

## ГОЛОВНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ СРЕДАХ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. С. Мархасев

(Москва)

Две бескончные упругие среды  $z > 0$  и  $z < 0$  соприкасаются вдоль плоскости  $z = 0$ . На расстоянии  $z_*$  от границы в первой (верхней) среде действует точечный источник. Дойдя до границы, упругие волны отражаются и преломляются. Если скорость волн во второй среде больше, то волны, распространяющиеся вдоль границы во второй среде, начиная с некоторого момента времени, обгоняют отраженные волны и вызывают волны (возмущения) в первой среде. Вступление этих возмущений в некоторых областях предшествует вступлению отраженных волн. Эти возмущения называют непрямыми возмущениями <sup>[1]</sup> (см. также <sup>[2]</sup>), головными волнами <sup>[3]</sup> и волнами Минтропа <sup>[4]</sup>. В случае преломления и отражения электромагнитных волн на плоскости раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими постоянными при некоторых условиях отраженной волне также предшествует волна, называемая боковой <sup>[5, 6]</sup> или головной <sup>[7]</sup> волной.

Задача о распространении упругих колебаний в настоящей работе решается методом функционально-инвариантных решений В. И. Смирнова и С. Л. Соболева <sup>[2]</sup>. Приведение основных уравнений теории упругости к уравнениям для потенциалов, вывод граничных условий для потенциалов, а также общий анализ можно найти в работах <sup>[1, 2]</sup>.

**§ 1. Плоская задача.** В первой среде скорость продольных и поперечных волн обозначим через  $a_1, b_1$ , а во второй — через  $a_2, b_2$ . Через  $\varphi_0, \psi_0$  обозначим потенциалы падающих продольной и поперечной волн,  $\varphi_1, \psi_1$  — отраженных и  $\varphi_2, \psi_2$  — преломленных; через  $\mu_1, \lambda_1$  — параметры Ляме для первой среды,  $\mu_2, \lambda_2$  — для второй.

Потенциалы определяются как решения уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{b_i^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = 0$$

в области  $z > 0, t > 0$  при  $i = 0, 1$  и в области  $z < 0, t > 0$  при  $i = 2$ .

При этом имеем начальные условия

$$\varphi_1 = \psi_1 = \varphi_2 = \psi_2 = \psi_0 \equiv 0, \quad \varphi_0 = \operatorname{Re} \Phi_0(\theta_0) \quad \text{при } 0 < t < \frac{z_*}{a_1}$$

где, как в работе Н. В. Зволинского и Л. П. Зайцева <sup>[3]</sup>:

$$\Phi_0(\theta_0) = \ln(a_1 \theta_0 - i \sqrt{1 - a_1^2 \theta_0^2}), \quad t - \theta_0 x - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta_0^2} (z - z_*) = 0$$

Граничные условия будут

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda_1 \frac{\partial^2 (\varphi_0 + \varphi_1)}{\partial x^2} + (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial^2 (\varphi_0 + \varphi_1)}{\partial z^2} - 2\mu_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} \right]_{z=0} = \\ & = \left[ \lambda_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - 2\mu_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} \right]_{z=0} \\ \mu_1 \left[ 2 \frac{\partial^2 (\varphi_0 + \varphi_1)}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right]_{z=0} & = \mu_2 \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \right]_{z=0} \\ \left[ \frac{\partial (\varphi_0 + \varphi_1)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right]_{z=0} & = \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right]_{z=0} \\ \left[ \frac{\partial (\varphi_0 + \varphi_1)}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right]_{z=0} & = \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right]_{z=0} \end{aligned}$$

Ищем потенциал продольной отраженной волны в виде  $\varphi_1 = \text{Re } \Phi_1(\theta_1)$ , потенциал поперечной отраженной волны в виде  $\psi_1 = \text{Re } \Psi_1(\vartheta_1)$ , причем  $\theta_1$  и  $\vartheta_1$  определяются из соотношений

$$t - \theta_1 x - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta_1^2} (z + z_*) = 0 \quad (1.1)$$

$$t - \vartheta_1 x - \sqrt{\frac{1}{b_1^2} - \vartheta_1^2} z - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \vartheta_1^2} z_* = 0 \quad (1.1^*)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} z - z_* = z_0, \quad x^2 + z_0^2 = r_0^2, \quad z + z_* = z_1, \quad x^2 + z_1^2 = r_1^2 \\ t^2 - \frac{1}{a_1^2} r_1^2 = d, \quad A_1 = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta^2}, \quad B_2 = \sqrt{\frac{1}{b_2^2} - \theta^2} \\ A_{20} = \sqrt{\frac{1}{a_2^2} - \theta_0^2}, \quad \alpha_{21} = \sqrt{\frac{1}{a_2^2} - \vartheta_1^2}, \quad \beta_{11} = \sqrt{\frac{1}{b_1^2} - \vartheta_1^2} \quad \text{и т. д.} \\ \sigma = b_2^2 \rho_2 - b_1^2 \rho_1 \end{aligned}$$

где  $\rho_1$  — плотность первой,  $\rho_2$  — второй среды.

Из условий на границе имеем

$$\Phi_1' = \frac{n_1}{D} \Phi_0', \quad \Psi_1' = \frac{n_2}{D} \Phi_0'$$

где

$$D(\theta) = -(\rho_1 - \rho_2 + 2\sigma\theta^2)^2 \theta^2 - (\rho_2 - 2\sigma\theta^2)^2 A_1 B_1 - (\rho_1 + 2\sigma\theta^2)^2 A_2 B_2 - \\ - \rho_1 \rho_2 (A_1 B_2 + A_2 B_1) - 4\sigma\theta^2 A_1 A_2 B_1 B_2$$

$$n_1(\theta) = -(\rho_1 - \rho_2 + 2\sigma\theta^2)^2 - (\rho_2 - 2\sigma\theta^2)^2 A_1 B_1 + (\rho_1 + 2\sigma\theta^2)^2 A_2 B_2 - \\ - \rho_1 \rho_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1) - 4\sigma\theta^2 A_1 A_2 B_1 B_2$$

$$n_2(\theta) = 2\theta A_1 [(\rho_1 - \rho_2 + 2\sigma\theta^2)(\rho_2 - 2\sigma\theta^2) - 2\sigma(\rho_1 - 2\sigma\theta^2) A_2 B_2]$$

Эти формулы получены В. Г. Гоголадзе [5]. Для смещений в падающей волне получается [3]

$$u_0 = \frac{a_1 x t}{r_0^2 \sqrt{a_1^2 t^2 - r_0^2}}, \quad v_0 = \frac{a_1 z_0 t}{r_0^2 \sqrt{a_1^2 t^2 - r_0^2}}$$

в отраженной

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \operatorname{Re} \left\{ \Phi_1'(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \Psi_1'(\vartheta_1) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} \right\} = \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1(\theta_1)}{D(\theta_1)} \frac{-i\theta_1}{A_{11}x - \theta_1(z+z_*)} + \frac{n_2(\vartheta_1)}{D(\vartheta_1)} \frac{-i\beta_{11}^2}{\alpha_{11}\beta_{11}x - (\alpha_{11}z + \beta_{11}z_*)\vartheta_1} \right\} \\
 v_1 &= \operatorname{Re} \left\{ \Phi_1'(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \Psi_1'(\vartheta_1) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} \right\} = \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1(\theta_1)}{D(\theta_1)} \frac{-iA_{11}}{A_{11}x - \theta_1(z+z_*)} + \frac{n_2(\vartheta_1)}{D(\vartheta_1)} \frac{i\beta_{11}\vartheta_1}{\alpha_{11}\beta_{11}x - (\alpha_{11}z + \beta_{11}z_*)\vartheta_1} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Пусть имеют место, например, условия  $b_1 < a_1 < b_2 < a_2$ . Точкам внутри характеристического конуса (являющегося огибающей плоскостей (1.1) в пространстве  $xzt$ )

$$x^2 + (z + z_*)^2 - a_1^2 t^2 = 0 \tag{1.3}$$

соответствуют комплексные значения  $\theta_1$ , значит, внутри него первые слагаемые (1.2) для смещений дадут величины, отличные от нуля. Это и есть область отраженной продольной волны.

Точкам на поверхности конуса (1.3) — на фронте волны — и вне соответствуют действительные значения  $\theta_1$ . Решив (1.1), получим

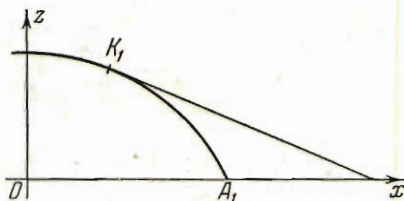
$$\theta_1 = \frac{xt + i(z + z_*)\sqrt{t^2 - [x^2 + (z + z_*)^2]/a_1^2}}{x^2 + (z + z_*)^2} \tag{1.4}$$

На фронте волны величина  $\theta_1$  монотонно возрастает от значения  $\theta_1 = 0$  в точке пересечения фронта с осью  $z$  до значения

$$\theta_1 = \frac{1}{a_1} \sqrt{1 - \frac{z_*^2}{a_1^2 t^2}}$$

в точке пересечения с осью  $x$ .

В первом квадранте из каждой точки кривой (1.3) проводим касательную вправо. Это будет одна из прямых (1.4), и на каждой касательной  $\theta_1$  имеет постоянную величину — ту же, что и в точке касания. Начиная от точки пересечения кривой (1.3) с осью  $z$  и до  $K_1$  — точки (1.3), где  $\theta_1 = 1/a_2$  — первые слагаемые из (1.2) — чисто мнимые величины и дают для смещений нуль, так как  $\theta_1$  действительно на фронте и, следовательно, вдоль соответствующей касательной вне фронта [как и всюду вне кривой (1.3) и на самой кривой (1.3)].



Фиг. 1

Однако на кривой (1.3) за точкой  $K_1$ , где  $\theta_1(K_1) = 1/a_2$ , хотя  $\theta_1$  и действительная величина, выражение для  $n_1(\theta_1)/D(\theta_1)$  при  $\theta_1 > 1/a_2$  будет содержать комплексные члены и смещения в этой зоне [по касательным к кривой (1.3)] вне фронта (1.3) (фиг. 1). Касательная в точке  $K_1$  является фронтом первого «непрямого» возмущения (головной волны). В точке  $K_2$ , где  $\theta_1(K_2) = 1/b_2$ , кривой (1.3) касается фронт еще одного

непрямого возмущения, так как в выражении для  $n_1(\theta_1)/D(\theta_1)$  при  $\theta_1 > 1/b_2$  появятся другие комплексные члены. Величина  $\vartheta_1$ , определенная (1.1\*), принимает комплексные значения в точках внутри характеристического конуса, являющегося огибающей плоскостей (1.1\*):

$$F \equiv 4(3b_1^2 z_*^2 X + a_1^2 Z^2)(X^2 + 3a_1^2 b_1^2 k^2 t^2 Z) - a_1^2 (9b_1^4 k^2 z_*^2 t - XZ)^2 = 0 \quad (1.3^*)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{a_1^2}, \quad X = x^2 + z^2 + z_*^2 - \frac{a_1^2}{b_1^2} z^2 - \frac{b_1^2}{a_1^2} z_*^2 + (a_1^2 - 2b_1^2) t^2$$

$$Z = b_1^2 t^2 - x^2 - z^2 - z_*^2 + \frac{2b_1^2}{a_1^2} z_*^2$$

Внутри кривой (1.3\*) вторые слагаемые из (1.2) дадут величины отличные от нуля. Это и есть область поперечной отраженной волны. Вне (1.3\*) значения  $\vartheta_1$  действительны. Решим (1.1\*), получим (см. [9])

$$\vartheta_1 = \frac{[xz - \sqrt{M}] [tz - \sqrt{N}] + i(z^2 - \nu) \sqrt{[tz - \sqrt{N}]^2 - b_1^{-2} \{(z^2 - \nu)^2 + [xz - \sqrt{M}]^2\}}}{(z^2 - \nu)^2 + [xz - \sqrt{M}]^2} \quad (1.4^*)$$

$$\beta_{11} = \frac{[t - \sqrt{N}] (z^2 - \nu) - i [xz - \sqrt{M}] \sqrt{[tz - \sqrt{N}]^2 - b_1^{-2} \{(z^2 - \nu)^2 + [xz - \sqrt{M}]^2\}}}{(z^2 - \nu)^2 + [xz - \sqrt{M}]^2}$$

где

$$M = (x^2 + z_*^2 - \nu) \nu - (z_*^2 - \nu) z^2$$

$$N = \left( t^2 - \frac{z_*^2}{a_1^2} + \frac{\nu}{a_1^2} \right) \nu - \left( \frac{\nu}{b_1^2} - \frac{z_*^2}{a_1^2} \right) z^2$$

При этом  $\nu$  — корень уравнения

$$\nu^3 + p_1 \nu^2 + p_2 \nu + p_3 = 0 \quad (1.5)$$

в котором

$$p_1 = b_1^2 \left( t^2 - \frac{z_*^2}{a_1^2} - \frac{x^2 + z^2 + z_*^2}{b_1^2} \right)$$

$$p_2 = -b_1^2 \left( t^2 - \frac{z^2}{b_1^2} - \frac{x^2 + z^2 + z_*^2}{a_1^2} \right) z_*^2$$

$$p_3 = -\frac{b_1^2}{a_1^2} z^2 z_*^4$$

Обозначим, как обычно:

$$p = -\frac{1}{3} p_1^2 + p_2, \quad q = \frac{2}{27} p_1^3 - \frac{1}{3} p_1 p_2 + p_3, \quad \cos \chi = -\frac{q}{2\sqrt{-(1/3)p^3}}$$

Конструкция корней (1.5) зависит от знака разрешителя  $\Delta$  этого уравнения:

$$\Delta = -\frac{1}{4 \cdot 27} \{-4p_1^3 p_3 + p_1^2 p_2^2 + 18p_1 p_2 p_3 - 4p_2^3 - 27p_3^2\} = -\frac{z_*^4}{4 \times 3^4 a_1^2} F$$

Легко показать следующее.

Когда  $\Delta > 0$ , лишь один корень (1.5) действительный его и надо выбрать (указывается выбор знаков):

$$v = -\frac{1}{3} p_1 + (-\frac{1}{2} q - \sqrt{\Delta})^{1/3} - p(-\frac{1}{2} q - \sqrt{\Delta})^{-1/3}$$

Когда  $\Delta = 0$ , надо выбрать двойной корень (заметим, что он действительный):

$$v = -\frac{1}{3} p_1 + \sqrt{\frac{1}{9} p_1^2 - \frac{1}{3} p_2}$$

Когда  $\Delta < 0$ , надо выбрать

$$v = -\frac{1}{3} p_1 + 2 \sqrt{-\frac{1}{3} p_2} \cos \frac{1}{3} \chi$$

Обозначим

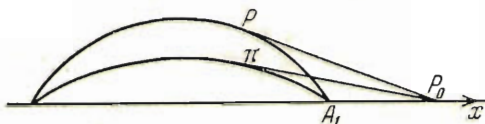
$$\delta \equiv [tz - \sqrt{N}]^2 - b_1^{-2} \{(z^2 - v)^2 + [xz - \sqrt{M}]^2\}$$

*Замечание 1.* Величины  $\Delta$  и  $\delta$  обращаются в нуль одновременно, когда точка попадает на кривую (1.3\*).

*Замечание 2.* Для уравнения  $t + \vartheta x - \beta z - \alpha z_* = 0$ , получающегося из (1.4\*) заменой  $x$  на  $-x$ , получится также уравнение (1.5) с тем же  $\Delta$ .

На  $\Delta = 0$  величина  $\vartheta_1$  действительна и значения  $\vartheta_1$  на фронте отраженной поперечной волны монотонно растут от  $\vartheta_1 = 0$  на пересечении фронта с осью  $z$  до

$$\vartheta_1 = \frac{1}{a_1} \sqrt{1 - \frac{z_*^2}{a_1^2 t^2}}$$



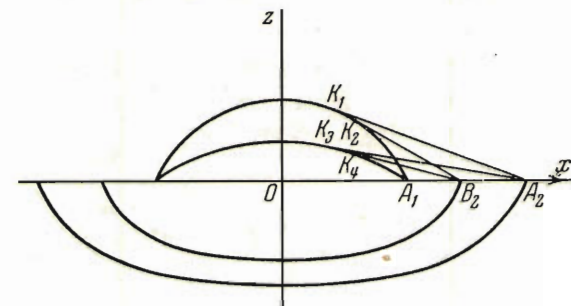
Фиг. 2

на пересечении с осью  $x$  в точке  $A_1$ , так как уравнения (1.1) и (1.1\*) совпадают при  $z = 0$  и, следовательно,  $\vartheta_1(A_1) = \theta_1(A_1)$ . Вообще, если из точки  $\Pi$  на фронте поперечной отраженной волны провести к этому

фронту касательную до точки  $P_0$  пересечения с осью  $x$ , а из  $P_0$  провести  $P_0P$ , касательную к (1.3) до точки  $P$  на (1.3), то

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\Pi) &= \vartheta_1(P_0) = \\ &= \theta_1(P_0) = \theta_1(P) \end{aligned}$$

т. е.  $\theta_1(P) = \vartheta_1(\Pi)$ . В точке  $K_3$ , где  $\vartheta_1(K_3) = 1/a_2$ , кривой (1.3\*) касается



Фиг. 3

фронт третьего непрямого возмущения, так как дробь  $n_2(\vartheta_1)/D(\vartheta_1)$  при  $\vartheta_1 > 1/a_2$  дает комплексные слагаемые в (1.2) от вторых членов, и величина смещений меняется. В точке  $K_4$ , где  $\vartheta_1(K_4) = 1/b_2$ , фронта поперечной отраженной волны касается фронт четвертого непрямого возмущения, так как при  $\vartheta_1 > 1/b_2$  в выражении для  $n_2(\vartheta_1)/D(\vartheta_1)$  появятся новые комплексные слагаемые.

Рассмотрим, как растут смещения при приближении по касательным к фронтам отраженных продольной (1.3) и поперечной (1.3\*) волн из зоны непрямого возмущения.

Изучим отдельно первые и вторые слагаемые из (1.2). Тогда будет получена оценка и для всей суммы.

Первые слагаемые растут при приближении к фронту (1.3) отраженной продольной волны так:

$$\frac{-1}{x - a_1^2 t \theta_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1(\theta_1)}{D(\theta_1)} i a_1 \theta_1 \sqrt{1 - a_1^2 \theta_1^2} \right\}$$

$$\frac{-1}{x - a_1^2 t \theta_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1(\theta_1)}{D(\theta_1)} i (1 - a_1^2 \theta_1^2) \right\}$$

Эти выражения отличаются от формул из [3] лишь коэффициентом отражения  $n_1/D$ , но так как  $\theta_1 = \text{const}$  вдоль касательной, то  $n_1/D = \text{const}$  и смещения возрастают также по гиперболическому закону при

$$\frac{x}{a_1^2 t} \rightarrow \theta_1$$

Рассмотрим вторые слагаемые (1.2) при приближении к точке  $K_3$ . На  $A_2 K_3$  величина  $\vartheta_1 = 1/a_2$  и в выражении  $D(\vartheta_1)$  заменяем

$$\alpha_{1a} = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}}, \quad \beta_{1a} = \sqrt{\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{a_2^2}}, \quad \alpha_{2a} = 0$$

Из уравнения прямой  $A_2 K_3$

$$t - \frac{x}{a_2} - z \beta_{1a} - z_* \alpha_{1a} = 0$$

имеем

$$z = D_0 x + D_1 \quad (D_0, D_1 = \text{const на } A_2 K_3) \quad (1.6)$$

При приближении к фронту отраженной поперечной волны (1.3\*) вдоль касательной  $A_2 K_3$  можно в  $\alpha_{11} \beta_{11} x - (\alpha_{11} z + \beta_{11} z_*) \vartheta_1$  поставить  $z$  из (1.6), получим  $D_2 x + D_3$ , т. е. второе слагаемое в (1.2) принимает вид:

$$\frac{D_4}{D_2 x + D_3}$$

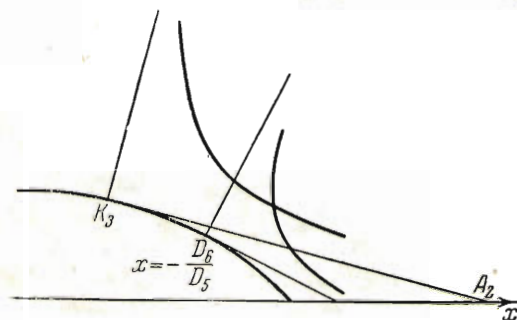
$$(D_2, D_3, D_4 = \text{const на } A_2 K_3)$$

и при стремлении точки  $(x, z)$  к точке  $K_3$  эта дробь возрастает по гиперболическому закону, так как  $x \rightarrow -D_3/D_2$ . Асимптоты этой гиперболы пересекаются в точке  $K_3$ .

Если двигаться к (1.3\*) вдоль другой касательной, с точкой касания  $(x_0, z_0)$ , то  $\vartheta_1 \neq 1/a_2$ , но  $\vartheta_1 \sim F_{x_0} [F(x_0, z_0)]$  из (1.3\*).

Уравнение касательной к  $F$

$$x F_{x_0} + z F_{z_0} - (x_0 F_{x_0} + z_0 F_{z_0}) = 0$$



Фиг. 4

Отсюда

$$z = D_5 x + D_6$$

где  $D_5$  и  $D_6$  — константы вдоль этой касательной. В формулах (1.2) в правой части получим вторые слагаемые в виде

$$\frac{D_7}{D_5 x + D_6}$$

и при стремлении точки из области головной волны к точке  $(x_0, z_0)$  на фронте отраженной поперечной волны, т. е. при  $x \rightarrow -D_6/D_5$ , эти слагаемые в (1.2) возрастают по гиперболическому закону. Координаты вершины этой гиперболы выражаются через  $D_5, D_6$  и  $D_7$ , т. е. через  $F_{x_0}$  и  $F_{z_0}$ , и их можно подсчитать, так как точка  $(x_0, z_0)$  задана.

Пусть  $t_0$  обозначает время вступления падающей волны,  $\tau_1$  и  $t_1$  — время вступления отраженных поперечной и продольной и, кроме того, введем обозначения

$$\begin{aligned} xz - \sqrt{M} &= \xi, & z^2 - v &= \zeta_1 \\ tz - \sqrt{N} &= \tau, & \xi^2 + \zeta_1^2 &= \rho^2 \\ \tau^2 - b_1^{-2} \rho^2 &\equiv \delta \end{aligned}$$

Падающая волна имеет фронт  $t_0 - a_1^{-1} r_0$  и смещения [3]

$$u_0 = \frac{xt}{r_0^2 \sqrt{t^2 - a_1^{-2} r_0^2}}, \quad v_0 = \frac{a_1 z_0 t}{r_0^2 \sqrt{t^2 - a_1^{-2} r_0^2}}$$

Считая  $t$  близким к  $t_0$ , имеем

$$u_0 \approx \frac{xt}{V_{a_1} \sqrt{2r_0^3} \sqrt{t - t_0}}, \quad v_0 \approx \frac{a_1 z_0 t}{V_{a_1} \sqrt{2r_0^3} \sqrt{t - t_0}}$$

В отраженной поперечной волне (внутри  $\Delta = 0$ )  $\delta > 0$ , кроме того, там  $t^2 - a_1^{-2} r_1^2 = d > 0$ , поэтому

$$\theta_1 = \frac{tx - iz_1 \sqrt{d}}{r_1^2}, \quad A_{11} = \frac{tz_1 - ix \sqrt{d}}{r_1^2} \quad (1.7)$$

Далее вычисляем

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{(tz_1 - ix \sqrt{d})(tx + iz_1 \sqrt{d})}{ir_1^4 V d}, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{(tz_1 - ix \sqrt{d})^2}{ir_1^4 V d} \quad (1.8)$$

Имеем также

$$\vartheta_1 = \frac{\tau \xi + i \zeta_1 V \delta}{\rho^2}, \quad \alpha_{11}(\xi, \zeta_1, \delta, \rho) = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \vartheta_1^2} \quad (1.9)$$

Рассмотрим производные

$$D_x \vartheta_1 = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad D_z \vartheta_1 = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.10)$$

где  $D_x \vartheta_1$  обозначает, что берется частная производная, когда  $z = \text{const}$ , а  $\partial \vartheta_1 / \partial x$  — частная производная, когда  $v = \text{const}$  (причем также и

$z = \text{const}$ ). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= l_1 + \frac{m_1}{V-\Delta} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= l_2 + \frac{m_2}{V-\Delta}, & \frac{\partial v}{\partial t} &= l_0 + \frac{m_0}{V-\Delta}, & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} &= G + \frac{H}{V\delta} \\ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} &= G_1 + \frac{H_1}{V\delta}, & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} &= G_2 + \frac{H_2}{V\delta}, & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} &= G_0 + \frac{H_0}{V\delta} \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $l$ ,  $m$ ,  $G$ ,  $H$  не имеют особенностей при  $\Delta = 0$ . Эти производные претерпевают разрыв при приближении к фронту отраженной поперечной волны, который дают первые множители следующих представлений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V\delta} &= \frac{1}{V\tau - b_1^{-1}\rho} \frac{1}{V\tau + b_1^{-1}\rho} \\ \frac{1}{V-\Delta} &= \frac{1}{v + \frac{1}{3}p_1 - \frac{1}{3}V p_1^2 - 3p_2} \frac{3V\sqrt{3}}{p_1^2 - 3p_2} \end{aligned}$$

Последнее получается из соотношения Кейли [10].

Обозначим

$$S(x, z) = \rho^2 (p_1^2 - 3p_2) \sqrt{a_1^{-2}\rho^4 - \xi^2\tau^2} \sqrt{b_1^{-1}\rho + \tau}$$

Подставляя (1.11) в (1.10), подсчитывая в (1.10) и вставляя в (1.2) вместе с (1.7) и (1.8), получим выражения смещений внутри отраженной поперечной волны (1.3\*).

Переходя в этих выражениях к пределу, когда точка  $(x, z)$  приближается к фронту (1.3\*), и выделяя разрывные множители, получим, так как первые слагаемые (1.2) на (1.3\*) ограничены, что на фронте отраженной поперечной волны смещения

$$\begin{aligned} u_1 &\approx \text{Re} \frac{n_2(\vartheta_1)}{D(\vartheta_1)} S(x, z) \frac{3V\sqrt{3}g_{21}}{(v + \frac{1}{3}p_1 - \frac{1}{3}V p_1^2 - 3p_2) V\tau - b_1^{-1}\rho} \\ v_1 &\approx \text{Re} \frac{n_2(\vartheta_1)}{D(\vartheta_1)} S(x, z) \frac{3V\sqrt{3}g_{11}}{(v + \frac{1}{3}p_1 - \frac{1}{3}V p_1^2 - 3p_2) V\tau - b_1^{-1}\rho} \end{aligned}$$

величины  $g_{21}$ ,  $g_{11}$  легко явно выразить через  $x$  и  $z$  при помощи (1.9). При  $x \rightarrow \infty$  и  $z$  ограниченном, на фронте (1.3\*), они имеют порядок относительно  $x$  седьмой и шестой соответственно, поэтому при  $z$  ограниченных

$$u_1 \approx x^{-\frac{3}{2}}, \quad v_1 \approx x^{-\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

Для некоторых значений  $\vartheta_1$  величина  $\text{Re}(n_2/D)$  обращается, вообще говоря, в нуль при определенных зависимостях между  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$  и плотностями первой и второй сред. Эти значения  $\vartheta_1$  проще искать в конкретных случаях. В этих точках главную роль играют головные волны, внутри которых смещения порядка  $x^{-1}$ . Вне (1.3\*)

$$\vartheta_1 = \frac{\xi\tau - \zeta_1 V\delta}{\rho^2} \quad (1.13)$$



Из (1.13) получаются выражения, аналогичные (1.11), которые дают возможность выписать смещения в различных точках фронтов третьего и четвертого непрямых возмущений.

Вблизи фронта отраженной продольной волны (1.3) вторые слагаемые (1.2) ограничены, первые же терпят разрыв. Из (1.7), (1.8) и (1.2) получается, что при  $x \rightarrow \infty$  и  $z$  ограниченном первые слагаемые в выражении (1.2) и, следовательно, смещения имеют порядок, как и в случае [3]:

$$u_1 \approx x^{-\frac{1}{2}}, \quad v_1 \approx x^{-\frac{3}{2}} \quad (1.14)$$

**§ 2. Осесимметрическая задача.** Полученные выражения (1.4\*) позволяют исследовать осесимметрическую задачу методом В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [11]. Перейдем к цилиндрическим координатам  $r$ ,  $\omega$ ,  $z$ . Как известно [11], если  $f$  — решение плоского волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\varphi(r, z, t) = \int_0^{2\pi} f(r \cos \omega, z, t) d\omega$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Смещения в осесимметрической задаче получаются интегрированием смещений плоской задачи

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x} \cos \omega d\omega, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial z} d\omega, \quad u_\omega = 0$$

для точечного источника типа центра расширения.

Потенциал источника вспомогательной плоской задачи пусть, как у Н. В. Зволинского и Л. П. Зайцева [12]:

$$f_0(x, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} + \frac{V\sqrt{1 - a_1^2 \theta_0^2}}{2\pi} \right\} = \operatorname{Re} F_0(\theta_0)$$

Тогда преобразованный источник — типа центра расширения:

$$\varphi_0(r, z, t) = \begin{cases} 1 - \frac{a_1 t}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} & \text{при } r^2 + z_0^2 < a_1^2 t^2 \\ 0 & \text{при } r^2 + z_0^2 > a_1^2 t^2 \end{cases}$$

Заметим, что

$$F_0'(\theta_0) = \frac{ia_1 \theta_0}{2\pi} \Phi_0'(\theta_0) \quad \left( \Phi_0'(\theta_0) = \ln(a_1 \theta_0 - i\sqrt{1 - a_1^2 \theta_0^2}), \Phi_0' = \frac{i}{A_{10}} \right)$$

Поэтому

$$q_0 = u_r = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{ia_1 \theta_0}{2\pi} u(r \cos \omega, z, t) \cos \omega d\omega$$

$$w_0 = u_z = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{ia_1 \theta_0}{2\pi} v(r \cos \omega, z, t) d\omega$$

В выражении для смещений в отраженной волне интеграл удобно разбить на сумму двух интегралов соответственно имеющимся в выражениях для смещений (1.2) плоской задачи двум слагаемым.

В первом интеграле введем переменную интегрирования

$$A = -\sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta_1^2} = \frac{a_1 t z_1 + r \cos \omega \sqrt{r^2 \cos^2 \omega + z_1^2 - a_1^2 t^2}}{r^2 \cos^2 \omega + z_1^2} \quad (2.1)$$

Во втором интеграле введем переменную интегрирования

$$\beta = -\sqrt{\frac{1}{b_1^2} - \vartheta_1^2} = \frac{[tz - \sqrt{N_\omega}] (z^2 - v_\omega)}{(z^2 - v_\omega)^2 + [-rz \cos \omega + \sqrt{M_\omega}]^2} + \quad (2.1^*)$$

$$+ \frac{[-rz \cos \omega + \sqrt{M_\omega}] \sqrt{b_1^{-2} \{ (z^2 - v_\omega)^2 + [-rz \cos \omega + \sqrt{M_\omega}]^2 \} - [tz - \sqrt{N_\omega}]^2}}{(z^2 - v_\omega)^2 + [-rz \cos \omega + \sqrt{M_\omega}]^2}$$

где  $v_\omega$  — корень уравнения

$$\frac{1}{b_1^2} v_\omega^3 + \left( t^2 - \frac{z_*^2}{a_1^2} - \frac{r^2 \cos^2 \omega + z^2 + z_*^2}{b_1^2} \right) v_\omega^2 -$$

$$- z_*^2 \left( t^2 - \frac{z^2}{b_1^2} - \frac{r^2 \cos^2 \omega + z^2 + z_*^2}{a_1^2} \right) v_\omega - \frac{z^2 z_*^4}{a_1^2} = 0$$

Выражения для  $\delta_\omega$ ,  $M_\omega$ ,  $N_\omega$  получаются из выражений для  $\delta$ ,  $M$ ,  $N$ , входящих в (1.5), заменой  $v$  на  $v_\omega$  и  $x$  на  $r \cos \omega$ . В дальнейшем будем обозначать  $\delta_0$ ,  $v_0$ ,  $M_0$ ,  $N_0$  значения  $\delta_\omega$ ,  $v_\omega$ ,  $M_\omega$ ,  $N_\omega$  при  $\omega = 0$ , т. е., когда  $\cos \omega = 1$ , и через  $\delta_\pi$ ,  $v_\pi$ ,  $M_\pi$ ,  $N_\pi$  при  $\omega = \pi$ , когда  $\cos \pi = -1$ .

Интегрирование будем производить от 0 до  $\pi$ , так как  $\cos \omega$  — четная функция от  $\omega$ . Оно заменится интегрированием по комплексным путям в плоскостях  $A$  и  $\beta$ . Форма этих путей зависит от точки пространства и момента времени, для которых вычисляются смещения. Поэтому, написав сумму интегралов, надо фиксировать точку пространства и момент времени, затем найти пути интегрирования  $l$  для первого интеграла и  $\lambda$  во втором.

Зададим  $z$  и  $r$ . Пусть  $z_1 \leq a_1 t \leq r_1$  [(при  $z_1 > a_1 t$  имеем  $\varphi_0 = 0$ , так как  $f_0 \equiv 0$ ). При  $\omega = 0$

$$A_0 = \frac{z_1 t}{r_1^2} + \frac{r}{a_1 r_1^2} \sqrt{r_1^2 - a_1^2 t^2} \quad (2.2)$$

Когда  $\omega$  меняется от 0 до  $c = \arccos [ \sqrt{(a_1^2 t^2 - z_1^2)} / r ]$ , точка  $A$  движется по действительной оси от точки  $A_0$  до точки  $A_c = z_1 / a_1 t$ . Далее контур интегрирования пересекает действительную ось при  $\omega = 1/2 \pi$  в точке  $A_{1/2, \pi} = a_1 t / z_1$ , а затем при  $\omega = \pi - c$  контур интегрирования возвращается в точку  $A_c = z_1 / a_1 t$  и идет по действительной оси вправо до точки  $A_\pi = A_0$ . Точка  $A_0 = A_\pi$  при изменении  $t$  от  $z_1 / a_0$  до  $r_1 / a_1$  движется от  $a_1^{-1} < A_{1/2, \pi}$  до  $z_1 / a_1 r$ . С момента  $a_1 t_1 = r_1$  точки  $A_0$  и  $A_\pi$  сходят с действительной оси. В этот момент в точку  $(r, z)$  вступает отраженная продольная волна.

Пусть  $a_1 t > r_1$ , тогда

$$A_0 = \frac{z_1 t}{r_1^2} + i \frac{r}{a_1 r_1^2} \sqrt{a_1^2 t^2 - r_1^2}, \quad A_\pi = \frac{z_1 t}{r_1^2} - i \frac{r}{a_1 r_1^2} \sqrt{a_1^2 t^2 - r_1^2} \quad (2.3)$$

Контур становится незамкнутым [12].

Когда  $t < b_1^{-1}z + a_1^{-1}z_*$  (т. е.  $t$  таково, что  $\delta_{1/2\pi} < 0$ ), то  $\psi_1 = 0$ , так как поперечный потенциал соответствующей плоской задачи — тождественный нуль. Пусть  $t \geq b_1^{-1}z + a_1^{-1}z_*$  (что равносильно  $\delta_{1/2\pi} \geq 0$ ,  $b_1^{-1}(z^2 - \nu_{1/2\pi}) \leq tz - \sqrt{N_{1/2\pi}}$ , так как  $M_{1/2\pi} = 0$  и  $\cos 1/2\pi = 0$ ; следовательно,  $\xi_{1/2\pi} = 0$ ) и такое, что  $\delta_0 < 0$ . При  $\omega = 0$

$$\beta_0 = \frac{[tz - \sqrt{N_0}](z^2 - \nu_0) + [-rz + \sqrt{M_0}] \sqrt{b_1^{-2}\{z^2 - \nu_0\}^2 + [-rz + \sqrt{M_0}]^2} - [tz - \sqrt{N_0}]^2}{(z^2 - \nu_0)^2 + [-rz + \sqrt{M_0}]^2} \quad (2.2^*)$$

При изменении  $\omega$  от нуля до  $\gamma$  такого, что  $\delta_\gamma = 0$  (при этом  $\delta_\omega < 0$  обязательно и при  $\omega > \gamma$ , так как  $\delta_{1/2\pi} < 0$ ), точку  $\beta$  контура  $\lambda$  движется вдоль действительной оси от точки  $\beta_0$  до точки

$$\beta_\gamma = \frac{z^2 - \nu_\gamma}{b_1^2 [tz - \sqrt{N_\gamma}]}$$

При дальнейшем изменении  $\omega$  будет  $\delta_\omega < 0$ , контур интегрирования в точке  $\beta_\gamma$  уходит от действительной оси, а затем вновь пересекает действительную ось в точке

$$\beta_{1/2\pi} = \frac{tz - \sqrt{N_{1/2\pi}}}{z^2 - \nu_{1/2\pi}}$$

так как

$$[-rz \cos \omega + \sqrt{M_\omega}]_{\omega=1/2\pi} = \xi_{1/2\pi} = 0 \quad \text{при } \omega = \frac{1}{2}\pi.$$

При  $\omega = \pi - \gamma$  контур интегрирования  $\lambda$  возвращается в точку  $\beta_\gamma$  из нижней полуплоскости и идет до точки  $\beta_0 = \beta_\pi$ , так как

$$\sqrt{b_1^{-2}(\zeta_{1\omega}^2 + \xi_\omega^2) - \tau_\omega^2}$$

в (2.1\*) меняет знак при переходе через точку  $\beta_{1/2\pi}$ .

Точка  $\beta_0 = \beta_\pi$  при изменении  $t$  от  $b_1^{-1}z + a_1^{-1}z_*$  (когда  $\delta_0 < 0$ ) до  $\delta_0 = 0$  движется

$$\text{от } \frac{1}{b_1} = \beta_0 \left( t = \frac{z}{b_1} + \frac{1}{a_1} z_* \right) < \beta_{\frac{1}{2}\pi} \quad \text{до } \frac{z^2 - \nu_0}{b_1 [tz - \sqrt{N_0}]} = \beta_0 (\delta_0 = 0) < \frac{1}{b_1}$$

В момент (для фиксированных  $r, z$ ), когда  $\delta_0 = 0$ , точки  $\beta_0$  и  $\beta_\pi$  сходят с действительной оси. В этот момент в точки  $r, z$  вступает отраженная поперечная волна.

Пусть  $t$  таково, что  $\delta_0 > 0$ . Тогда  $\beta_0$  и  $\beta_\pi$  не лежат на действительной оси и выражаются так:

$$\beta_0 = \beta_0(z, r) = \frac{[tz - \sqrt{N_0}](z^2 - \nu_0) + i[-rz + \sqrt{M_0}] \sqrt{[tz - \sqrt{N_0}]^2 - b_1^{-2}\{z^2 - \nu_0\}^2 + [-rz + \sqrt{M_0}]^2}}{(z^2 - \nu_0)^2 + [-rz + \sqrt{M_0}]^2}$$

$$\beta_\pi = \beta_0(z, -r) \quad (2.3^*)$$

Вторая формула вытекает из первой, так как  $v_\pi = v_0$ ,  $M_\pi = M_0$ ,  $N_\pi = N_0$  (эти величины содержат  $x^2$ ). Смещения в отраженной волне имеют вид:

$$q = 2\operatorname{Re} \frac{a_1}{2\pi} \left\{ \int_l \frac{n_1(A)}{D(A)} \frac{(z_1 A - a_1 t) dA}{r r_1 \sqrt{(A - A_0)(A_\pi - A)}} + \int_\lambda \frac{n_2(\beta)}{D(\beta)} \frac{\beta^2 (t - \beta z - \sqrt{\beta^2 - k^2} z_*) d\beta}{V \sqrt{\beta^2 - k^2} \sqrt{(\beta - \beta_0)(\beta_\pi - \beta)}} \right\} \quad (2.4)$$

$$w = 2\operatorname{Re} \frac{a_1}{2\pi} \left\{ \int_l \frac{n_1(A)}{D(A)} \frac{-A dA}{r_1 V \sqrt{(A - A_0)(A_\pi - A)}} + \int_\lambda \frac{n_2(\beta)}{D(\beta)} \frac{r \beta (b_1^{-2} - \beta^2) d\beta}{V \sqrt{\beta^2 - k^2} \sqrt{(\beta - \beta_0)(\beta_\pi - \beta)}} \right\}$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} \sqrt{(\beta - \beta_0)(\beta_\pi - \beta)} &= i \sqrt{(t - \beta z - \alpha z_*) (t - \beta z - \alpha z_* + \delta r)} = \\ &= \sqrt{\delta^2 r^2 - (t - \beta z - \alpha z_*)^2} \end{aligned}$$

В подынтегральных выражениях имеются радикалы:  
в первых слагаемых

$$\begin{aligned} \sqrt{A^2 - \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right)} &\equiv \sqrt{A^2 - h^2} \\ \sqrt{A^2 - \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{b_2^2}\right)} &\equiv \sqrt{A^2 - g^2} \quad g < h \end{aligned}$$

во вторых слагаемых

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{a_1^2}\right)} &\equiv \sqrt{\beta^2 - k^2} \\ \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{b_2^2}\right)} &\equiv \sqrt{\beta^2 - m^2} \quad (k < m < n) \\ \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right)} &\equiv \sqrt{\beta^2 - n^2} \end{aligned}$$

Поэтому в плоскости комплексного переменного  $A$  надо провести разрез  $(-h, h)$ , в плоскости  $\beta$  — разрез  $(-n, n)$ . Положение точек разветвления  $h$  и  $n$  (а также  $g, k, m$ ) зависит от упругих констант и определяет результат интегрирования.

1°. Когда

$$h < \frac{z_1}{r_1} \quad (2.5)$$

(это те точки, куда отраженная продольная волна вступает раньше непрямого возмущения) и  $a_1 t > r_1$  ( $a_1 t$  близко к  $r_1$ ), то контур  $l$  преобразуем в прямолинейный отрезок  $A_0 A_\pi$ , а в отношении  $n_1(A)/D(A)$  положим  $A \approx z_1/a_1 r_1$ . Тогда для первых слагаемых (2.4) [вторые нули в случае (2.5)], обозначив их  $q_{11}$  и  $w_{11}$ , получим

$$q_{11} \approx \frac{n_1(z^0) t r}{D(z^0) r_1^3}, \quad w_{11} \approx \frac{n_1(z^0) t z_1 z_*}{D(z^0) r_1^3} \quad \left(z^0 = \frac{z_1}{a_1 r_1}\right) \quad (2.6)$$

2°. Если

$$n < \frac{z^2 - v_0}{b_1 [t z - \sqrt{N_0}]} \quad (2.5^*)$$

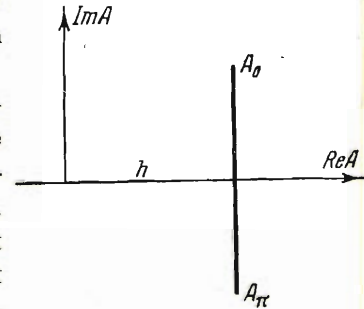
и  $t$  таково, что  $\delta_0 > 0$ , то в точки  $r, z$  вступает отраженная поперечная волна. В плоскости  $\beta$  контур  $\lambda$  преобразуем в отрезок  $\beta_0\beta_\pi$  и в  $n_2/D$  положим  $\delta_0 \approx 0$  (первые вступления); для вторых слагаемых (2.4), обозначив их  $q_{12}, w_{12}$ , получим

$$q_{12} \approx \frac{n_2(\zeta^\circ)}{D(\zeta^\circ)} [\zeta^\circ]^2 \{t - \zeta^\circ z + \sqrt{[\zeta^\circ]^2 - k^2 b_1^4 z_*^2}\}$$

$$w_{12} \approx \frac{n_2(\zeta^\circ)}{D(\zeta^\circ)} [\zeta^\circ]^2 \frac{\xi_0^2}{b_1^4 \tau_0^2} r \quad \left( \zeta^\circ \equiv \frac{\zeta_{10}}{b_1^2 \tau_0} = \frac{z^2 - v_0}{b_1^2 [tz - \sqrt{N_0}]} \right) \quad (2.6^*)$$

При  $a_1 t < r_1$  контур  $l$  замкнут и не содержит внутри особых точек, поэтому  $q_{11} = w_{11} = 0$ . При  $t$  таком, что для данной точки  $\delta_0 < 0$ ,  $\lambda$  замкнут и без особых точек внутри, поэтому  $q_{12} = w_{12} = 0$ ; поперечная отраженная волна также не вступила.

Пусть  $g < z_1/r_1 < h$ , тогда  $l$  будет незамкнутым и при  $a_1 t < r_1$  интеграл по  $l$  все же отличен от нуля, и приводится к сумме интегралов по отрезкам  $[z_1/r_1, h]$ ,  $[h, z_1/r_1]$ . Обход вокруг точки  $h$  дает нуль. Интегралы дают выражения для смещений на фронтах первого непрямого возмущения. Когда  $t$  возрастает и становится  $a_1 t > r_1$ , то  $A_0$  и  $A_\pi$  принимают комплексные и сопряженные значения (2.3). Контур интегрирования  $l$  можно деформировать так, чтобы он шел от точки  $A_0$  до точки  $Q$  ( $g < Q < h$ ) на разрезе, затем по верхней части разреза  $Qh$ , вокруг точки  $h$ , по нижней части разреза и, наконец, по  $QA_\pi$ . Интегралы по участкам  $A_0Q$  и  $QA_\pi$  дают смещения в отраженной продольной волне, в окрестности ее фронта. Обозначим время вступления первого непрямого возмущения  $t_{1H}$ , второго  $t_{2H}$ , третьего  $t_{3H}$ , четвертого  $t_{4H}$ .



Фиг. 5

Пусть  $r$  и  $z$  таковы, что  $z_1/r_1 < g$ . Тогда точки  $A_0 = A_\pi$  (при  $a_1 t < r_1$ ) с ростом  $t$  движутся влево вдоль действительной оси. Пока  $t < t_{1H}$ , то  $q = w = 0$ , когда же  $t_{1H} < t < t_{2H} = r_1/b_2 + z, g$ , то в это время  $g < A_0 = A_\pi < h$ . При дальнейшем росте  $t$ , когда  $t_{2H} = r_1/b_2 + z_1 g < t < r_1$ ,  $q_{2H}$  и  $w_{2H}$  состоят из двух слагаемых. Первое от интеграла по  $[g, h]$  и  $[h, g]$  и второе от интеграла по  $[A_0, g]$  и  $[g, A_\pi]$ , дающее смещения на втором прямом возмущении.

При дальнейшем росте  $t$ , так, что становится  $a_1 t \geq r_1$ , вступает фронт продольной отраженной волны, смещения на котором выражаются через интегралы по кривым  $A_0Q$  и  $QA_\pi$ . Пусть

$$m < \frac{z^2 - v_0}{b_1^2 [tz - \sqrt{N_0}]} < n \quad (2.7)$$

Пусть при этом  $t$  таково, что  $\delta_0 < 0$ . При возрастании  $t$  точка  $\beta_0 = \beta_\pi$  движется в плоскости  $\beta$  влево и при  $t > r/a_2 + zn + z_1 h$  становится  $\beta_0 = \beta_\pi < n$ . Это видно из (2.3\*). Контур  $\lambda$  можно деформировать в отрезок  $[\beta_0, n]$ , обход вокруг  $n$  и отрезок по нижнему берегу разреза  $[n, \beta_0]$ .

Получаются смещения из вторых слагаемых (2.4) для фронта третьего непрямого возмущения. Тут надо помнить, что  $\delta_0 = \delta_\pi$  в этой части, где он вступает сразу после первого.

Когда  $t$  растёт, то помимо (2.7) удовлетворяется условие  $\delta_0 > 0$  и в точку вслед за третьим непрямым возмущением вступает отражённая поперечная волна, смещения в которой берём из подсчёта интегралов по линиям  $\beta_0 Q$  и  $Q\beta_\pi$ . Пусть

$$\frac{z^2 - v_0}{b_1 [tz - V N_0]} > n \quad (2.8)$$

Когда становится  $t_{4H} = r/b_2 + mz + gz < t$ , но  $t$  таково ещё, что  $\delta_0 < 0$ , вступает четвертое не прямое возмущение. Смещения на фронте выписываются после подсчёта интегралов по отрезкам  $[\beta_0, m]$ ,  $[m, \beta_\pi]$ .

Последовательность вступления фронтов волн в данную точку зависит от величины упругих констант.

Поступила 23 II 1954

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний в книге Франка Ф. и Мизеса Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.
2. Смирнов В. И. и Соболев С. Л. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques. Труды сейсмолог. ин-та АН СССР, № 20, 1932.
3. Зволлинский Н. В. и Зайцев Л. П. Исследование головной волны, возникающей на границе раздела двух упругих жидкостей. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 1, 1951.
4. Salm W. Über die Energie der Mintropwelle. Beiträge zur angewandten Geophysik. Bd. 4, 1934.
5. Weil H. Ausbreitung electromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter. Annalen der Physik, Bd. 60, 1919.
6. Бреховских Л. М. Отражение и преломление сферических волн. Успехи физических наук, т. 38, вып. 1, 1949.
7. Krüger M. Die Theorie der in endlicher Entfernung von der Trennungsebene zweier Medien erregten Kugelwelle für endliche Brechungsindizes. Zeitschrift für Physik, Bd. 121, 1943.
8. Гоголадзе В. Г. Преломление и отражение плоских волн. Общая теория граничных волн Релея. Труды сейсмолог. ин-та АН СССР, № 125, 1947.
9. Briot Ch. et Bouquet. Leçons de Géométrie analytique. 1911.
10. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и числении бесконечно малых. ОНТИ, 1936.
11. Смирнов В. И. и Соболев С. Л. Sur l'application de la méthode nouvelle à l'étude des vibrations élastiques dans l'espace à symétrie axiale. Труды сейсмолог. ин-та АН СССР, № 29, 1933.
12. Зайцев Л. П. и Зволлинский Н. В. Исследование осесимметричной головной волны, возникающей на плоской границе раздела двух упругих жидкостей. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 5, 1951.