Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПОДКОВООБРАЗНЫЙ ВИХРЬ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ

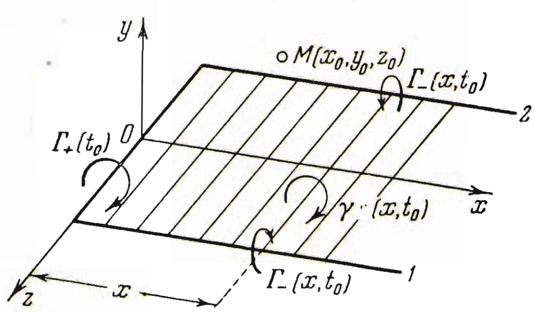
С. М. Белоцерковский
(Москва)

Исследуется поле скоростей, образующееся в идеальной несжимаемой жидкости от присоединенного вихря конечного размаха, напряженность которого $\Gamma_+(t)$ меняется со временем, и от соответствующей системы свободных вихрей. При этом предполагается, что скорость сноса свободных вихрей U_0 постоянна по величине и направлению. В случае $\Gamma_+ = \mathrm{const}$ получается хорошо известная система подковообразных вихрей. При напряженности присоединенного вихря Γ_+, зависящей от времени, от него будут отходить свободные вихри, оси которых параллельны оси присоединенного. Кроме того, напряженность каждого из двух свободных вихревых шнуров, параллельных скорости U_0, будет меняться как вдоль длины шнура, так и по времени t.

Полученные в работе результаты дают возможность перейти к решению задачи о пространственном неустановившемся движении произвольной слабо изогнутой несущей поверхности.

§ 1. Установившееся движение. Приведем основные соотношения для поля скоростей, вызванного подковообразным вихрем в случае установившегося движения. Пусть размах присоединенного вихря равен l, напряженность вихря равна Γ_+. Выберем систему координат так, как это показано на фиг. 1, направив ось x параллельно свободным вихрям *1* и *2*. Напряженность присоединенного вихря представим в виде

$$\Gamma_+ = U_0 l \Gamma \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

где Γ — некоторая безразмерная постоянная. Суммарные скорости W_x, W_y, W_z будут складываться из скоростей U_x, U_y, вызванных присоединенным вихрем, и скоростей V_y, V_z, вызванных свободными вихрями, причем, очевидно, $U_z = 0$, $V_x = 0$. Введем безразмерные скорости w_x, w_y, w_z, положив:

$$W_x = \frac{U_0\Gamma}{2\pi} w_x, \qquad W_y = \frac{U_0\Gamma}{2\pi} w_y, \qquad W_z = \frac{U_0\Gamma}{2\pi} w_z \qquad (1.2)$$

Аналогично вводятся и безразмерные скорости от присоединенного и свободных вихрей u_x, u_y и v_y, v_z.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ есть точка, в которой вычисляются скорости. В качестве характерного линейного размера будем брать половину размаха присоединенного вихря $^1/_2\, l$. Безразмерные координаты точки M обозначим ξ_0, η_0, ζ_0, где

$$\xi_0 = \frac{2x_0}{l}, \qquad \eta_0 = \frac{2y_0}{l}, \qquad \zeta_0 = \frac{2y_0}{l} \tag{1.3}$$

Легко видеть, что

$$\begin{gathered} w_x(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = u_x(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \\ w_y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = u_y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + v_y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \\ w_z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = v_z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \end{gathered} \tag{1.4}$$

Путем несложных вычислений можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_x(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) &= \frac{\eta_0}{\xi_0^2 + \eta_0^2}\left(\frac{1-\zeta_0}{r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0)} + \frac{1+\zeta_0}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}\right) \\ u_y(\xi_0, \eta_0, \zeta) &= -\frac{\xi_0}{\xi_0^2 + \eta_0^2}\left(\frac{1-\zeta_0}{r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0)} + \frac{1+\zeta_0}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}\right) \\ v_y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) &= -\frac{1-\zeta_0}{\eta_0^2 + (1-\zeta_0)^2}\left(1 + \frac{\xi_0}{r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0)}\right) - \\ &\quad - \frac{1+\zeta_0}{\eta_0^2 + (1+\zeta_0)^2}\left(1 + \frac{\xi_0}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}\right) \\ v_z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) &= -\frac{\eta_0}{\eta_0^2 + (1-\zeta_0)^2}\left(1 + \frac{\xi_0}{r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0)}\right) + \\ &\quad + \frac{\eta_0}{\eta_0^2 + (1+\zeta_0)^2}\left(1 + \frac{\xi_0}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}\right) \\ r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) &= \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + (1+\zeta_0)^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

В работе [1] имеются подробные таблицы, при помощи которых легко определить безразмерные скорости w_y.

§ 2. Общий случай неустановившегося движения. Пусть напряженность присоединенного вихря меняется со временем:

$$\Gamma_+ = \Gamma_+(t_0) \tag{2.1}$$

На основании закона о постоянстве циркуляции изменение напряженности присоединенного вихря будет сопровождаться сходом свободных вихрей, которые будут сноситься потоком вниз по течению. Как уже отмечалось, эту скорость сноса U_0 мы будем считать постоянной по величине и направлению. Введем такую же систему координат, как и при установившемся движении, направив ось x вдоль скорости U_0 (фиг. 1). В соответствии с приближениями, принятыми при решении задачи о неустановившемся движении в линейной постановке, будем считать, что все свободные вихри движутся в плоскости xz.

Из-за того, что напряженность присоединенного вихря меняется по времени, от него будут отходить свободные вихри, оси которых параллельны оси z. Кроме того, напряженность каждого из свободных вихревых шнуров *1* и *2*, оси которых параллельны оси x, в момент схода с присоединенного вихря должна быть равна напряженности присоединенного вихря в этот момент времени. Рассмотрим сечение $x = \mathrm{const}$

в момент t_0 и на основании указанных соображений определим здесь погонную интенсивность вихревого слоя $\gamma(x, t_0)$ и напряженность свободных вихревых шнуров $\Gamma_-(x, t_0)$ (фиг. 1). Так как указанный вихревой слой сошел с присоединенного вихря в момент $\tau = t_0 - x / U_0$, то

$$\gamma(x, t_0) = -\frac{1}{U_0}\left[\frac{d\Gamma_+(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau = t_0 - x/U_0} \tag{2.2}$$

и аналогично

$$\Gamma_-(x, t_0) = \Gamma_+(t_0 - x / U_0) \tag{2.3}$$

Скорости от присоединенного вихря в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ можно найти при помощи формул, приведенных в предыдущем параграфе:

$$U_x = \frac{\Gamma_+(t_0)}{2\pi l} u_x(\xi_0, \eta_0, \zeta_0), \qquad U_y = \frac{\Gamma_+(t_0)}{2\pi l} u_y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0), \qquad U_z = 0 \tag{2.4}$$

Далее рассмотрим пелену свободных вихрей, которая, вообще говоря, простирается от присоединенного вихря до бесконечности. Используя известные формулы для скоростей, вызываемых вихревым отрезком, определим в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ скорости от элементарной полоски ширины dx. Интегрируя полученные выражения по x от 0 до ∞, найдем скорости V_x', V_y', V_z', вызываемые указанной пеленой. Как и раньше, все линейные размеры будем относить к $^1/_2 l$, после чего получим

$$V_x' = \frac{\eta_0}{4\pi}\left[(1-\zeta_0)\int_0^\infty \frac{\gamma(\xi, t_0)\, d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2+\eta_0^2]\, R^{3/2}(\xi_0-\xi, \eta_0, -\zeta_0)} + \right.$$
$$\left. + (1+\zeta_0)\int_0^\infty \frac{\gamma(\xi, t_0)\, d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2+\eta_0^2]\, R^{3/2}(\xi_0-\xi, \eta_0, \zeta_0)}\right]$$

$$V_y' = -\frac{1}{4\pi}\left[(1-\zeta_0)\int_0^\infty \frac{\gamma(\xi, t_0)(\xi_0-\xi)\, d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2+\eta_0^2]\, R^{3/2}(\xi_0-\xi, \eta_0, -\zeta_0)} + \right.$$
$$\left. + (1+\zeta_0)\int_0^\infty \frac{\gamma(\xi, t_0)(\xi_0-\xi)\, d\xi}{[(\xi_0-\xi)^2+\eta_0^2]\, R^{3/2}(\xi_0-\xi, \eta_0, \zeta_0)}\right] \tag{2.5}$$

$$V_z' = 0$$

$$R(\xi_0-\xi, \eta_0, \zeta_0) = \sqrt{(\xi_0-\xi)^2+\eta_0^2+(1+\zeta_0)^2}$$

Чтобы определить скорости от свободных вихревых шнуров *1* и *2* (фиг. 1), напишем выражения для элементарных скоростей, вызываемых бесконечно малыми отрезками dx вихревых шнуров. Интегрируя эти соотношения по x от 0 до ∞, найдем интересующие нас скорости

$$V_x'' = 0$$

$$V_y'' = -\frac{1}{2\pi l}\left[(1-\zeta_0)\int_0^\infty \frac{\Gamma_-(\xi, t_0)\, d\xi}{R^{3/2}(\xi_0-\xi, \eta_0, -\zeta_0)} + (1+\zeta_0)\int_0^\infty \frac{\Gamma_-(\xi, t_0)\, d\xi}{R^{3/2}(\xi_0-\xi, \eta_0, \zeta_0)}\right] \tag{2.6}$$

$$V_z'' = -\frac{\eta_0}{2\pi l}\left[\int_0^\infty \frac{\Gamma_-(\xi, t_0)\, d\xi}{R^{3/2}(\xi_0-\xi, \eta_0, -\zeta_0)} - \int_0^\infty \frac{\Gamma_-(\xi, t_0)\, d\xi}{R^{3/2}(\xi_0-\xi, \eta_0, \zeta_0)}\right]$$

Складывая рассмотренные выше скорости, получим суммарные скорости:

$$W_x = U_x + V_x', \qquad W_y = U_y + V_y' + V_y'', \qquad W_z = V_z'' \tag{2.7}$$

§ 3. Поле скоростей в случае, когда напряженность присоединенного вихря изменяется по гармоническому закону. Пусть напряженность присоединенного вихря меняется со временем по закону синуса:

$$\Gamma_+ (t_0) = U_0 l \Gamma \sin pt_0 \tag{3.1}$$

где Γ — некоторая безразмерная постоянная, а p — круговая частота.

Тогда на основании формул (2.2) и (2.3) находим

$$\begin{aligned} \gamma (\xi, t_0) &= -2U_0 \Gamma q (\sin pt_0 \sin q\xi + \cos pt_0 \cos q\xi) \\ \Gamma_- (\xi, t_0) &= U_0 l \Gamma (\sin pt_0 \cos q\xi - \cos pt_0 \sin q\xi) \end{aligned} \qquad \left(q = \frac{pl}{2U_0}\right) \tag{3.2}$$

где q — безразмерная круговая частота.

Подставляя выражения (3.2) в формулы (2.5) и (2.6), получим соотношения для скоростей от присоединенных и свободных вихрей в рассматриваемом случае. Эти соотношения можно представить в виде:

$$U_x = \frac{U_0 \Gamma}{2\pi} u_x (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \sin pt_0, \qquad U_y = \frac{U_0 \Gamma}{2\pi} u_y (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \sin pt_0 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} V_x' &= \frac{U_0 \Gamma}{2\pi} q \left[v_{x1}' (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) \sin pt_0 + v_{x2}' (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) \cos pt_0\right] \\ V_y' &= \frac{U_0 \Gamma}{2\pi} q \left[v_{y1}' (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) \sin pt_0 + v_{y2}' (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) \cos pt_0\right] \\ V_y'' &= \frac{U_0 \Gamma}{2\pi} \left[v_{y1}'' (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) \sin pt_0 + v_{y2}'' (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) \cos pt_0\right] \\ V_z'' &= \frac{U_0 \Gamma}{2\pi} \left[v_{z1}'' (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) \sin pt_0 + v_{z2}'' (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) \cos pt_0\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Безразмерные скорости u_x и u_y определяются равенствами (1.5), выражения для остальных безразмерных скоростей могут быть получены при помощи следующих интегралов:

$$\begin{aligned} J_1 (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) &= \int_0^\infty \frac{\sin q\xi d\xi}{[(\xi_0 - \xi)_0^2 + \eta_0^2] R (\xi_0 - \xi, \eta_0, \xi_0)} \\ J_2 (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) &= \int_0^\infty \frac{\cos q\xi d\xi}{[(\xi_0 - \xi)^2 + \eta_0^2] R (\xi_0 - \xi, \eta_0, \zeta_0)} \\ J_3 (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) &= \int_0^\infty \frac{\sin q\xi (\xi_0 - \xi) d\xi}{[(\xi_0 - \xi)^2 + \eta_0^2] R (\xi_0 - \xi, \eta_0, \zeta_0)} \\ J_4 (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) &= \int_0^\infty \frac{\cos q\xi (\xi_0 - \xi) d\xi}{[(\xi_0 - \xi)^2 + \eta_0^2] R (\xi_0 - \xi, \eta_0, \zeta_0)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$J_5 (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) = \int_0^\infty \frac{\sin q\xi d\xi}{R^{3/2} (\xi_0 - \xi, \eta_0, \zeta_0)} \qquad J_6 (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) = \int_0^\infty \frac{\cos q\xi d\xi}{R^{3/2} (\xi_0 - \xi, \eta_0, \zeta_0)}$$

Для указанных безразмерных скоростей имеют место зависимости:

$$
\begin{aligned}
v_{x1}' &= -\eta_0\left[(1-\zeta_0)J_1(\xi_0,\ \eta_0,\ -\zeta_0,\ q) + (1+\zeta_0)J_1(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\right]\\
v_{x2}' &= -\eta_0\left[(1-\zeta_0)J_2(\xi_0,\ \eta_0,\ -\zeta_0,\ q) + (1+\zeta_0)J_2(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\right]\\
v_{y1}' &= \quad (1-\zeta_0)J_3(\xi_0,\ \eta_0,\ -\zeta_0,\ q) + (1+\zeta_0)J_3(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\\
v_{y2}' &= \quad (1-\zeta_0)J_4(\xi_0,\ \eta_0,\ -\zeta_0,\ q) + (1+\zeta_0)J_4(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\\
v_{y1}'' &= -(1-\zeta_0)J_6(\xi_0,\ \eta_0,\ -\zeta_0,\ q) - (1+\zeta_0)J_6(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) \qquad (3.6)\\
v_{y2}'' &= \quad (1-\zeta_0)J_5(\xi_0,\ \eta_0,\ -\zeta_0,\ q) + (1+\zeta_0)J_5(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\\
v_{z1}'' &= -\eta_0\left[J_6(\xi_0,\ \eta_0,\ -\zeta_0,\ q) - J_6(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\right]\\
v_{z2}'' &= \quad \eta_0\left[J_5(\xi_0,\ \eta_0,\ -\zeta_0,\ q) - J_5(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\right]
\end{aligned}
$$

Скорости v_{x1}' и v_{x2}', вызванные пеленой свободных вихрей, при переходе точки $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ через эту пелену будут претерпевать разрыв. Для всех точек $M(x_0,\ 0,\ z_0)$, как принадлежащих этой пелене, так и лежащих вне ее, но в плоскости xz, эти скорости, очевидно, будут равны нулю. В соответствии с формулами (2.7) найдем суммарные скорости в данном случае. Их можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
W_x &= \frac{U_0\Gamma}{2\pi}\left[w_x^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\sin pt_0 + w_x^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\cos pt_0\right]\\
W_y &= \frac{U_0\Gamma}{2\pi}\left[w_y^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\sin pt_0 + w_y^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\cos pt_0\right]\\
W_z &= \frac{U_0\Gamma}{2\pi}\left[w_z^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\sin pt_0 + w_z^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\cos pt_0\right] \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

При этом суммарные безразмерные скорости, очевидно, будут равны

$$
\begin{aligned}
w_x^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) &= u_x(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0) + qv_{x1}'(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\\
w_x^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) &= qv_{x2}'(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\\
w_y^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) &= u_y(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0) + qv_{y1}'(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) + v_{y1}''(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) \qquad (3.8)\\
w_y^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) &= qv_{y2}'(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) + v_{y2}''(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)
\end{aligned}
$$

$$
w_z^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) = v_{z1}''(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q), \quad w_z^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q) = v_{z2}''(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)
$$

В случае, когда напряженность присоединенного вихря изменяется по закону косинуса, положим

$$
\Gamma_+(t_0) = U_0 l\Gamma\cos pt_0 \qquad (3.9)
$$

Рассуждения и выкладки при этом ведутся совершенно так же, как в предыдущем случае. Используя обозначения (3.8), окончательный результат для суммарных скоростей можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
W_x &= \frac{U_0\Gamma}{2\pi}\left[-w_x^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\sin pt_0 + w_x^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\cos pt_0\right]\\
W_y &= \frac{U_0\Gamma}{2\pi}\left[-w_y^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\sin pt_0 + w_y^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\cos pt_0\right] \qquad (3.10)\\
W_z &= \frac{U_0\Gamma}{2\pi}\left[-w_z^{(2)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\sin pt_0 + w_z^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,\ q)\cos pt_0\right]
\end{aligned}
$$

§ 4. Поле скоростей при малых значениях круговой частоты. Найдем выражения для безразмерных скоростей (3.8) при $q = 0$. Некоторые из скоростей ($w_x^{(2)}$, $w_y^{(2)}$, $w_z^{(2)}$) при $q = 0$ обращаются в нуль. Для этих безразмерных скоростей мы найдем значения производных от них по параметру q при $q = 0$. Как это следует из формул (3.5), (3.6) и (3.8), для этого достаточно получить при $q = 0$ выражения интегралов J_2, J_4 и J_6, а также $\partial J_5 / \partial q$. После несложных вычислений находим

$$J_2(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, 0) = \frac{1}{\eta_0 |1+\zeta_0|}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{|1+\zeta_0|}{\eta_0} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\xi_0|1+\zeta_0|}{\eta_0 r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}\right)$$

$$J_4(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, 0) = \frac{1}{2|1+\zeta_0|}\ln\frac{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) - |1+\zeta_0|}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q) + |1+\zeta_0|}$$

$$J_6(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, 0) = \frac{1}{\eta_0^2 + (1+\zeta_0)^2}\left(1 + \frac{\xi_0}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}\right) \qquad (4.1)$$

$$\left.\frac{\partial J_5(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q)}{\partial q}\right|_{q=0} = \frac{1}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)} + \frac{\xi_0}{\eta_0^2 + (1+\zeta_0)^2}\left(1 + \frac{\xi_0}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}\right)$$

Подставим эти соотношения (3.6), а получившиеся при этом выражения — в формулы (3.8), полагая $q = 0$. В результате получили:

$$w_x^{(1)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, 0) = w_x(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

$$\left.\frac{\partial w_x^{(2)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q)}{\partial q}\right|_{q=0} = -\operatorname{sign}(1-\zeta_0)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{|1-\zeta_0|}{\eta_0} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arc\,tg}\frac{\xi_0|1-\zeta_0|}{\eta_0 r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0)}\right) - \operatorname{sign}(1+\zeta_0)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{|1+\zeta_0|}{\eta_0} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\xi_0|1+\zeta_0|}{\eta_0 r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}\right)$$

$$w_y^{(1)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, 0) = w_y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \qquad (4.2)$$

$$\left.\frac{\partial w_y^{(2)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q)}{\partial q}\right|_{q=0} = \frac{\operatorname{sign}(1-\zeta_0)}{2}\ln\frac{r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0) - |1-\zeta_0|}{r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0) + |1-\zeta_0|} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sign}(1+\zeta_0)}{2}\ln\frac{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) - |1+\zeta_0|}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + |1+\zeta_0|} + \frac{1-\zeta_0}{r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0)} +$$

$$+ \frac{1+\zeta_0}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)} - \xi_0 v_y(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

$$w_z^{(1)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, 0) = w_z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

$$\left.\frac{\partial w_z^{(2)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, q)}{\partial q}\right|_{q=0} = \frac{\eta_0}{r(\xi_0, \eta_0, -\zeta_0)} - \frac{\eta_0}{r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)} - \xi_0 v_z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

Как уже отмечалось выше, скорость v_{x2}' при переходе точки $M(x_0, y_0, z_0)$, в которой вычисляется скорость, через пелену свободных вихрей меняется скачком. То же относится и к функции $\partial w_x^{(2)} / \partial q$, причем для всех ξ_0 и ζ_0

$$\left.\frac{\partial w_x^{(2)}}{\partial q}\right|_{\eta_0=0,\ q=0} = 0$$

Поступила 16 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Lehrian D. E. A calculation of the complete downwash in three dimensions due to a rectangular vortex. ARC, Rep. and Mem., № 2771, 1953.