \eta) - \delta > \lambda - 1$$

Отсюда $2\delta < 1 - \lambda$; при этих значениях δ имеем

$$\lambda < 1 + v(x, y) \leqslant 1$$

Итак, $G(\lambda)$ есть область. Внутри области $G(\lambda)$ не могут находиться граничные точки области A, так как

$$1 + v(x, y) > \lambda > 0 \qquad \text{в области } G(\lambda) \tag{3.5}$$

Покажем, что область $G(\lambda)$ ограничена. Предположим противное. Тогда при любом целом N найдется точка B_N, лежащая вне круга $x^2 + y^2 = N^2$ и принадлежащая $G(\lambda)$.

Интегральная кривая $x = x(s, B_N)$, $y = y(s, B_N)$ в момент $s = s(B_N)$ пересечет границу $G(\lambda_0)$ в точке A_N, где величину λ_0 считаем больше λ и такой, что $1 + v(x, y) = \lambda_0$ является замкнутой кривой. Обозначим через $\sigma(A_N, B_N)$ длину интегральной кривой, проходящей через точки A_N и B_N. Ясно, что $\sigma(A_N, B_N) \to \infty$ при $N \to +\infty$. Из равенства

$$\sigma(A_N, B_N) = \int_0^{s(B_N)} \frac{\sqrt{f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)}}{1 + f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)}\, ds \tag{3.6}$$

следует, что $s(B_N) \to \infty$ вместе с $\sigma(A_N, B_N) \to \infty$ при $N \to +\infty$.

Исследуем теперь величину $1 + v(B_N)$. Согласно (3.2) при (3.3) для $1 + v(B_N) \to 0$ при $N \to +\infty$, а это противоречит (3.5). Следовательно, $G(\lambda)$ является ограниченной областью, принадлежащей области A.

Следствие. Кривые $1 + v(x, y) = \lambda$ для λ в интервале (0.1) образуют топографическое семейство, заполняющее область A.

Теорема 5. Кривая $1+v(x, y)=0$, если она существует, является интегральной кривой системы (3.1).

Доказательство. Составим полную производную по s от функции $1+v(x, y)$ в силу системы (3.1):

$$\frac{d}{ds}(1+v)=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{f_1(x, y)}{1+f_1^2+f_2^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{f_2(x, y)}{1+f_1^2+f_2^2}$$

$$\frac{d}{ds}(1+v)=\varphi(x, y)[1+v(x, y)]$$

Отсюда следует, что кривая $1+v(x, y)=0$ является интегральной кривой системы (3.1).

Пусть точка (a, b) является точкой равновесия системы (3.1), отличной от точки $(0, 0)$. Тогда

$$f_1(a, b)=f_2(a, b)=0, \qquad \varphi(a, b)>0$$

Из уравнения (2.2) имеем

$$\frac{\partial v(a, b)}{\partial x}f_1(a, b)+\frac{\partial v(a, b)}{\partial y}f_2(a, b)=$$

$$=\varphi(a, b)[1+f_1^2(a, b)+f_2^2(a, b)][1+v(a, b)]$$

Откуда следует, что $1+v(a, b)=0$, если производные $\partial v(a, b)/\partial x$, $\partial v(a, b)/\partial y$ ограничены. Отсюда следует

Теорема 6. Если функция $1+v(x, y)$ определена таким образом, что в точках равновесия системы (3.1) ее частные производные по x и y ограничены, то в этих точках она обращается в нуль.

§ 4. Основные результаты. Допустим, что функция $w(x, y)$, определенная в области B, содержащей точку $(0, 0)$, удовлетворяет уравнению в частных производных (2.2) и при этом удовлетворяет условиям: она непрерывна в области B и $w(0, 0)=0$.

Возьмем точку (x_0, y_0), принадлежащую достаточно малой окрестности начала координат, в качестве которой можно взять область $G(\lambda_0)$, которая содержится в B при значении λ_0, достаточно близком к единице. Для таких значений x_0, y_0 будем иметь

$$1+w(x, y)=[1+w(x_0, y_0)]\,e^{\Phi(s)}, \qquad \Phi(s)=\int_0^s\varphi(x, y)\,ds$$

Устремляя s к $+\infty$, получим

$$1+v(0, 0)=[1+w(x_0, y_0)]\,e^{\Phi(+\infty)} \tag{4.1}$$

или

$$1+w(x_0, y_0)=e^{-\Phi(+\infty)}$$

Отсюда видно, что $w(x, y)$ необходимо совпадает с функцией $v(x, y)$.

Теорема 7. Чтобы область B целиком содержалась в области A, необходимо и достаточно, чтобы $1+w(x, y)>0$ при $(x, y)\in B$.

Доказательство. Необходимость будет следовать из того, что функция $1+w(x, y)$, когда $B\subset A$, совпадает с функцией $1+v(x, y)$, которая в области A положительна (по теореме 2).

Чтобы доказать достаточность, предположим, что $1 + w(x, y) > 0$ при $(x, y) \in B$. Покажем, что $B \subset A$.

Если предположить противное, что область B имеет точки вне области A, то будем иметь, что функция $1 + w(x, y)$ совпадает с функцией $1 + v(x, y)$, когда $(x, y) \in A$, и является продолжением функции $1 + v(x, y)$, когда (x, y) вне A.

Тогда, как следует из теоремы 4 и ее следствий, функция $1 + w(x, y)$ обращается в нуль, когда точка (x, y), принадлежащая области B, принадлежит также границе области A. Но функция $1 + v(x, y) > 0$ при $(x, y) \in B$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Предположим теперь, что функция $1 + w(x, y)$ определена как решение уравнения в частных производных (2.2) на некотором связном множестве C, содержащем точку $(0, 0)$, и обладает свойствами: $w(0, 0) = 0$ и $w(x, y)$ непрерывна в C. Таким связным множеством может быть кривая, проходящая через точку $(0, 0)$, в частности, луч $y = kx$.

Теорема 8. Чтобы множество $C \subset A$, необходимо и достаточно, чтобы

$$1 + w(x, y) > 0 \qquad \text{при} \quad (x, y) \in C$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

Пусть теперь функция $1 + w(x, y)$, определенная при всех (x, y), является решением уравнения (2.2) и обладает свойствами $w(0, 0) = 0$ и функция $w(x, y)$, а также ее производные по x и по y непрерывны.

Рассмотрим связную компоненту множества точек (x, y), где $1 + w(x, y) > 0$, и обозначим ее через E.

Из теоремы 7 следует, что $E \subset A$. С другой стороны, в каждой внутренней точке $(x, y) \in A$ функция

$$1 + w(x, y) = 1 + v(x, y) > 0$$

значит, точка $(x, y) \in E$, а тогда $A \subset E$; следовательно, $E = A$.

Теорема 9. Границей области A асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы (3.1) является семейство интегральных кривых $1 + w(x, y) = 0$, ограничивающих связную компоненту множества точек (x, y) таких, что $1 + w(x, y) > 0$.

Если у системы дифференциальных уравнений (3.1) имеется интегральная кривая $1 + w(x, y) = 0$, то она не может входить в точку $(0, 0)$, так как $w(0, 0) = 0$. Таким образом, для устойчивости в целом необходимо, чтобы функция $1 + w(x, y) > 0$ при всех (x, y).

Если последнее условие выполнено, то по теореме 7 любая конечная точка (x, y) принадлежит области A. Следовательно, это условие является достаточным для устойчивости в целом. Доказана следующая теорема.

Теорема 10. Чтобы невозмущенное движение $x = y = 0$ системы (3.1) было устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы $1 + w(x, y) > 0$ при всех (x, y).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \tag{4.2}$$

Так как $v_2(x, y)$ есть определенно-отрицательная квадратичная форма, то характеристические числа системы первого приближения будут чисто мнимыми.

Нетрудно видеть, что $1 + v(x, y) = \lambda$ является голоморфным интегралом для системы (4.2). Следовательно, точка покоя $x = y = 0$ является центром. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 11. Всякой системе дифференциальных уравнений (2.1) можно сопоставить целый класс систем дифференциальных уравнений (4.2), зависящих от выбора функции $\varphi(x, y)$ таких, что все замкнутые интегральные кривые, лежащие в области A, будут бесконтактными для системы (2.1), а граница области A является общей интегральной кривой обеих систем.

Таким образом, если область устойчивости ограничена предельным циклом, то равенство $1 + v(x, y) = \lambda$ доставляет замкнутые кривые не только при $1 > \lambda > 0$, но и при $\lambda < 0$.

§ 5. Свойства функции $v(x, y)$. Вся предыдущая теория была построена на использовании свойств решения дифференциального уравнения в частных производных (2.2).

Однако следует отметить, что нахождение границы области асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы дифференциальных уравнений (2.1) можно осуществить и другими путями.

Ясно, что для построения теории можно было исходить и из других уравнений, например,

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial v_1}{\partial y} f_2(x, y) = \varphi(x, y)\,[1 + f_1^2 + f_2^2] \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) может быть получено из уравнения (2.2) путем замены $v_1 = \ln(1 + v)$.

Решение уравнения (5.1) может быть получено под видом сходящегося ряда, начинающегося с определенно-отрицательной квадратичной формы. Это решение, обращающееся в нуль при $x = y = 0$, можно продолжить на всю область A, как это было сделано ранее. Следовательно, основываясь на свойствах решения (5.1), можно сформулировать теоремы, аналогичные предыдущим.

Теорема 12. Функция $v_1(x, y)$, представляющая собой решение уравнения (5.1) и определенная условием $v_1(0, 0) = 0$, является функцией Ляпунова, определенная внутри области A, и обладает свойствами:

$$v_1(x, y) < 0 \qquad \text{при } (x, y) \in A \text{ и } x^2 + y^2 \neq 0,$$
$$v_1(x, y) \to -\infty \qquad \text{при } (x, y) \to \text{ к границе } A \text{ изнутри.}$$

Теорема 13. Для устойчивости в целом необходимо и достаточно, чтобы функция $v_1(x, y)$ была определенно-отрицательной на всей плоскости (x, y) и обращалась в $-\infty$ лишь при $x^2 + y^2 = +\infty$.

Теоремы 13 и 12 следуют из равенства $v_1 = \ln(1 + v)$ и теоремы 10.

Поставим теперь вопрос об аналитических свойствах функции $v(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (2.2).

Теорема 14. Какова бы ни была точка $(x_0, y_0) \in A$, функция $v(x, y)$ может быть представлена под видом ряда

$$v(x, y) = -1 + \sum_{k,l=0}^{\infty} C_{kl}(x - x_0)^k (y - y_0)^l$$

сходящегося в круге $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, где величина $r = r(x_0, y_0)$ достаточно мала.

Доказательство. Построим решение $x = g_1(s, x_0, y_0)$, $y = g_2(s, x_0, y_0)$ системы (3.1), проходящее в момент $s = 0$ через точку (x_0, y_0). Сделаем замену в системе (3.1):

$$x = g_1(s, x_0, y_0) + \xi, \qquad y = g_2(s, x_0, y_0) + \eta \tag{5.2}$$

Тогде система (3.1) примет вид:

$$\frac{d\xi}{ds} = \sum_{k+l=1}^{\infty} a_{kl}(s)\,\xi^k \eta^l, \qquad \frac{d\eta}{ds} = \sum_{k+l=1}^{\infty} b_{kl}(s)\,\xi^k \eta^l$$

где $a_{kl}(s)$ и $b_{kl}(s)$ — ограниченные функции времени s. У этой системы решение может быть представлено под видом рядов [7]:

$$\xi = \sum_{k+l=1}^{\infty} \varphi_{kl}(s)\,\xi_0^k \eta_0^l, \qquad \eta = \sum_{k+l=1}^{\infty} \psi_{kl}(s)\,\xi_0^k \eta_0^l$$

где (ξ_0, η_0) — точка, через которую в момент $s = 0$ проходит решение $\{\xi, \eta\}$ таким образом, чтобы $\xi_0 = x - x_0$, $\eta_0 = y - y_0$.

Эти ряды сходятся [7] при достаточно малых величинах ξ_0, η_0 и $s > 0$. Подставляя (5.2) в правую часть равенства

$$1 + v(x, y) = e^{-\Phi(+\infty)} \qquad \left(\Phi(s) = \int_0^{s_1} \varphi(x, y)\, ds\right)$$

и развертывая ее в ряд, получим требуемое.

Если функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в (2.1) таковы, что каждое решение проходящее в момент $t = 0$ через точку $(x_0, y_0) \in \bar{A}$, продолжимо на все значения $t \in (-\infty, +\infty)$, то для построения границы области A можно пользоваться упрощенными уравнениями в частных производных.

Рассмотрим решение уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} f_2(x, y) = \varphi(x, y)\,[1 + w(x, y)] \tag{5.3}$$

определенное условием $w(0, 0) = 0$.

При достаточно малых величинах $|x|$, $|y|$ функцию $w(x, y)$ можно найти под видом сходящегося ряда, члены наинизшего измерения которого образуют определенно-отрицательную квадратичную форму. Функцию $w(x, y)$ можно будет распространить на всю область A асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = y = 0$, как это было сделано раньше для функции $v(x, y)$. Так как любое решение, проходящее через область A и ее границу, по предположению продолжимо на все значения $t \in (-\infty, +\infty)$, то все свойства функции $v(x, y)$ переносятся без изменений на функцию $w(x, y)$. Поэтому имеет место аналогичная теорема.

Теорема 15. Границей области A является семейство кривых $1+w(x, y)=0$, ограничивающих область, содержащую точку $(0, 0)$.

Условие $1+w(x, y)>0$ при всех конечных x, y является необходимым и достаточным для асимптотической устойчивости в целом.

Положив в (5.3) $w_1=\ln(1+w)$, получим более простое уравнение (5.4), решение которого, определенное условием $w_1(0, 0)=0$, доставляет другой способ отыскания границы области A и дает несколько другое условие устойчивости в целом, аналогичное условию в теореме 13.

Теорема 16. Функция $w_1(x, y)$, представляющая собой решение уравнения (5.4) и определенная условием $w_1(0, 0)=0$, является функцией Ляпунова, определенная внутри области A, и обладает свойствами:

$$w_1(x, y)<0 \quad \text{при } (x, y) \in A \text{ и } x^2+y^2 \neq 0,$$
$$w_1(x, y) \to -\infty \quad \text{при } (x, y) \to \text{ к границе области } A \text{ изнутри}$$

Теорема 17. Для устойчивости в целом необходимо и достаточно, чтобы функция $w_1(x, y)$ была определенно-отрицательной на всей плоскости (x, y) и обращалась в $-\infty$ лишь при $x^2+y^2=+\infty$.

Для практического определения границы области A и асимптотической устойчивости в целом использование теорем 15, 16, 17 затруднительно, так как требуется продолжимость решений по $t \in (-\infty, +\infty)$.

Однако при отыскании предельных циклов они доставляют облегчение. Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих изложенную выше теорию.

§ 6. Примеры. 1°. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=-x+y+x(x^2+y^2), \qquad \frac{dy}{dt}=-x-y+y(x^2+y^2) \tag{6.1}$$

Составим соответствующее системе (6.1) уравнение в частных производных, взяв в качестве функции $\varphi(x, y)$ функцию $2(x^2+y^2)$. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x}(-x+y+x^3+xy^2)+\frac{\partial v}{\partial y}(-x+y^3-y+yx^2)=2(x^2+y^2)[1+v] \tag{6.2}$$

Нетрудно видеть, что функция $v(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (6.2), имеет вид: $v(x, y)=-(x^2+y^2)$.

Уравнение $1+v(x, y)=0$ в данном случае определяет окружность единичного радиуса, которая и будет границей области A асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x=y=0$.

2°. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=-x+y+x(x^2+y^2), \qquad \frac{dy}{dt}=-x-y+y(x^2+y^2), \qquad \frac{dz}{dt}=-z \tag{6.3}$$

Для системы (6.3) функция

$$1+v(x, y, z)=(1-x^2-y^2)e^{-z^2}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению в частных производных, в котором функция $\varphi(x, y)$ взята в виде функции $2(x^2+y^2+z^2)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(-x+y+x^3+xy^2)+\frac{\partial v}{\partial y}(-x-y+y^3+yx^2)-z\frac{\partial v}{\partial z}=2(x^2+y^2+z^2)(1+v)$$

В этом случае границей области асимптотической устойчивости невозмущенного движения является поверхность цилиндра $x^2+y^2=1$, вся целиком состоящая из интегральных кривых. В этих примерах везде функция $\varphi(x, y)$ имеет наиболее простой вид. В общем случае она должна быть выбрана таким образом, чтобы легче можно было найти функцию $v(x, y)$.

§ 7. Общий вид системы дифференциальных уравнений, к которым применима развитая выше теория. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.1}$$

Будем обозначать через x точку фазового пространства с координатами $x_1, \ldots, x_n$; введем также обозначение $f^2 = f_1^2 + \ldots + f_n^2$. Допустим, что (7.1) имеет асимптотически устойчивое невозмущенное движение $x = 0$.

Таким образом, имеется область асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0$, которую, как и выше, будем обозначать через A. Обозначая через $x(t, t_0, x_0)$ решение, проходящее через точку x_0 в момент $t = t_0$, имеем: если $x_0 \in A$, то $x^2(t, t_0, x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Преобразуем систему (7.1) заменой $dt / ds = (1 + f^2)^{-1}$. Получим

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{f_i(x_1, \ldots, x_n)}{1 + f^2} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.2}$$

В силу ограниченности правых частей всякое решение системы (7.2) продолжимо на все значения $s \in (-\infty, +\infty)$.

1°. Построение фундаментальных функций. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x)\,[1 + f^2]\,[1 + V(x)] \tag{7.3}$$

Выше согласно теоремам Ляпунова [7] можно было гарантировать у подобного уравнения существование решения, обращающегося в нуль при $x = 0$, являющегося в области A функцией Ляпунова, причем функцию $\varphi(x)$ можно было взять в виде определенно-положительной формы.

Теперь ближайшая задача состоит в том, чтобы показать, что для системы (7.1) существует функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям

1. $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\varphi(x) = 0$ при $x = 0$

2. $\varphi(x) > l > 0$ при $x^2 > \delta^2$, $l = l(\delta)$ (7.4)

$$\psi_1(+\infty) < k(x_0) < +\infty \quad \text{при } x_0 \in A$$

где

$$\psi_1(s) = \int_0^s \varphi(x(s, x_0))\,ds$$

Если функция $\varphi(x)$, которую мы будем называть фундаментальной функцией системы (7.1), построена, то можно построить ей соответствующую функцию [1] $V(x)$, удовлетворяющую (7.3), причем $V(0) = 0$.

---

[1] Функция $V(x)$, вообще говоря, не принадлежит классу C^1, но

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{V(x(t, x_0)) - V(x_0)}{t}$$

есть непрерывная функция точки x_0. Причем формально

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i = \frac{dV}{dt}$$

Действительно, пусть $x_0 \in A$. Тогда вдоль решения $x(s, x_0)$ системы (7.2) будем иметь из (7.3)

$$\frac{dV}{ds} = \varphi(x)[1+V], \qquad \text{или} \qquad 1+V(x) = [1+V(x_0)]\, e^{\psi_1(s)}$$

Устремляя s к $+\infty$ и разыскивая решение уравнения (7.3), определенное условием $V(0)=0$, получим

$$1 = [1+V(x_0)]\, e^{\psi_1(+\infty)}, \qquad \text{или} \qquad 1+V(x_0) = e^{-\psi_1(\infty)} \tag{7.5}$$

Покажем, что всегда для системы (7.1) можно построить функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям (7.4). Действительно, в силу того, что очевидное решение $x=0$ асимптотически устойчиво, по $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что как только $x_0^2 < \delta^2$, так сейчас же $x^2(s, x_0) < \varepsilon^2$ при $s > 0$.

Найдем $\sup x^2(s, x_0)$ при $x_0^2 \leqslant \delta^2$ и обозначим его через $g(s)$. Функция $g(s) \to 0$ при $s \to +\infty$.

Построим теперь, зная функцию $g(s)$, $\psi(s)$, строго монотонную:

$$\begin{array}{ll} \psi(s) > g(s) & \text{для } s \in (0, +\infty) \\ \psi(s) \to 0 & \text{при } s \to +\infty \\ \psi(s) > M & \text{при } s \in (0, -\infty) \end{array}$$

где M — наибольшее значение $g(s)$ для $s \in (0, +\infty)$. Построение этой функции $\psi(s)$ можно осуществить так. Возьмем последовательность чисел

$$m_k = \frac{M}{2^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Пусть число s_k таково, что

$$g(s_k) = m_k, \qquad g(s) < m_k \qquad \text{при } s > s_k$$

Пусть $\psi(s_k) = 2m_k$, $\psi(s_{k+1}) = 2m_{k+1}$ и $\psi(s)$ — линейная функция при $s \in (s_k, s_{k+1})$:

$$\psi(s) = 2m_k + 2(m_{k+1} + m_k)\frac{(s-s_k)}{s_{k+1}-s_k}, \qquad s \in [s_k, s_{k+1}]$$

При $s < s_0$ функцию $\psi(s)$ будем считать равной

$$2m_0 + 2(m_1 - m_0)\frac{s-s_0}{s_1-s_0}$$

Функцию $\psi(s)$ можно построить не только непрерывную, но и дифференцируемую.

В силу непрерывности функции $r = \psi(s)$ и ее строгой монотонности существует обратная функция $s = \psi^{-1}(r)$, заданная на $(0, +\infty)$, такая, что $\psi^{-1}(r) \to +\infty$ монотонно при $r \to 0$.

Покажем теперь, что функция

$$\varphi(x) = x^2 \exp[-\psi^{-1}(x^2)]$$

удовлетворяет условиям (7.4). Здесь, как и раньше, $x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Условия (1) и (2) выполняются в силу свойств функции ψ^{-1} и множителя x^2.

Покажем, что

$$\int_0^{+\infty} x^2(s, x_0) \exp[-\psi^{-1}(x(s, x_0))]\, ds$$

ограничен при $x_0^2 < \delta^2$. Для этих значений x_0 будем иметь

$$x^2(s, x_0) \leqslant g(s) \leqslant \psi(s)$$

Откуда

$$-\psi^{-1}(x^2(s, x_0)) \leqslant -\psi^{-1}(g(s)) \leqslant -S, \quad \text{или} \quad e^{-\psi^{-1}}(x^2(s, x_0)) \leqslant e^{-S}$$

Отсюда и следует сходимость интеграла. Доказана следующая лемма.

Лемма. Для системы дифференциальных уравнений (7.1) всегда можно построить функцию $\varphi(x)$, обладающую свойствами (7.4).

2°. Свойства функции $v(x)$ — функции Ляпунова. Вдоль всякой интегральной кривой $x(s, x_0)$, $x_0 \in A$ функция

$$1 + v(x(s, x_0)) = \exp \int_{+\infty}^{s} \varphi[x(s, x_0)]\, ds$$

Таким образом доказаны следующие положения.

1. Функция $1 + v(x)$ вдоль любой интегральной кривой, принадлежащей области A, изменяется строго монотонно от 1 до 0, когда s изменяется от $+\infty$ до $-\infty$.

Таким образом, функция $v(x)$ является отрицательной и обращается в нуль только на очевидном решении $x = 0$. Отсюда следует, что функция $v(x)$ является функцией Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = 0$, причем она определена всюду в области A.

2. Предельное значение функции $1 + v(x)$ на границе области A при приближении к ней изнутри равно нулю. Полученную функцию внутри A можно будет распространить за границу области A по аналогии с тем, как это было сделано в § 2.

3. Поверхности $1 + v(x) = \lambda$, где $\lambda \in (0, 1)$, лежащие внутри области A, являются замкнутыми при любом значении $\lambda \in (0, 1)$.

4. Множество точек $1 + v(x) = 0$ состоит из целых траекторий. Действительно, если точка x_0 принадлежит этому множеству, то

$$1 + v(x(s, x_0)) = [1 + v(x_0)] \exp \int_0^s \varphi(x)\, ds$$

Откуда следует, что $1 + v(x(s, x_0)) = 0$ на траектории $x(s, x_0)$.

Доказательство сформулированных здесь свойств опускаем, так как они могут быть легко перенесены из § 2.

3°. Основные результаты. Показано, что для любой системы (7.1) существует функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая свойствам (7.4).

Однако возникает вопрос о практическом ее построении, если задана конкретная система дифференциальных уравнений.

Относительно этого можно указать следующее: если удастся из каких-либо соображений определить степень убывания решения, то функцию $\varphi(x)$ можно построить довольно легко. Например:

1) если решение системы (7.2) при достаточно большом $s > S$ удовлетворяет условию $x^2(s, x_0) < N / S^\alpha$, $N = \text{const}$, $\alpha = \text{const} > 0$, то за функцию $\varphi(x)$ можно взять функцию $(x^2)^k$, где целое число k обладает свойством $k\alpha > 1$;

2) если при $s > S$ оказывается $x^2(s, x_0) < N_1 / \lg S$, $N_1 = \text{const}$, тогда за $\varphi(x)$ можно взять функцию $x^2 \exp(-m / x^2)$, где постоянная m такова, что $m / N_1 > 1$.

Допустим теперь, что удалось определить функцию $v(x)$, которая является непрерывным решением уравнения (7.3), причем $v(0) = 0$.

Теорема 7[1]. Чтобы область B, содержащая $x = 0$, целиком содержалась в A, необходимо и достаточно, чтобы

$$1 + v(x) > 0 \qquad \text{при } x \in B.$$

Если решение уравнения (7.3) удалось определить при всех x, то справедлива следующая теорема.

Теорема 9[1]. Границей области A является семейство поверхностей

$$1 + v(x) = 0$$

ограничивающих область $1 + v(x) > 0$, содержащую $x = 0$.

Теорема 10[1]. Для устойчивости в целом необходимо и достаточно, чтобы $1 + v(x) > 0$ при всех значениях x.

Если система (7.1) имеет порядок $2k$, то ей можно сопоставить каноническую систему

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_i}; \qquad y_i = x_{k+i} \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

Эта система дифференциальных уравнений будет иметь интеграл $1 + v(x) = \lambda$, представляющий собой семейство замкнутых поверхностей при $\lambda \in (0, 1)$.

Если граница области A является замкнутой поверхностью, то равенство $1 + v(x) = \lambda$ определяет замкнутые поверхности и при некоторых $\lambda < 0$.

Все приведенные здесь результаты можно доказать аналогично § 4.

4°. О других свойствах функции Ляпунова $v(x)$. Все результаты § 5 переносятся почти без всяких изменений на рассматриваемый здесь вид системы (7.1).

Теорема 13[1]. Для того чтобы невозмущенное движение $x = 0$ системы (7.1) было асимптотически устойчиво в целом, необходимо и достаточно, чтобы решение $v_1(x)$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} f_i(x) = \varphi(x)\,[1 + f^2(x)]$$

определенное условием $v_1(0) = 0$, было отрицательным при всех $x \neq 0$ и $v_1(x) \to -\infty$ при $x^2 \to +\infty$.

Доказательство получается заменой $v_1(x) = \ln(v+1)$.

В теореме 14 используются свойства, которыми система уравнений (7.1) не обладает, поэтому ее нельзя распространить на общий случай.

Если правые части системы (7.1) таковы, что всякое решение $x(t, x_0, t_0)$ продолжимо на все значения $t \in (-\infty, +\infty)$, то для отыскания границы области A и решения вопроса об устойчивости в целом можно пользоваться теоремами, аналогичными теоремам 15, 16, 17.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) = \varphi(x)(1+v) \tag{7.6}$$

где $\varphi(x)$ — ограниченная фундаментальная функция.

Если всякое решение $x = x(t, x_0)$, проходящее в момент $t = 0$ через точку $x = x_0 \in \bar{A}$, продолжимо на все значения $t \in (0, -\infty)$, то, как и раньше, мы легко построим функцию $v(x)$, являющуюся решением уравнения (7.6), определенную условием $v(0) = 0$ и обладающую свойствами 1—4, указанными в п. 2°.

Предположим теперь, наоборот, что удалось найти решение уравнения (7.6), обладающее свойствами (7.4). Тогда вдоль любого решения будем иметь из (7.6)

$$1 + v(x) = [1 + v(x_0)] \exp \int_0^t \varphi(x)\, dt$$

Так как функция $1 + v(x) \to 0$ при x стремится к границе области A изнутри, то ввиду ограниченности функции $\varphi(x)$ получим, что решение $x(t, x_0)$ продолжимо на все значения $t \in (0, -\infty)$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 18. Для того чтобы любое решение $x = x(t, x_0)$, $x_0 \in A$ было продолжимо по $t \in (0, -\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы решение уравнения (7.6) обладало свойством 1 из 2° § 7.

При построении теории были использованы следующие свойства правых частей.

1. Функции $f_i(x)$ заданы при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяют условиям, при которых существует единственное решение у системы (7.1) при любых начальных условиях. Будем их предполагать непрерывными.

2. В теореме о предельном значении функции $1 + v(x)$ на границе области A использовалась теорема о непрерывности решения по начальным данным, для чего требуется единственность решения в некоторой достаточно малой окрестности границы области A.

3. Было предположено с самого начала, что решение $x = x(t, x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, если $x_0 \in A$.

Однако представляет интерес и такой случай, когда интегральная кривая $x = x(t, x_0)$ достигает невозмущенного движения в момент $t(x_0) < +\infty$, т. е. не выполнено условие единственности решения.

В этом случае можно построить всю изложенную выше теорию. Однако функция $v(x)$ не будет, вообще говоря, однозначной функцией.

В приложениях часто встречаются случаи, когда правые части заданы в некоторой области D, непрерывны в ней и удовлетворяют условиям единственности. Пусть эта система имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Введем в рассмотрение систему дифференциальных уравнений (7.1) и будем предполагать, что функции f_i совпадают с g_i при $x \in D$, а вне области D они заданы определенным образом, но с сохранением непрерывности и единственности решения.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) = [1 + f^2(x)]\,[1 + v(x)]\,\varphi(x) \tag{7.7}$$

где $\varphi(x)$ — фундаментальная функция рассматриваемой системы. Это уравнение совпадает в области D с уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} g_i(x) = \varphi(x)\,(1 + D^2)\,(1 + w) \tag{7.8}$$

Определим решение уравнения (7.7) условием $v(0) = 0$ и решение уравнения (7.8) $w(0) = 0$. Тогда функции $1 + v(x)$ и $1 + w(x)$ при $x \in D$ совпадают.

Теорема 19. а) Если $1 + w(x) > 0$, $x \in D$, то любое решение стремится либо к нулю, либо к границе области D.

б) Если $1 + w(x) = 0$ при некоторых значениях $x \in D$, то все интегральные кривые, начинающиеся в области, содержащей $x = 0$ и ограниченной поверхностями $1 + v(x) = 0$ и границей области D, либо стремятся к нулю, либо выходят из области D через границу.

в) Если $1 + w(x) = 0$ при $x \in$ границе и $1 + w(x) > 0$ внутри D, то всякое решение, начинающееся в области D, стремится к нулю

г) Если область $1 + w(x) > 0$, содержащая точку $(0, 0)$, вместе с контуром $1 + w(x) = 0$ вся погружена в область D, то область $1 + w(x) > 0$ является областью асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ системы (7.1).

Рассмотрим замкнутые поверхности $1 + v(x) = \lambda$, где $\lambda \in (0.1)$.

Обозначим $\lambda = \lambda^\circ$ такое значение λ, при котором поверхность $1 + v(x) = \lambda^\circ$ касается границы области D. Такое значение λ° найдется во всех случаях, кроме «г». Тогда всякая интегральная кривая, начинающаяся в области $1 + w(x, y) > \lambda^\circ$, входит в начало координат при $t = +\infty$.

Доказательство этих утверждений может быть проделано без труда.

§ 8. Метод построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную область устойчивости. Рассмотрим снова систему (7.1). Было показано, что существует фундаментальная функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям (7.4), и что для каждой такой функции $\varphi(x)$ можно построить функцию $v(x)$, определенную условием $v(0) = 0$, являющуюся решением уравнения (7.7).

Рассмотрим систему n фундаментальных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Для каждой функции $\varphi_k(x)$ построим единственную функцию $v_k(x)$ такую, что $v_k(0) = 0$. Тогда будем иметь n уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} f_i(x) = \varphi_k(x)\,[1 + f^2(x)]\,[1 + v_k(x)]$$

или (8.1)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial x_i} F_i = \varphi_k$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$F_i(x) = \frac{f_i}{1 + f^2}, \qquad \ln(1 + v_k) = w_k$$

$$D = \frac{D(w_1, \ldots, w_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial w_n}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial w_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

Систему (8.1) можно представить в матричной записи

$$DF = \Phi, \qquad F = \left\| \begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{matrix} \right\|, \qquad \Phi = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{matrix} \right\|$$

Если поставить вопрос об определении исходных функций $f_1, \ldots, f_n$ через $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $v_1, \ldots, v_n$, то будем иметь

$$F = D^{-1}\Phi \tag{8.2}$$

Тогда

$$f = (1 + f^2)\,F, \qquad f = \left\| \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \right\|$$

Из (8.2) следует, что фундаментальная матрица D обладает свойствами:

$$\begin{array}{lll} (1) & |D| \neq 0 & \text{при} \quad x \neq 0 \ \text{и} \ x \in A \\ (2) & D^{-1}\Phi = 0 & \text{при} \quad x = 0 \\ (3) & F^2 = F_1^2 + \cdots + F_n^2 = \dfrac{f^2}{(1+f^2)^2} < \dfrac{1}{4} & \end{array} \tag{8.3}$$

Следовательно, $(D^{-1}\Phi)^2 \leqslant 1/4$ при всех x.

(4) Если на границе области A нет точек покоя, то на ней $D^{-1}\Phi \neq 0$. Определим теперь величину $1 + f^2$ через D и Φ. Из (8.2) имеем

$$F^2 = \frac{f^2}{(1+f^2)^2} = (D^{-1}\Phi)^2$$

Отсюда

$$1 + f^2 = \frac{1/2 - \sqrt{1/4 - (D^{-1}\Phi)^2}}{(D^{-1}\Phi)^2}$$

Тогда

$$f = (1 + f^2)\,F = \frac{1/2 - \sqrt{1/4 - (D^{-1}\Phi)^2}}{(D^{-1}\Phi)^2}\, D^{-1}\Phi \tag{8.4}$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 20. Для того чтобы область A была областью асимптотической устойчивости системы (7.1), необходимо, чтобы ее правые части имели вид (8.4), где D и Φ удовлетворяют условиям (8.3). Если на границе области A отсутствуют точки покоя системы дифференциальных уравнений, то также необходимо выполнение условия (4.1).

Покажем, что эти условия являются и достаточными. Пусть задана любая область A_1. Определим систему функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, обладающих свойствами:

$$\Phi_k(0) = 0, \qquad \Phi_k(x) > e_k > 0 \qquad \text{при } x^2 > \delta^2$$

и систему дифференцируемых функций $V_1(x), \ldots, V_n(x)$ таких, что

$$V_k(0) = 0, \qquad V_k(x) = -1 \qquad \text{на границе } A_1$$

$$0 > V_k(x) > -1 \qquad \text{внутри } A_1 \quad (x \neq 0)$$

Рассмотрим функциональную матрицу D_1 и вектор Φ_0:

$$D_1 = \frac{D(W_1, \ldots, W_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}, \quad W_k = \ln(1 + V_k), \quad \Phi_0 = \left\| \begin{matrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{matrix} \right\|$$

Теорема 21. Если D_1 и Φ_0 удовлетворяют условиям (8.3), то система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = D_1^{-1}\Phi_0 \frac{1/2 - \sqrt{1/4 - (D_1^{-1}\Phi_0)^2}}{(D_1^{-1}\Phi_0)^2} \qquad \left(X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| \right) \tag{8.5}$$

будет иметь A_1 областью асимптотической устойчивости очевидного решения $X = 0$.

Доказательство. На основании свойства (2) $X = 0$ является решением системы (8.5).

В силу сделанных предположений функция $V_k(x)$ определенно-отрицательная. Составим от нее полную производную по t в силу системы уравнений (8.5):

$$\frac{dV_k}{dt} = \Phi_k \frac{1/2 - \sqrt{1/4 - (D_1^{-1}\Phi_0)^2}}{(D_1^{-1}\Phi_0)^2}(1 + V_k)$$

Откуда в силу предположений относительно D_1 и Φ_0 свойства функции $V_k(x)$ $(-1 < V_k < 0)$ получаем, что dV_k/dt есть определенно-положительная функция. Поэтому очевидное решение $X = 0$ асимптотически устойчиво. По теореме 9[1] заключаем, что область A_1 и является областью асимптотической устойчивости невозмущенного движения $X = 0$. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если D_1 и Φ_0, кроме того, еще удовлетворяют условию 4, то на границе области A_1 система не имеет точек покоя.

Следствие 2. Если область A_1 совпадает со всем фазовым пространством, то невозмущенное движение системы (8.5) асимптотически устойчиво в целом. Этим построен класс систем, устойчивых в целом.

Следствие 3. Если хотя бы одна из функций Φ_k обладает свойством

$$\Phi_k \frac{{}^1/_2 - \sqrt{{}^1/_4 - (D_1^{-1}\Phi_0)^2}}{(D_1^{-1}\Phi_0)^2} < M < +\infty$$

то любое решение системы (8.4) продолжимо по t на $[0, -\infty)$.

Действительно, функция

$$1 + V_k(x) = [1 + V_k(x_0)] \exp \int\limits_0^t \Phi_k \frac{{}^1/_2 - \sqrt{{}^1/_4 - (D_1^{-1}\Phi_0)^2}}{(D_1^{-1}\Phi_0)^2}\, dt$$

Откуда имеем (для отрицательных t)

$$1 + V_k(x) > [1 + V_k(x_0)]\, e^{Mt}$$

Так как функция $1 + V_k(x) \to 0$ вдоль отрицательной полутраектории, проходящей через точку $X = 0$, то обязательно $t \to -\infty$. Этим выделен класс систем, все решения которых, лежащие в области асимптотической устойчивости, продолжимы по $t \in [0, +\infty)$.

2. Практические методы отыскания границы области асимптотической устойчивости, построение общего решения в области A

§ 9. Методы отыскания областей, целиком погруженных в область асимптотической устойчивости невозмущенного движения. Вернемся снова к рассмотрению системы дифференциальных уравнений (1.1), где будем предполагать $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ голоморфными функциями своих аргументов, разложения которых по целым положительным степеням $x_1, \ldots, x_n$ не содержат членов нулевого измерения и таковы, что вещественные части корней определяющего уравнения отрицательны.

Не умаляя общности, рассмотрим систему двух уравнений (2.1). Если в уравнении (2.2) функция $\varphi(x, y)$ есть определенно-положительная квадратичная форма, то, как было показано, решение уравнения (2.2) может быть получено в виде ряда (2.3).

Рассмотрим теперь семейство кривых (эллипсов)

$$v_2(x, y) = -\mu, \qquad \mu \in (0, +\infty), \qquad \mu = \mathrm{const}$$

Если L есть интегральная кривая системы (2.1), лежащая на границе области A, то обязательно найдется такое значение $\mu = \mu^\circ$, что кривая $v_2(x, y) = -\mu^\circ$ будет касаться в некоторой точке кривой L.

Действительно, так как оси эллипса не ограничены при $\mu \to +\infty$, то найдется такое значение μ, при котором кривая $v_2(x, y) = -\mu$ будет пересекать интегральную кривую L по крайней мере в двух точках.

Пусть точка входа интегральной кривой L в эллипс соответствует моменту времени $t = \beta$.

Рассмотрим функцию $v_2(x, y)$ вдоль кривой L в промежутке $t \in [\alpha, \beta]$, причем $v_2(x(\alpha), y(\alpha)) = v_2(x(\beta), y(\beta)) = -\mu$.

Найдем теперь наибольшее значение $v_2(x(t), y(t))$ при $t \in [\alpha, \beta]$ и обозначим его через $-\mu^\circ$. Тогда кривая

$$v_2(x, y) = -\mu^\circ$$

будет касаться кривой L, так как в противном случае функция $v_2(x, y)$ не имела бы $-\mu$ своим наибольшим значением при $t \in [\alpha, \beta]$.

Если интегральная кривая L есть точка покоя системы (2.1), то утверждение очевидно. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма. Какова бы ни была интегральная кривая L, лежащая на границе области A, обязательно найдется значение $\mu = \mu^\circ$, при котором кривая $v_2(x, y) = -\mu^\circ$ касается интегральной кривой L в точке (x°, y°).

Как было показано раньше, интегральная кривая системы (2.1) может быть представлена уравнением $1 + v(x, y) = 0$. Тогда в точке касания (x°, y°) будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial x} f_1(x^\circ, y^\circ) + \frac{\partial v}{\partial y} f_2(x^\circ, y^\circ) = 0, \qquad \frac{\partial v / \partial x}{\partial v_2 / \partial x} = \frac{\partial v / \partial y}{\partial v_2 / \partial y}$$

Откуда имеем

$$f_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + f_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \tag{9.1}$$

Заметим теперь, что функция $v_2(x, y)$ является функцией Ляпунова для системы (2.1). Найдем dv_2 / dt в силу системы (2.1):

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial v_2}{\partial y} f_2(x, y)$$

$$w = \frac{dv_2}{dt} = \varphi(x, y) + \frac{\partial v_2}{\partial x} \sum_{m=2}^{\infty} f_1{}^m + \frac{\partial v_2}{\partial y} \sum_{m=2}^{\infty} f_2{}^m$$

где $f_1{}^i$, $f_2{}^i$ — формы i-й степени по x, y в разложении $f_1(x,y)$ и $f_2(x, y)$.

Функция $w(x, y)$ является определенно-положительной.

Найдем множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $w(x, y) = 0$, и обозначим его через w_0, считая, что точка $x = 0$, $y = 0$ не принадлежит множеству w_0.

Найдем наибольшее значение функции $v_2(x, y)$ на множестве w_0 и обозначим его через $-\mu_0$. Значение $\mu_0 > 0$, так как функция $w(x, y)$ определенно-положительная.

Теорема 22. Кривая

$$v_2(x, y) = -\mu_0$$

целиком содержится в области $\overline{A}$.

Доказательство. Предположим противное, что кривая $v_2(x, y) = -\mu_0$ частично погружена в область A. Тогда некоторая интегральная кривая L, принадлежащая границе области A, обязана пересекать кривую $v_2(x, y) = -\mu_0$ по крайней мере в двух точках. В этом случае можно показать, как это было сделано при доказательстве леммы, что функция $w(x, y)$ обращается в нуль внутри области

$$v_2(x, y) > -\mu_0$$

Следовательно, значение $-\mu_0$ не может быть наибольшим для функции $v_2(x, y)$ на множестве w_0.

Найдем теперь указанное значение $-\mu_0$. Для этого найдем наибольшее значание функции $v_2(x, y)$ при условии $w(x, y) = 0$.

Откуда будем иметь систему уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \qquad w(x, y) = 0 \tag{9.2}$$

Из всех решений системы (9.2) надо выбрать такое, при котором функция $v_2(x, y)$ имела бы наибольшее значение, отличное от нуля.

Это наибольшее значение функции $v_2(x, y)$ и будет величиной $-\mu_0$.

Заметим, что функция $\varphi(x, y)$ является произвольной определенно-положительной формой:

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Таким образом,

$$v_2(x, y) = -\mu_0 \tag{9.3}$$

есть семейство кривых, зависящих от параметров a, b, c.

Пользуясь этим, можно сформулировать ряд признаков для установления характера области устойчивости.

Теорема 23, Для того чтобы область устойчивости была ограничена, необходимо, чтобы семейство кривых (9.3) было ограниченным, а для неограниченности области устойчивости достаточно, чтобы это семейство было неограниченным.

Доказательство очевидно. Рассмотрим теперь наименьшее значение $v_2(x, y)$ на множестве w_0 и обозначим его через $-\mu_2$.

Теорема 24. Если значение $\mu_2 < +\infty$, то область устойчивости ограничена и ее граница лежит в области

$$-\mu_0 > v_2(x, y) > -\mu_2 \tag{9.4}$$

В противном случае имеет место устойчивость в целом.

Доказательство. Покажем, что граничная интегральная кривая не может уходить на ∞. Этим теорема и будет доказана.

Предположим противное, т. е. что некоторая граничная интегральная кривая уходит на ∞.

По характеру построения области (9.4) эта интегральная кривая имеет с ней общие точки.

Пусть точка (x_0, y_0) одна из них. Выпустим в момент $t = 0$ из точки (x_0, y_0) граничную интегральную кривую, которая в момент $t = \tau$ покинет область (9.4). Тогда всякая интегральная кривая e, начинающаяся в ε-окрестности точки (x_0, y_0), где $\varepsilon > 0$ достаточно малая const, покинет область (9.4) по теореме об интегральной непрерывности. Вдоль кривой e функция $v_2(x, y)$ будет иметь минимум вне области (9.4), если кривая e начинается в A.

Следовательно, вне области (9.4) обязательно найдется точка, принадлежащая множеству w_0, так как $w_0 \subset (9.4)$. Это противоречие и доказывает теорему.

Для практического применения указанного метода можно с успехом пользоваться семейством кривых

$$s_n = -\mu, \qquad s_n(x, y) = v_2(x, y) + v_3(x, y) + \ldots + v_n(x, y) \tag{9.5}$$

Определим для этого семейства аналогично функцию

$$w_n(x, y) = \frac{ds_n}{dt} = \frac{\partial s_n}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial s_n}{\partial y} f_2(x, y)$$

и множество ее нулей w_{0n}.

Для семейства (9.5) можно определить величины $-\mu_{0n}$ и $-\mu_{1n}$ — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $s_n(x, y)$ на множестве w_{0n}. Как и раньше, можно показать, что кривая $s_n = -\mu_{0n}$ целиком погружена в область устойчивости, и можно перенести для семейства (9.5) сформулированные выше результаты. Этим самым здесь предложен метод построения семейства областей, целиком принадлежащих области A.

Заметим, что под семейством $s_n(x, y) = -\mu$ подразумеваются кривые, ограничивающие область $s_n(x, y) = -\mu$, содержащую точку (0, 0).

§ 10. Построение общего решения в области асимптотической устойчивости. Допустим, что задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{10.1}$$

где функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ голоморфны в некоторой области G, т. е. если точка $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in G$, то

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{\infty} P_i^{(m_1,\ldots,m_n)}(x_1 - x_1^\circ)^{m_1}(x_2 - x_2^\circ)^{m} \cdot \ldots (x_n - x_n^\circ)^{m_n}$$

ряды, сходящиеся в области $|x - x_i^\circ| < \rho \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Будем рассматривать ради простоты систему двух уравнений, хотя все сказанное будет справедливо и для системы n уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \tag{10.2}$$

Пусть некоторая интегральная кривая системы (10.2)

$$x = x(t, x_0, y_0), \qquad y = y(t, x_0, y_0) \tag{10.3}$$

остается в ограниченной области G_1, целиком погруженной в G. Тогда она продолжима по $t \in (-\infty, \infty)$.

Какова бы ни была точка $(x, y_1) \in G_1$, найдутся общее значение M и величина ρ такие, что функция

$$F(x, y) = \frac{M}{1 - (x - x_1 + y - y_1)/\rho}$$

является мажорантной рядов

$$f_1(x, y) = \sum_{m_1+m_2=0}^{\infty} P_1^{(m_1, m_2)}(x - x_1)^{m_1}(y - y_1)^{m_2}$$

$$f_2(x, y) = \sum_{m_1+m_2=0}^{\infty} P_2^{(m_1, m_2)}(x - x_1)^{m_1}(y - y_1)^{m_2}$$

Системой дифференциальных уравнений, являющейся мажорантной для (10.2), является следующая:

$$\frac{dx}{dt}=F(x, y), \qquad \frac{dy}{dt}=F(x, y) \tag{10.4}$$

Пусть интегральная кривая (10.3) в момент $t=t_1$ достигает точки (x_1, y_1). Тогда по теореме Коши решение (10.3) можно представить в виде рядов

$$x=x_1+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_1, y_1)(t-t_1), \quad y=y_1+\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x_1, y_1)(t-t_1) \tag{10.5}$$

сходящихся при $|t-t_1|<h$.

Построим для этих рядов соответствующие мажорантные функции, являющиеся решением системы (10.4), предполагая, что $x=x_1$, $y=y_1$ при $t=t_1$:

$$z=1+\rho\sqrt{1-\frac{2M(t-t_1)}{\rho}}$$

Из вида этой функции следует, что ряды (10.5) сходятся при

$$|t-t_1|<\frac{\rho}{2M}=h$$

независимо от величины t_1 и точки $(x_1, y_1)\in G_1$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 25. Если интегральная кривая системы (10.2) остается в ограниченной области, погруженной вместе с границей в область аналитичности правых частей системы (10.2), то функции, описывающие эту интегральную кривую, являются регулярными в полосе $2h$, содержащей вещественную ось t.

Отобразим теперь эту полосу на круг $|z|<1$, ставя в соответствие $t=0$ точку $z=0$. Тогда получим

$$z=\operatorname{th}\frac{\pi t}{2h} \tag{10.6}$$

Сделаем замену (10.6) независимой переменной t в системе (10.2):

$$\frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt}=f_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dt}=f_2(x, y) \tag{10.7}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\pi}{2h}(1-z^2), \qquad \frac{dz}{dt}=\varkappa(1-z^2), \qquad \varkappa=\frac{\pi}{2h}$$

Решение системы (10.7), проходящее в момент $z=0$ через точку (x_0, y_0), будет регулярным в круге $|z|<1$ и поэтому может быть представлено под видом сходящихся рядов

$$x=x_0+\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x_0, y_0)z^k, \qquad y=y_0+\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(x_0, y_0)z^k \tag{10.8}$$

область сходимости которых $|z|<1$ или $-\infty<t<+\infty$.

Дадим фактическое определение коэффициентов этих рядов. Подставляя их в систему (10.7), приравнивая члены при одинаковых степенях z, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \varkappa(k+1)X_{k+1} - \varkappa(k-1)X_{k-1} &= A_k \\ \varkappa(k+1)Y_{k+1} - \varkappa(k-1)Y_{k-1} &= B_k \end{aligned} \qquad (k=2, 3, \ldots) \tag{10.9}$$

где A_k и B_k — полиномы относительно X_i, Y_i, $i<k$ с коэффициентами, являющимися комбинациями коэффициентов разложений функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ и целых положительных чисел. Причем нетрудно видеть, что

$$A_1 = \frac{f_1(x_0, y_0)}{\varkappa}, \qquad B_1 = \frac{f_2(x_0, y_0)}{\varkappa}$$

Пусть у системы (10.2) существует невозмущенное движение $x=0$, $y=0$, асимптотически устойчивое.

Будем предполагать, что область его асимптотической устойчивости A ограничена и целиком погружена в область G вместе с границей.

Каждое решение, лежащее в области A, можно представить рядами вида (10.8), сходящимися при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема 26. Общее решение в ограниченной области асимптотической устойчивости A системы (10.2), целиком погруженной вместе с границей в область G, может быть представлено под видом рядов (10.8), сходящихся при $-\infty < t < +\infty$.

Этими рядами можно пользоваться для приближенного представления границы области A, в частности, когда она является предельным циклом. Для этого возьмем точку $(x_0, y_0) \in A$ и построим ряды (10.8) при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях t, которые будут представлять при этих значениях t довольно точно предельный цикл. В случае отрицательных вещественных частей всех корней определяющего уравнения системы (10.2) точку (x_0, y_0) можно брать на кривых $s_n(x, y) = -\mu$, достаточно близких к предельному циклу.

Пусть теперь область A имеет произвольный характер. Тогда любое решение $x = x(t, x_0, y_0)$, $y = y(t, x_0, y_0)$, начинающееся в ней, остается в ограниченной области. Если оно погружено в область G, то функции $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ регулярны в полуполосе шириной $2h$ для $t \in [0, +\infty)$.

Отобразив эту полуполосу на круг $|\zeta| < 1$, сделаем замену независимой переменной в системе (10.2). Тогда получим систему

$$\frac{dx}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt} = f_1(x, y), \qquad \frac{dy}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt} = f_2(x, y) \tag{10.10}$$

Решение этой системы, проходящее в момент $\zeta = 0$ через точку $(x_0, y_0) \in A$, может быть представлено в виде рядов

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(x_0, y_0)\zeta^k, \qquad y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(x_0, y_0)\zeta^k \tag{10.11}$$

сходящихся при $|\zeta| < 1$.

При отображении полуполосы на круг имеем функцию

$$\zeta = \frac{\operatorname{sh}(\pi t / 2h) - 1}{\operatorname{sh}(\pi t / 2h) + 1} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{sh}\frac{\pi t}{2h} = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

Дифференцируя последнее равенство по t, легко найдем

$$\frac{d\zeta}{dt} = \omega(1-\zeta)\sqrt{1+\zeta^2} \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{2h\sqrt{2}}\right)$$

Разложим правую часть этого равенства по степеням ζ:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \omega + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \zeta^i \tag{10.12}$$

где c_i — известные const. Подставляя (10.12) в систему (10.10), будем иметь систему вида

$$\frac{dx}{d\zeta}\left(\omega + \sum_{i=1}^{\infty} c_i\zeta^i\right) = f_1(x, y), \qquad \frac{dy}{d\zeta}\left(\omega + \sum_{i=1}^{\infty} c_i\zeta^i\right) = f_2(x, y)$$

Подставляя ряды (10.11) в последнюю систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ, получим следующую систему:

$$k\omega\xi_k + \sum_{i=1}^{k-1}(k-i)\,\xi_{k-i}c_i = A_{k-1} \qquad k\omega\eta_k + \sum_{i=1}^{k-1}(k-i)\,\eta_{k-i}c_i = B_{k-i}$$

где A_{k-i} и B_{k-i} — полиномы по ξ_i, η_i, $i < k$, аналогичные полиномам A_k и B_k в равенстве (10.9). Причем

$$\xi_1 = \frac{f_1(x_0, y_0)}{\omega}, \qquad \eta_1 = \frac{f_2(x_0, y_0)}{\omega}$$

Этим самым величины ξ_k, η_k являются полиномами степени k относительно величин $f_1(x_0, y_0)$, $f_2(x_0, y_0)$. Сделаем в системе (10.2) замену:

$$t = \tau + \frac{h}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$$

Тогда значению $\tau = 0$ отвечает значение $\zeta = 0$. Следовательно решение, проходящее в момент $\tau = 0$ через точку $(x_0, y_0) \in A$, может быть представлено под видом рядов (10.2), сходящихся при всех τ $[0, +\infty)$

Теорема 27. Если у системы (10.2) невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ обладает областью асимптотической устойчивости A и правые части (10.2) голоморфны в окрестности любой точки $(x_0^{(*)}, y_0^{(*)}) \in A$, то любое решение системы (10.2), проходящее в момент $\tau = 0$ через точку (x_0, y_0), представляется под видом рядов (10.11).

Замечание 1. Рядами (10.11) и (10.8) можно пользоваться не только в областях асимптотической устойчивости. Например, ряды (10.11) могут применяться для приближенного представления предельного цикла извне области асимптотической устойчивости.

Замечание 2. Ряды (10.8), (10.11) обладают тем преимуществом перед рядами, представляющими общее решение в окрестности начала координат, построенными Ляпуновым, что они:

1) не требуют отрицательности (или положительности) вещественных частей всех корней определяющего уравнения системы (10.2);

2) сходятся при любых конечных значениях $(x_0, y_0) \in A$, в то время как ряды Ляпунова сходятся в достаточно малой окрестности начала координат;

3) в случае ограниченной области A эти ряды сходятся при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Замечание 3. Если решение остается ограниченным при $t \in (0, -\infty)$, то, рассуждая аналогично, как и в случае, когда решение остается ограниченным при $t \in (0, +\infty)$, можно прийти к таким же рядам (10.11), но только сходящимся при $t \in (0, -\infty)$, а следовательно, если решение ограничено при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, то этими рядами можно представлять как положительную, так и отрицательную полутраекторию.

§ 11. Отыскание и условия существования предельного цикла. Здесь вернемся к случаю, когда правые части системы (10.2) голоморфны и все корни определяющего уравнения имеют отрицательные действительные части. Найдем функцию

$$s_n(x, y) = v_2(x, y) + v_3(x, y) + \ldots + v_n(x, y)$$

и предположим, что ряд

$$v(x, y) = v_2(x, y) + v_3(x, y) + \ldots + v_n(x, y) + \ldots \tag{11.1}$$

сходится в некоторой области, содержащей границу области A. Тогда семейство кривых $s_n(x, y) = -1$, ограничивающее область $s_n(x, y) > -1$, содержащее точку (0,0), будет сколь угодно точно представлять границу области A. Ясно, что этот же факт имеет место в случае системы n уравнений.

Когда известно, что ряд (11.1) сходится в области, содержащей область A, то кривые

$$_n s(x, y) = -1$$

будут представлять предельный цикл с любой степенью точности.

Теорема 28. Если ряд (11.1) сходится в области, содержащей область A, то для существования предельного цикла необходимо и достаточно, чтобы кривая $s_n(x, y) = -1$, ограничивающая область $s_n(x, y) > -1$, содержащую точку (0,0), при $n \to +\infty$ была ограничена и в достаточно малой окрестности ее не имелось точек покоя.

Допустим теперь, что область сходимости ряда (11.1) неизвестна. Тогда для отыскания предельного цикла и его приближенного представления можно рекомендовать следующий метод.

Строим кривую $s_n(x, y) = -\mu_{0n}$, как это было показано в § 9. Область $s_n(x, y) > -\mu_{0n}$, содержащая точку (0,0), целиком погружена в область A.

Возьмем какую-либо точку на кривой $s_n(x, y) = -\mu_{0n}$. В частности можно взять ту точку, в которой кривая

$$s_n(x, y) = -\mu_{0n}$$

касается множества w_{0n}. Выпустим из этой точки отрицательную полутраекторию, представив ее под видом рядов (10.8) или (10.11). Если предельный цикл существует, то траектория ограничена и делает бесчисленное число оборотов, приближаясь к предельному циклу. И поэтому ряды (10.8) или (10.11) могут сколь угодно точно при достаточно больших значениях t представлять предельный цикл. Наоборот, если окажется, что решение, представленное под видом рядов (10.8) или (10.11), ограничено и траектория делает бесчисленное число оборотов вокруг начала координат, то предельный цикл существует и указанные ряды при достаточно больших значениях t дают сколь угодно точно его представление.

Можно сформулировать и другой принцип, требующий меньшего числа вычислений.

Рассмотрим кривую $s_n(x, y) = -1$, ограничивающую область

$$s_n(x, y) > -1$$

содержащую точку (0,0), возьмем на этой кривой точку и выпустим из нее траекторию, пользуясь рядами (10.8). Если эта точка принадлежит ограниченной области устойчивости, то при $t \to +\infty$ решение (10.8) стремится к нулю, а при $t \to -\infty$ по поведению рядов (10.8) можно судить о том, является ли граница предельным циклом. Именно, если ряды описывают траекторию, делающую бесчисленное число оборотов вокруг начала координат, то предельный цикл имеется. Если же указанная точка не принадлежит области устойчивости, то, пользуясь рядами (10.11), мы можем отыскать предельный цикл.

Однако не всегда изложенный второй принцип может давать эффектный результат, ибо он основан на том соображении, что кривая $s_n(x, y) = -1$ близка к границе области устойчивости, что можно гарантировать лишь в случае, когда область асимптотической устойчивости погружена в область сходимости ряда (11.1).

В теореме 15 было показано, что функция $v(x, y)$ в окрестности каждой точки $(x_0, y_0) \in A$ разлагается в сходящийся ряд

$$v(x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} C_{kl} (x - x_0)^k (y - y_0)^l \tag{11.2}$$

Пользуясь этим свойством функции $v(x, y)$, каждый раз можно сколь угодно близко путем аналитического продолжения подойти к границе A. Это аналитическое продолжение можно будет совершать вдоль какого-либо луча $y = kx$, начиная с точки (0,0). В случае, когда существует предельный цикл, можно совершать с успехом аналитическое продолжение вдоль координатной оси x или y.

При приближении к границе, как было показано, функция $v(x, y)$ стремится к -1. Однако, сделав в уравнении (2.2) замену $w = \ln(1 + v)$, получим для w уравнение

$$f_1(x, y) \frac{\partial w}{\partial x} + f_2(x, y) \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi(x, y) (1 + f_1^2 + f_2^2)$$

Откуда w в достаточно малой окрестности начала координат может быть получена под видом известного ряда

$$w(x, y) = w_2(x, y) + w_3(x, y) + \ldots + w_n(x, y) + \ldots \qquad (11.3)$$

коэффициенты которого определятся последовательно.

Здесь $w_n(x, y)$ — однородная форма x, y n-й степени. Такой заменой мы достигли того, что при приближении к границе $w(x, x) \to -\infty$.

Этот факт облегчает вычисления, возникающие при аналитическом продолжении.

В некоторых случаях можно легко указать точку, лежащую на границе области устойчивости. Например, пусть ряд (11.1) не содержит y в первой степени, тогда

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,\,0)} = 0 \qquad (11.4)$$

Тогда из уравнения (2.2) будем имет

$$1 + v(x, 0) = \exp \int_0^x \frac{\varphi(x, 0)\,(1 + f_1^2(x, 0) + f_2^2(x, 0))\,dx}{f_1(x, 0)}$$

Откуда видно, что если x_1 и x_2 — соответственно положительный и отрицательный корни, ближайшие к $x = 0$, для уравнения

$$\exp \int_0^x \frac{\varphi(x, 0)\,[1 + f_1^2(x, 0) + f_2^2(x, 0)]\,dx}{f_1(x, 0)} = 0$$

то точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ лежат на границе области A.

Заметим, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения $f_1(x, 0) = 0$. То же самое можно сказать, когда

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(0,y)} = 0 \qquad (11.5)$$

Заметим, что условия (11.4) либо (11.5) накладывают некоторую связь на коэффициенты $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$.

§ 12. Представление функции $v(x_1, \ldots, x_n)$ посредством криволинейного интеграла. В § 2 функция $v(x, y)$ определена через криволинейный интеграл

$$1 + v(x, y) = [1 + v(x_0, y_0)] \exp \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} \frac{\varphi(x, y)\,(1 + f_1^2 + f_2^2)\,(x\,dx + y\,dy)}{x f_1 + y f_2}$$

Обобщим это представление функции v. Пусть $H(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Тогда производная от нее, вычисленная в силу системы (7.1), имеет вид:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \text{или} \qquad dt = dH \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \right)^{-1} \qquad (12.1)$$

Найдем решение уравнения (7.3), определенное условием $v(0) = 0$.

Вдоль интегральной кривой $x(t, x_0), x_0 \in A$ будем иметь

$$1 + v(x) = [1 + v(x_0)] \exp \int_0^t \varphi(x)(1 + f^2)\, dt$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $t \to +\infty$:

$$1 + v(x_0) = \exp\Big(-\int_{t_0}^{+\infty} \varphi(x)(1 + f^2)\, dt\Big)$$

Заменяя dt из (12.1), имеем

$$1 + v(x_0) = \exp\Big\{-\int_L \varphi(x)(1 + f^2)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} dx\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i\Big)^{-1}\Big\}$$

В показателе стоит криволинейный интеграл по пути, являющемуся положительной полутраекторией, исходящей из точки $x_0 \in A$.

Интересен случай, когда этот интеграл не зависит от пути интегрирования, так как тогда нетрудно определить функцию $v(x)$ вдоль всякого луча. Ясно, что всегда этот интеграл можно сделать таким. Для этого достаточно положить $H = H(v)$.

Допустим, что $H(x)$ — произвольная данная функция.

Тогда для независимости интеграла от пути интегрирования достаточно, чтобы фунция

$$\varphi(x)(1 + f^2)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i\Big)^{-1} = \Theta(H) \qquad (12.2)$$

была произвольно непрерывной функцией H.

Этим выделен класс систем дифференциальных уравнений, обладающих свойством: при заданной функции $H(x)$ и при любой положительно определенной функции $\varphi(x)$ интеграл

$$\int_L \varphi(x)(1 + f^2)\, dH\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i\Big)^{-1} \qquad (12.3)$$

не зависит от пути интегрирования.

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

принадлежит указанному классу.

Тогда соответствующая ей функция Ляпунова $v(x)$, являющаяся решением уравнения (7.3), есть функция $H(x)$.

Из (12.2) имеем

$$\Theta(H) \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} f_i = \varphi(x)\Big(1 + \sum_{i=1}^n f_i^2\Big)$$

Умножим обе части равенства на функцию $[(1 + v(x)]$. Тогда

$$[1 + v(x)]\,\Theta(H)\frac{dH}{dv}\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i = [1 + v(x)]\,\varphi(x)(1 + f^2)$$

Из этого равенства следует

$$[1 + v(x)]\,\Theta(H)\frac{dH}{dv} = 1 \tag{12.4}$$

Из (12.4) следует, что функция Ляпунова $v(x)$ является функцией H.

Если теперь функцию H выбирать произвольной вместе с функцией $\Theta(H)$, то для любой системы (7.1) всегда можно их подобрать так, что интеграл (12.3) не будет зависеть от пути интегрирования.

Эти рассуждения могут оказаться полезными в случае, когда имеем дело с какой-либо конкретной системой дифференциальных уравнений.

Поступила 12 V 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Методы А. М. Ляпунова и вопросы устойчивости в целом. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
2. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. XXXVI, № 3, 1952.
3. Барбашин Е. А. Метод сечений в теории динамических систем. Математический сборник, т. XXIX, вып. 2, 1951.
4. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.
5. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. ГИТТЛ, 1947.
6. Еругин Н. П. Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
8. Персидский К. П. К устойчивости движения. Матем. сборник, т. 42, в. 1, 1935.