

К ТЕОРИИ КРЫЛА МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ¹

В. В. Голубев

(Москва)

§ 1. Общие замечания. Крылья малого удлинения, повидимому, представляют в настоящее время значительно больший интерес и актуальность, чем в момент появления первых исследований в этой области. Причиной этого, несомненно, являются особенности в работе этих крыльев, достаточно резко отличающие их от поведения в потоке воздуха крыльев больших удлинений; в конструкциях, в которых могут быть применены крылья малых удлинений, эти особенности могут найти своеобразное использование.

С другой стороны, и с точки зрения общей теории крыла как теории плавного обтекания тел потоком непрерывной среды, т. е. жидкости или газа, исследования в этой области представляют несомненный интерес. Дело в том, что исследования в этой классической задаче гидро- и аэромеханики при настоящем состоянии науки носят характер приближенный и, помимо различных чисто математических приближений, основываются на ряде механических приближенных схем, которые, несомненно, не могут быть ни обоснованы, ни оправданы для случая общих течений, плавно обтекающих твердое тело. Естественно, что с этой точки зрения случаи, явно не укладывающиеся в рамки существующих приближенных теорий, представляют особый интерес, так как позволяют подойти к более точному пониманию изучаемого физического явления, а вместе с тем и к построению более точной теории его.

Как известно, существующая в настоящее время теория плавного обтекания крылообразных тел основана на идее возникновения вокруг таких тел добавочных циркуляционных потоков, находящихся свое наглядное механическое выражение в так называемых присоединенных вихрях, с поразительным успехом введенных Жуковским в теорию крыла и гребного винта. Дальнейшее развитие этой теории в трудах Чаплыгина, Прандтля и многочисленных других ученых позволило путем расширения вихревой схемы Жуковского построить теорию крыла конечного размаха и теорию гребного винта с достаточной для технических приложений точностью, согласующуюся с накопленным обильным экспериментальным материалом.

Однако вся эта теория построена на ряде физических допущений, оправдывающихся на опыте только приближенно, но чрезвычайно упрощающих ма-

¹ Эта работа печатается посмертно; она осталась в достаточно подготовленном виде в бумагах В. В. Голубева. Предварительный просмотр текста и чтение корректур провел С. М. Белоцерковский.

тематическое исследование явления. Так, в наиболее подробно и полно разработанной в настоящее время теории крыла конечного размаха все исследование строится, между прочим, на следующих двух соображениях, восходящих к Прандтлю.

Во-первых, крыло по размаху разбивается на ряд разрезов, так называемых элементов крыла, причем предполагается, что каждый элемент крыла работает в условиях плоско-параллельного потока.

Во вторых, не учитывается влияние течений около боковых кромок крыла и прежде всего не учитывается затекание потока через боковые кромки, которое, несомненно, имеет место благодаря разности давлений на нижней и верхней поверхностях крыла и влиянию отходящих, так называемых свободных вихрей.

Влияние обоих этих факторов проявляется заметно только в частях крыла, прилегающих к боковым кромкам; поэтому влиянием их можно с достаточным приближением пренебречь в случае крыльев со значительным удлинением, так как вносимое ими изменение составляет незначительную часть сравнительно с действием средних частей крыла. Однако картина меняется для крыла малого удлинения, где влияние боковых кромок резко сказывается на работе всего крыла, так как, благодаря малости размаха, все точки поверхности крыла оказываются близкими к боковым кромкам. А отсюда естественно ожидать, что обычная теория крыла окажется в большей или меньшей степени непригодной для крыла малого удлинения.

§ 2. Специфические особенности крыльев малого удлинения. Общие соображения предыдущего параграфа находят полное подтверждение в обильном экспериментальном материале, накопленном в этой области. Давно было отмечено различными экспериментаторами, что при малом удлинении, начиная примерно с удлинения 1, крылья в потоке воздуха ведут себя совершенно иначе, чем крылья обычных удлинений, причем это расхождение в поведении крыльев увеличивается при уменьшении удлинения.

Известно, например, какую важную роль играет так называемый критический угол атаки. Этот угол атаки характеризуется тем, что при углах атаки, меньших критического, крыло работает в условиях, приближающихся к плавному обтеканию. При этом достаточно точно выполняется основная теорема Жуковского о подъемной силе крыла, и так как для обычных крыльев критические углы малы и, как правило, без применения каких-нибудь добавочных приспособлений не превосходят углов порядка 15° , то в силу того, что по данным теории в случае плавного обтекания подъемная сила изменяется пропорционально синусу угла атаки, а в пределах до углов порядка 15° синусы угла можно заменить самим углом, имеем такой результат: при углах, меньших критического, подъемная сила линейно зависит от угла атаки.

При углах, больших критического, крыло работает в условиях отрыва струй, образования за крылом аэродинамической тени, и вся теория плавного обтекания оказывается непригодной. Наиболее ощутимым резуль-

татом этого перехода одного режима в другой является резкое уменьшение подъемной силы при переходе в закритический угол атаки.

Совершенно иное мы имеем в случае крыльев малого удлинения. В случае крыльев с удлинением порядка $0.5 \div 0.3$ критические углы атаки увеличиваются до $45 \div 50^\circ$, т. е. получается увеличение угла атаки более чем втрое сравнительно с крыльями нормальных удлинений, т. е. удлинений порядка $5 \div 10$.

Вторая особенность крыльев малого удлинения состоит в резком смещении при больших углах атаки центра давления к задней кромке крыла. В то время как у прямоугольного крыла центр давления при нормальных удлинениях находится на расстоянии, близком к четверти хорды, считая от передней кромки, для крыльев с удлинением порядка $0.5-0.3$ центр давления смещается к середине хорды; имеются отдельные экспериментальные данные, показывающие, что для крыльев с еще меньшим удлинением центр давления смещается даже еще дальше, во вторую половину хорды, до $0.6-0.7$ хорды, считая от передней кромки.

Естественно, что обе эти особенности крыльев малого удлинения имеют весьма существенное значение при применении их в различных конструкциях, например в рулях и т. п. Повидимому, достаточно полного объяснения причин этого отличия в свойствах крыльев малого удлинения в настоящее время мы не имеем. Отмеченные выше особенности в поведении крыльев малого удлинения позволяют сделать некоторые выводы о физической картине их обтекания.

Известно, что начало перехода плавного обтекания крыла в обтекание с образованием отрыва потока получается при достаточном уменьшении скорости обтекания у задней кромки. У крыла наибольшая скорость обтекания получается в непосредственной близости к передней кромке; при удалении от передней кромки скорость обтекания уменьшается. Нами показано, что в случае, если образующийся на верхней поверхности крыла пограничный слой можно считать ламинарным, то отрыв потока от поверхности крыла начинается в точке, удовлетворяющей условию:

$$\frac{v_{\max}}{v_0} = 1,2$$

где v_{\max} — максимальная скорость обтекания крыла в точках около передней кромки и v_0 — скорость в точке отрыва¹. Отсюда следует, что всякий механизм, способствующий выравниванию скоростей потока в точках верхней поверхности крыла, тем самым создает условия, благоприятствующие плавности обтекания; в частности, в случае, если скорость обтекания верхней поверхности во всех точках постоянна, нет условий для образования отрыва струй.

Выравнивание скоростей может быть достигнуто или уменьшением скорости v_{\max} в точках около передней кромки, или увеличением скорости в точках, близких к задней кромке. И тот и другой способы могут быть применены для улучшения условий обтекания. Нами было пока-

¹ В. В. Голубев [74] (стр. 228). Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках указывают номер работы по списку трудов стр. 140—142 этого выпуска.

зано, что путем применения так называемых предкрылков может быть получено уменьшение v_{\max} ; поэтому при надлежащем устройстве предкрылков может быть получено увеличение критического угла атаки¹ с $15 \div 16^\circ$ до $25 \div 28^\circ$.

Можно способствовать выравниванию скорости и другим путем — путем увеличения скорости обтекания в точках около задней кромки крыла; этого можно достигнуть путем выдувания воздуха из крыла в точках средней части поверхности или путем отсасывания воздуха через щели в верхней поверхности крыла.

Итак, резкое увеличение критического угла атаки у крыльев малых удлинений позволяет предполагать наличие условий, создающих выравнивание скоростей на верхней поверхности крыла, вызываемое уменьшением удлинения. Но тот же вывод получается и при учете смещения центра давления к задней кромке. В самом деле, при постоянстве скорости в точках поверхности крыла давление в различных точках постоянно и центр давления приближается к середине хорды.

Общий вывод из всего предыдущего состоит в следующем. Наблюдаемые особенности в поведении крыльев малого удлинения приводят к тому заключению, что уменьшение удлинения крыла способствует выравниванию скоростей в точках верхней его поверхности.

Возникает вопрос о причинах, вызывающих такое выравнивание. Так как, повидимому, нет оснований ожидать при уменьшении удлинения одновременного уменьшения скорости около передней кромки крыла, т. е. падения v_{\max} , то по аналогии с имеющимися данными естественно искать причины, вызывающие выравнивание скоростей, в действии эффекта отсасывания или сдувания пограничного слоя, более эффективного при малых удлинениях. Такое отсасывание или сдувание мало заметно при больших удлинениях и потому не учитывается в обычной теории, но становится весьма заметно при малом удлинении; оно и вызывает отмеченные выше особенности в поведении крыла малого удлинения.

§ 3. Физическая схема работы крыла; влияние боковых кромок. Если ограничиться случаем прямоугольного крыла, то влияние удлинения крыла на характер обтекания его потоком можно объяснить следующим образом.

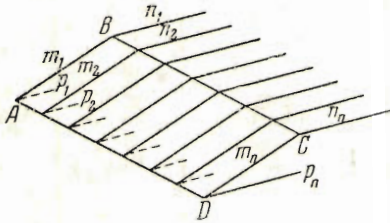
В существующей теории крыла не учитывается в полной мере влияние на обтекание крыла течений около боковых кромок. В первом приближении можно считать, что само по себе течение около боковых кромок прямоугольного крыла происходит совершенно независимо от удлинения крыла, но вносимый этим обтеканием эффект проявляется более заметно у крыльев малого удлинения, где при одной и той же величине боковой кромки влияние этого затекания распределяется на меньшую площадь и, следовательно, более заметно.

Все дальнейшее основывается на учете того влияния, которое вносит течение около боковых кромок в распределение скоростей у поверхности

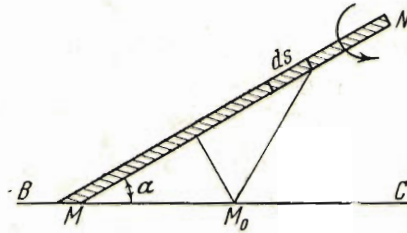
¹ См., например, В. В. Голубев [74] (стр. 223).

крыла; поэтому все дальнейшее представляет развитие тех идей, которые мною ранее были указаны в теории крыла малого удлинения [68].

В основе всего дальнейшего лежит следующая физическая схема явления. Пусть $ABCD$ — прямоугольное крыло, m_1, \dots, m_n — его присоединенные вихри, $n_1, \dots, n_n, p_1, \dots, p_n$ — свободные вихри, предста-



Фиг. 1



Фиг. 2

вляющие продолжение присоединенных вихрей (фиг. 1). Мы предположим, что всю вихревую систему прямоугольного крыла можно заменить прямоугольными вихрями, параллельными передней и задней кромкам крыла, и их продолжениями — свободными вихрями, расположенными по прямым, представляющим линии тока течения, не возмущенного присутствием крыла. Таким образом, отличие предлагаемой вихревой схемы от схемы, ранее данной, состоит в том, что мы не заменяем всю систему присоединенных вихрей крыла одним присоединенным вихрем.

Опираясь на такую вихревую схему, рассмотрим скорости течения, вызываемого действием системы свободных вихрей в точках боковой кромки крыла BC или AD .

Пусть M — точка боковой кромки крыла BC и MN — сходящийся в этой точке свободный вихрь (фиг. 2). Угол α есть, очевидно, при сделанных предположениях угол атаки. Найдем скорость, вызываемую действием этого вихря в точке M_0 боковой кромки. Применяя, как обычно, теорему Био-Савара, найдем для величины скорости следующее выражение:

$$dv = \frac{d\Gamma}{4\pi h} \{1 + \cos \alpha\} \tag{3.1}$$

где h — расстояние от точки M_0 до вихря, причем выражение (3.1) имеет место при $BM_0 > BM$; в случае, если $BM_0 < BM$, вместо (3.1) имеем

$$dv = \frac{d\Gamma}{4\pi h} (1 - \cos \alpha) \tag{3.2}$$

В выражениях (3.1) и (3.2) $d\Gamma$ — вихрь, сходящийся с элемента боковой кромки в точке M . Введем для стороны BC координату λ , полагая, что

$$BM = x = -\frac{1}{2} b \cos \lambda$$

где b — длина BC . Тогда

$$M_0M = \frac{1}{2} b (\cos \lambda - \cos \lambda_0)$$

где значение λ_0 соответствует точке M_0 . Отсюда

$$h = \frac{1}{2} (\cos \lambda - \cos \lambda_0) \sin \alpha$$

и, называя через γ вихревую плотность присоединенного вихря, проходящего через точку M , имеем

$$d\Gamma = \gamma dx = \frac{1}{2} \gamma b \sin \lambda d\lambda$$

Подставляя все значения в выражения (3.1) и (3.2), имеем

$$dv = \frac{\gamma \sin \lambda (1 + \cos \alpha) d\lambda}{4\pi \sin \alpha (\cos \lambda - \cos \lambda_0)} \quad (\lambda < \lambda_0), \quad dv = \frac{\gamma \sin \lambda (1 - \cos \alpha) d\lambda}{4\pi \sin \alpha (\cos \lambda - \cos \lambda_0)} \quad (\lambda > \lambda_0)$$

Так как в случае прямоугольного крыла $^1 \gamma = 2v \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \lambda$, то окончательно имеем

$$dv = \frac{v}{\pi} \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \frac{1 + \cos \lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} d\lambda \quad (\lambda < \lambda_0) \quad (3.3)$$

$$dv = \frac{v}{\pi} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \frac{1 + \cos \lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} d\lambda \quad (\lambda > \lambda_0) \quad (3.4)$$

Далее замечаем, что

$$\int \frac{1 + \cos \lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} d\lambda = (1 + \cos \lambda_0) \int \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} + \int d\lambda$$

Уравнения (3.3) и (3.4) позволяют путем интегрирования найти значение скорости v в любой точке боковой кромки:

$$v(\lambda_0) = \frac{v}{\pi} \left[(1 + \cos \lambda_0) \int_0^\pi \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} + \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \int_0^{\lambda_0} d\lambda + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \int_{\lambda_0}^\pi d\lambda \right] \quad (3.5)$$

где

$$\varphi(\lambda) = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \quad (\lambda < \lambda_0), \quad \varphi(\lambda) = \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \quad (\lambda > \lambda_0)$$

Вычисление интеграла

$$\int_0^\pi \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} \quad (3.6)$$

представляет некоторые затруднения, так как этот интеграл несобственный. Мы будем его рассматривать как

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon_1 \rightarrow 0}} \left[\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \int_0^{\lambda_0 - \varepsilon} \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \int_{\lambda_0 + \varepsilon_1}^\pi \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} \right] \quad (3.7)$$

Так как 2

$$\int \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} = \frac{1}{\sin \lambda_0} \ln \frac{\sin \frac{1}{2} (\lambda + \lambda_0)}{\sin \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)} + C = \frac{1}{\sin \lambda_0} \ln \frac{\sin \frac{1}{2} (\lambda + \lambda_0)}{\sin \frac{1}{2} (\lambda_0 - \lambda)} + C_1$$

то

$$\int_0^{\lambda_0 - \varepsilon} \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} = \frac{1}{\sin \lambda_0} \ln \frac{\sin (\lambda_0 - \frac{1}{2} \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon}$$

$$\int_{\lambda_0 + \varepsilon_1}^\pi \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} = \frac{1}{\sin \lambda_0} \ln \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon_1}{\sin (\lambda_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1)}$$

¹ См. В. В. Голубев [74] [стр. 205, уравнение (3)].

² См., например, В. В. Голубев [23] (стр. 342).

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \int_0^{\lambda_0 - \varepsilon} \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \int_{\lambda_0 + \varepsilon_1}^{\pi} \frac{d\lambda}{\cos \lambda - \cos \lambda_0} = \\ & = \frac{1}{\sin \lambda_0} \left[\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \ln \sin \left(\lambda_0 - \frac{1}{2} \varepsilon \right) - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \ln \sin \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\sin \lambda_0} \left[-\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \ln \sin \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \ln \sin \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

Так как

$$-\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \ln \sin \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \ln \sin \frac{1}{2} \varepsilon_1 = (\sin \frac{1}{2} \varepsilon_1)^{\sin^2 1/2 \alpha} \approx \ln \frac{(1/2 \varepsilon_1)^{\sin^2 1/2 \alpha}}{(1/2 \varepsilon)^{\cos^2 1/2 \alpha}}$$

то, выбирая ε и ε_1 таким образом, чтобы¹

$$\left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 \right)^{\sin^2 1/2 \alpha} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon \right)^{\cos^2 1/2 \alpha} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 = 2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon \right)^{\operatorname{ctg}^2 1/2 \alpha}$$

и полагая, что $\lim \varepsilon = 0$, получим из уравнения (3.5)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \lambda_0} \left[\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \ln \sin \left(\lambda_0 - \frac{1}{2} \varepsilon \right) - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \ln \sin \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) \right] = \\ = \frac{1}{\sin \lambda_0} \cos \alpha \ln \sin \lambda_0 \end{aligned}$$

Отсюда по уравнениям (3.3) и (3.4) имеем

$$v(\lambda_0) = \frac{v}{\pi} \frac{1 + \cos \lambda_0}{\sin \lambda_0} \cos \alpha \ln \sin \lambda_0 + \frac{v}{\pi} \left[\cos^2 \frac{\alpha}{2} \lambda_0 + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha (\pi - \lambda_0) \right]$$

или

$$v(\lambda_0) = \frac{v}{\pi} \cos \alpha \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \lambda_0 \ln \sin \lambda_0 + \lambda_0 + \pi \frac{\sin^2 1/2 \alpha}{\cos \alpha} \right] \quad (3.9)$$

Эта скорость вытекания через боковую кромку крыла была получена без учета влияния поверхности крыла, которую мы принимаем за плоскую пластинку.

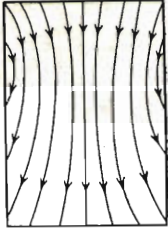
В случае, если бы мы имели течение, вызываемое рассматриваемой вихревой пленкой, то вследствие действия на поток плоского экрана-пластинки, заменяя действие этого экрана, как обычно делается в гидродинамике, симметричной относительно его системой вихрей, мы получили бы скорость, вдвое большую, т. е.

$$v_1(\lambda_0) = \frac{2v}{\pi} \cos \alpha \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \lambda_0 \ln \sin \lambda_0 + \lambda_0 + \pi \frac{\sin^2 1/2 \alpha}{\cos \alpha} \right] \quad (3.10)$$

Мы будем применять выражение (3.9), в точности пригодное для бесконечной плоской пластинки и в рассматриваемом нами случае плоского крыла, т. е. в случае края ограниченной плоской пластинки. Законность такого предположения не очень ясна; вероятно, мы получим при этом несколько завышенную величину скорости v .

¹ Случаи $\alpha = 0$, а также $\alpha = \pi$ при этом, очевидно, исключаются; причиной является то, что при подходе к прямолинейному вихрю скорость вызываемого им течения неограниченно увеличивается, но на самом деле скорость равна нулю.

Как показывает выражение (3.9), $v(0) = -\infty$, т. е. около передней кромки мы имеем втекание внутрь верхней поверхности крыла окружающего воздуха; точно так же



Фиг. 3

$$v_1(\pi) = \frac{2v}{\pi} \cos \alpha \left(\lambda_0 + \pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha} \right)$$

т. е. около задней кромки мы имеем вытекание наружу с поверхности крыла. При λ_0 , удовлетворяющем уравнению

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \lambda_0 \ln \sin \lambda_0 + \pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha} = 0$$

скорость вытекания с боковой кромки равна 0; такая точка при всяком α находится при угле $\lambda_0 < \frac{1}{2}\pi$, т. е. в передней половине крыла, так как

$$v_1(\frac{1}{2}\pi) = 2v \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\pi}{\cos \alpha} \right] \quad \text{или} \quad v_1(\frac{1}{2}\pi) > 0.$$

На фиг. 3 дан общий вид изменения функции $v_1(\lambda_0)$.

§ 4. Количество жидкости, протекающей внутри слоя. Рассмотрим поверхность крыла и пограничный слой, примыкающий к верхней поверхности крыла. Скорость течения на внешней границе пограничного слоя можно считать такой же, как и на поверхности обтекаемого тела при отсутствии пограничного слоя; это является следствием того, что толщина слоя мала, а вне пограничного слоя сил вязкости нет.

Рассмотрим слой жидкости, прилегающий извне к наружной границе пограничного слоя и достаточно тонкий для того, чтобы можно было считать скорость течения внутри этого слоя постоянной по толщине слоя; в силу того что скорость течения в области текущей жидкости изменяется непрерывно, такой слой всегда можно с достаточной точностью подобрать и его толщину δ можно считать постоянной по всей верхней поверхности крыла. Количество жидкости Q , вытекающей из рассматриваемого слоя через боковую кромку, равно

$$Q = \delta \int_0^b v_1 dx$$

или

$$Q = \frac{v}{\pi} \cos \alpha \delta \int_0^\pi \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \lambda_0 \ln \sin \lambda_0 + \lambda_0 + \pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos \alpha} \right] \sin \lambda_0 d\lambda_0 \quad (4.1)$$

Найдем предварительно интеграл

$$J = \int_0^\pi \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \lambda_0 \sin \lambda_0 \ln \sin \lambda_0 d\lambda_0 = \int_0^\pi (1 + \cos \lambda_0) \ln \sin \lambda_0 d\lambda_0 = \int_0^\pi \ln \sin \lambda_0 d\lambda_0$$

так как

$$\int_0^\pi \cos \lambda_0 \ln \sin \lambda_0 d\lambda_0 = 0 \quad (4.2)$$

Далее

$$\int_0^{1/2\pi} \ln \sin \lambda_0 d\lambda_0 = \int_0^{1/2\pi} \ln \cos \lambda_0 d\lambda_0$$

следовательно,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} \ln \sin \lambda_0 d\lambda_0 = 2 \int_0^{1/2\pi} \ln \sin 2\lambda_0 d\lambda_0 = \\ &= 2 \int_0^{1/2\pi} (\ln 2 + \ln \sin \lambda_0 + \ln \cos \lambda_0) d\lambda_0 = \\ &= \pi \ln 2 + 4 \int_0^{1/2\pi} \ln \sin \lambda_0 d\lambda_0 = \pi \ln 2 + 2J \end{aligned}$$

отсюда

$$J = -\pi \ln 2$$

Далее

$$\int_0^{\pi} \lambda_0 \sin \lambda_0 d\lambda_0 = \pi$$

и, следовательно,

$$Q = \frac{v}{\pi} \cos \alpha b \delta \left[-\pi \ln 2 + \pi + 2\pi \frac{\sin^2 1/2\alpha}{\cos \alpha} \right]$$

или

$$Q = v \cos \alpha b \delta \left[\ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 1/2\alpha}{\cos \alpha} \right] \quad (4.3)$$

Так как вытекание происходит через две боковые кромки, то общий секундный объем жидкости, вытекающей через две боковые кромки, определяется формулой

$$2Q = 2v \cos \alpha b \delta \left[\ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 1/2\alpha}{\cos \alpha} \right] \quad (4.4)$$

или, подставляя значение $\ln 1/2 e$:

$$2Q = 2v \cos \alpha b \delta \left[0.30685 + 2 \frac{\sin^2 1/2\alpha}{\cos \alpha} \right]$$

Так как угол α ни при каких условиях не превосходит 60° , а с другой стороны, в дальнейшем выведенную формулу мы будем применять при углах, превышающих критический, который у обычно применяемых профилей бывает порядка 16° , то

$$\ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 8^\circ}{\cos 16^\circ} < \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 1/2\alpha}{\cos \alpha} < \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 25^\circ}{\cos 50^\circ}$$

или

$$0.344 < \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 1/2\alpha}{\cos \alpha} < 0.825 \quad (4.5)$$

Далее представляет интерес рассчитать, как распределено количество вытекающей из рассматриваемого слоя жидкости по хорде крыла. Некоторый ответ на это дает количество жидкости $2Q_1$, вытекающей через боковые кромки в передней половине крыла, и аналогичное количество

жидкости $2Q_2$, вытекающей с задней половины крыла. Их легко рассчитать. Действительно, применяя такие же расчеты, как выше, получим

$$2Q_1 = \frac{2v}{\pi} \cos \alpha b \delta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[(1 + \cos \lambda_0) \ln \sin \lambda_0 + \lambda_0 \sin \lambda_0 + \pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \sin \lambda_0 \right] d\lambda_0$$

или

$$2Q_1 = 2v \cos \alpha b \delta \left[-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right] \quad (4.6)$$

и аналогично

$$2Q_2 = \frac{2v}{\pi} \cos \alpha b \delta \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \left[(1 + \cos \lambda_0) \ln \sin \lambda_0 + \lambda_0 \sin \lambda_0 + \pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \sin \lambda_0 \right] d\lambda_0$$

или

$$2Q_2 = 2v \cos \alpha b \delta \left[-\frac{1}{2} \ln 2 + 1 + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right] \quad (4.7)$$

Легко видеть, что $2Q_1$ всегда отрицательно в рассматриваемых пределах изменения α ; в самом деле,

$$-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\sin^2 8^\circ}{\cos 16^\circ} < -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} < -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\sin^2 25^\circ}{\cos 50^\circ}$$

или

$$-0,328 < -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} < -0,085 \quad (4.8)$$

Отсюда мы имеем следующий результат: в передней половине крыла внутри рассматриваемого слоя воздух засасывается внутрь крыла.

Сопоставляя выражения (4.5) и (4.8), мы получаем, что количество воздуха $2Q_2$, выбрасываемого из слоя наружу в задней половине крыла, находится в границах

$$2v \cos \alpha b \delta 0,672 < 2Q_2 < 2v \cos \alpha b \delta 0,910 \quad (4.9)$$

Из сравнения выражений (4.8) и (4.9) получаем следующий вывод.

При увеличении угла атаки с 16° до 50° количество воздуха, стекающего в слой передней половины крыла, уменьшается почти в четыре раза, а количество воздуха, вытекающего в задней половине крыла, несколько (на 0,38%) увеличивается.

§ 5. Влияние протекания воздуха через боковые кромки на критический угол атаки. Как известно, распределение скоростей по хорде пластинки в плоско-параллельном течении дается формулой¹

$$u = v \left(\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{\frac{\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} b \cos \lambda}{\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} b \cos \lambda}} \right)$$

и, следовательно, на задней кромке, когда $\lambda \doteq \pi$, имеем

$$u_0 = v \cos \alpha$$

Таким образом, в предположении, что прямоугольное крыло обтекается потоком в условиях плоско-параллельного течения, количество

¹ См., например, В. В. Голубев [74] (стр. 203).

воздуха, вытекающего из рассматриваемого нами слоя вдоль задней кромки, определялось бы формулой

$$q = v \cos \alpha \delta \quad (5.1)$$

где l — размах пластинки.

В случае ограниченной пластинки к рассматриваемому течению добавляется еще течение, образованное воздухом, затаекающим через боковые кромки. Получающееся от наложения этих двух течений результирующее течение можно представить схематически, как указано на фиг. 3. Поджатие струй, вызываемое затаеканием через боковые кромки, должно вызывать резкое увеличение скорости течения в средней части крыла, а это в свою очередь ведет к выравниванию скоростей потока и, следовательно, к увеличению критического угла атаки.

Мы можем оценить увеличение скорости течения от действия засасывания через боковые кромки следующим образом. Как мы видели, при отсутствии засасывания, т. е. в условиях плоско-параллельного обтекания, количество воздуха, стекающего в рассматриваемом слое с крыла в одну секунду, определяется формулой (5.1).

Если допустить, что в условиях засасывания через боковые кромки количество стекающего воздуха с задней кромки остается то же, то общее количество воздуха, стекающего в слое через заднюю и боковые кромки, определится выражением

$$q + 2Q = v \cos \alpha \delta \left[l + 2b \left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right\} \right] \quad (5.2)$$

что равносильно увеличению скорости течения в среднем от v до v_1 , причем из уравнений (5.1) и (5.2) имеем

$$\frac{v_1}{v} = 1 + \frac{2b}{l} \left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right\}$$

или, вводя удлинение крыла $\mu = l/b$, получим

$$\frac{v_1}{v} = 1 + \frac{2}{\mu} \left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right\} \quad (5.3)$$

Это увеличение скорости приходится на основное течение, так как воздух, затаекающий через боковые кромки, полностью стекает, и $2Q$ дает количество воздуха, вытекающего в основном течении.

Полученная формула (5.3) показывает, что при нормальных удлинениях μ порядка 5—10 увеличение скорости у задней кромки незначительно, в особенности при малых углах атаки α . В самом деле, как было показано в предыдущем параграфе, выражение

$$\left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right\}$$

изменяется от 0.344 при $\alpha = 16^\circ$ и до 0.825 при $\alpha = 50^\circ$; принимая при грубой оценке среднее значение 0.56, получим, что отношение v_1/v колеблется в пределах от 1.19 при $\mu = 5$ до 1.1 при $\mu = 10$. Совершенно иная картина получается при малых удлинениях; приводим значения этих

отношений при некоторых малых значениях μ :

$$\begin{array}{cccccc} \mu = & 1, & 0.5, & 0.33, & 0.25, & 0.2, & 0.01 \\ \frac{v_1}{v} = & 2.12, & 3.25, & 4.36, & 5.48, & 6.60, & 12.2 \end{array}$$

Итак, при малых удлинениях мы получаем весьма резкое увеличение скорости около задней кромки, а это в свою очередь должно давать и сильное выравнивание скоростей и, следовательно, перемещение центра давления по направлению к задней кромке и резкое увеличение критического угла атаки.

Применяя результаты, ранее полученные нами¹, можно рассчитать, исходя из предшествующих соображений, критический угол атаки. Считая, что прямоугольная пластинка округлена у передней кромки по методу Жуковского и ε — коэффициент, характеризующий округление, мы получили следующие формулы для максимальной скорости обтекания профиля v_{\max} и для скорости v_0 у задней кромки:

$$v_{\max} = v \sin \alpha \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon}, \quad v_0 = v \cos \alpha (1 - \varepsilon) \quad (5.4)$$

Предполагая, что влияние затекания сказывается только вблизи задней кромки, и повторяя рассуждения предшествующего параграфа, получим для скорости v_0' с учетом затекания потока через боковые кромки выражение

$$v_0' = v \cos \alpha \left[1 - \varepsilon + \frac{2}{\mu} \left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right\} \right]$$

или

$$v_{\infty}' = v \cos \alpha (1 - \varepsilon) \left[1 + \frac{1}{\mu} \frac{2}{1 - \varepsilon} \left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right\} \right] \quad (5.5)$$

С другой стороны, опираясь на соображения, основанные на теории пограничного слоя, мы получили следующее условие для полного обтекания крыла:

$$\frac{v_{\max}}{v_0'} = 1.2 \quad (5.6)$$

Подставляя в (5.6) выражение (5.3) и называя через θ критический угол атаки, получим

$$\operatorname{tg} \theta \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon (1 - \varepsilon)} \left[1 + \frac{1}{\mu} \frac{2}{1 - \varepsilon} \left(\ln \frac{e}{2} + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \theta}{\cos \theta} \right) \right]^{-1} = 1.2 \quad (5.7)$$

Мы видели, что в тех пределах, где прилагаются полученные выводы, среднее значение

$$\ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha}$$

равно 0.56. Точно так же параметр ε , характеризующий утолщение крыла, меняется обычно в пределах от 0.05 для очень тонких профилей

¹ См. В. В. Голубев [27, 74].

до 0.20 для достаточно толстых; для приближенного расчета мы возьмем и здесь среднее значение $\varepsilon = 0.1$. Тогда получим среднее значение выражения

$$\frac{2}{1-\varepsilon} \left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right\} = 1.24 \quad (5.8)$$

Из уравнения (5.7) получим следующее уравнение для определения критического угла атаки:

$$\operatorname{tg} \theta = 1.2 \left[1 + \frac{1}{\mu} \frac{2}{1-\varepsilon} \left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \theta} \right\} \right] \frac{\varepsilon (1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2} \quad (5.9)$$

или, подставляя приближенное значение (5.8):

$$\operatorname{tg} \theta = 1.2 \left[1 + \frac{1.24}{\mu} \right] \frac{\varepsilon (1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2} \quad (5.10)$$

Так как в случае плоско-параллельного течения критический угол θ_0 определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \theta_0 = 1.2 \frac{\varepsilon (1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2}$$

то уравнения (5.9) и (5.10) можно еще переписать в виде

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 \left[1 + \frac{1}{\mu} \frac{2}{1-\varepsilon} \left\{ \ln \frac{1}{2} e + 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \theta}{\cos \theta} \right\} \right] \quad (5.11)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 \left[1 + \frac{1.24}{\mu} \right] \quad (5.12)$$

Приводим результаты применения полученных формул к двум примерам.

1. Крыло с $\varepsilon = 0.10$;

$$\operatorname{tg} \theta_0 = 1.2 \frac{\varepsilon (1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2} = 0.09, \quad \theta_0 = 5^\circ 10'$$

$\mu = 6$	1	0.5	0.33	0.25	0.20	0.10
$\theta = 0^\circ 10'$	$11^\circ 20'$	$17^\circ 20'$	23°	$25^\circ 40'$	$32^\circ 50'$	$50^\circ 40'$

2. Крыло с $\varepsilon = 0.15$; $\operatorname{tg} \theta_0 = 0.116$, $\theta_0 = 6^\circ 40'$:

$\mu = 6$	1	0.5	0.33	0.25	0.20	0.10
$\theta = 8^\circ$	$14^\circ 30'$	22°	$28^\circ 40'$	$34^\circ 40'$	$39^\circ 50'$	$57^\circ 10'$

Эти примеры дают резкое увеличение подъемной силы при малых удлинениях в пределах, достаточно близких к тем, которые дают экспериментальные данные; повидимому, только при очень малом удлинении ($\mu = 0,1$) формула (5.12) дает значительно завышенные значения для критического угла сравнительно с экспериментальными данными.

§ 6. О границах применения полученных выводов. Примеры, разобранные в предыдущем параграфе, дают, повидимому, достаточно удовлетворительное согласие с имеющимися экспериментальными данными; тем не менее необходимо помнить, что они получены на основе некоторых исходных соображений, которые нельзя считать бесспорными. На уточнении этих исходных соображений мы и остановимся.

В основу всей изложенной теории положена физическая схема, отличная от применяемой в обычных теориях крыла конечного размаха: спутную зону крыла вместо вихревой пелены, сбегает

с задней кромки крыла, мы представляем в виде двух, сбегаящих с боковых кромок крыла. Несомненно, что и та и другая схемы представляют теоретическую стилизацию, не совпадающую точно с тем, что мы имеем в действительности. Насколько нам известно, нет экспериментальных данных, которые указывали бы на действительное существование вихревой пелены, сбегаящей с задней кромки; все экспериментальные данные, показывают, что с крыла сбегает два цилиндрических вихря, которые обычно рассматриваются как результат свертывания вихревой пелены. Принятая выше вихревая схема, пожалуй, стоит в лучшем согласии с экспериментом.

Гораздо большее сомнение возбуждают выводы предшествующего параграфа. Формулы (5.10), (5.11) и (5.12) основаны в конце концов на принятии уравнения (5.5)

$$\frac{v_{\max}}{v_0} = 1.2$$

Но уравнение (5.5) не является выводом теоретическим; оно является результатом того наблюдаемого экспериментально факта, что «па верхней поверхности крыла в интервалах между точками, где давление наименьшее (и, следовательно, скорость наибольшая), и точкой, где происходит срыв струй, давление изменяется по линейному закону»¹. Но надо помнить, что эти экспериментальные данные все относятся к случаю обтекания без влияния боковых кромок; совершенно неясно, остается ли линейность изменения давления приближенно верной и в случае, когда к основному потоку добавляется еще течение через боковые кромки. Соответствующих экспериментальных данных, повидимому, нет, и этот случай требует дополнительного экспериментального изучения.

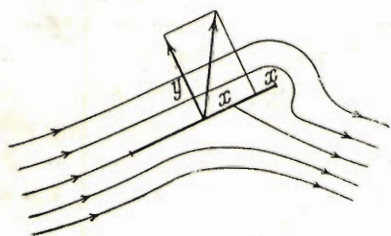
Наконец, мы считаем, что затекание через боковые кромки увеличивает скорость течения около задней кромки, но не изменяет скорости течения около передней кромки. Неясно, насколько допустимо это предположение, так как несомненно, что затекание через боковые кромки изменяет и скорость у передней кромки. Мы считаем, что это изменение пренебрежимо мало.

§ 7. Инверсия обтекания. Выравнивание скорости течения, вызываемое затеканием через боковые кромки, должно, естественно, вести к перемещению центра давления к середине крыла, но едва ли таким затеканием можно объяснить перемещение центра давления за середину крыла, ближе к задней кромке. Между тем имеются некоторые экспериментальные данные, показывающие перемещение центра давления в точки, удаленные на 0.25—0.30 длины крыла, считая от задней кромки. Повидимому, такое явление наблюдалось для случаев обтекания очень удлиненных тел типа фюзеляжа или корпуса снаряда. В дальнейшем сделана попытка дать теоретическое выяснение возможности подобного влияния.

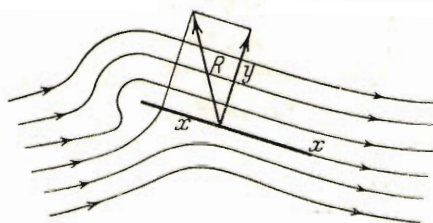
Во всех исследованиях по теории крыла предполагается, что обтекающий плавно поток сходит с острой задней кромки, чем и определяются

¹ См., например, В. В. Голубев [74], (стр. 227).

величина и направление циркуляции. Между тем, повидимому, нет никаких препятствий считать возможным такое обтекание, когда острая кромка находится впереди и эта передняя острая кромка является точкой разделения набегающего потока (фиг. 4). Если ограничиться случаем плоской пластинки, то получим вместо обтекания, указанного на фиг. 5, обтекание, указанное на фиг. 4. Для перехода от случая, указанного



Фиг. 4



Фиг. 5

на фиг. 4, к случаю указанному на фиг. 5, достаточно, очевидно, заменить угол атаки α на $-\alpha$ и, кроме того, изменить направление оси x . Отсюда получим следующие формулы:

$$X = 2\pi\rho v_\infty^2 \sin^2 \theta R, \quad Y = -2\pi\rho v_\infty^2 \sin \theta \cos \theta R \quad (7.1)$$

$$\text{мом}_o R = -\pi\rho v_\infty^2 R^2 \sin 2\theta \quad (7.2)$$

где R — радиус вспомогательной окружности на плоскости z , причем конформное отображение с плоскости пластинки ζ на плоскость вспомогательной окружности z определяется формулой

$$\zeta = z + \frac{R^2}{z} \quad (7.3)$$

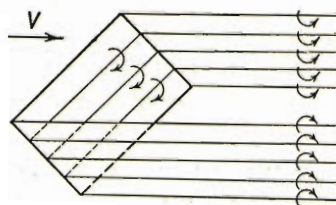
так что скорости в бесконечности на обеих плоскостях равны по величине и образуют равные углы с действительной осью, а величина хорды пластинки L определяется формулой

$$L = 4R \quad (7.4)$$

Очевидно, что формулы (7.1) и (7.2) можно получить обычным способом, если на вспомогательной плоскости z критические точки потока, обтекающего окружность, взять в точках $z_1 = -R$ и $z_2 = Re^{2\theta i}$ (вместо $z_1 = R$ и $z_2 = -Re^{2\theta i}$).

В случае пластинки при этом центр давления будет находиться в точке $\xi = R = 1/4 L$ (вместо $\xi = -R = -1/4 L$), т. е. на одной четверти хорды, считая от задней кромки.

Весьма вероятно, что подобный случай будет иметь место при движении клина острием вперед, а также тел типа артиллерийских снарядов. Вероятно, случаи, когда различные наблюдатели замечали смещение точки приложения силы во вторую половину хорды, и относятся к случаю такого инвертированного, обращенного потока.



Фиг. 6

§ 8. Общие выводы. Подведем итоги всем предшествующим соображениям. Экспериментальные данные, касающиеся крыльев малого удлинения, приводят к выводу, что скорости на верхней поверхности крыла, где происходит отрыв потока, при уменьшении удлинения крыла выравниваются, результатом чего являются увеличение критического угла атаки и перемещение центра давления от передней кромки. Причиной, вызывающей выравнивание скорости на верхней поверхности крыла, являются или уменьшение скорости обтекания вблизи передней кромки, что достигается, например, введением предкрылков^[74], или увеличение скорости обтекания вблизи задней кромки крыла, что может быть, например, достигнуто отсасыванием воздуха через щели в задней половине крыла. Все предыдущее построено на том соображении, что боковые кромки крыла в его задней части играют ту же роль, как щели для отсасывания воздуха.

Так как особенности поведения крыла малого удлинения проявляются главным образом при больших углах атаки, то и предлагаемая теория рассчитана прежде всего на случай больших углов атаки. При этом, в отличие от обычной теории крыла, мы делаем предположение, что присоединенные вихри сходят не с задней кромки крыла, а с его боковых кромок, причем образуют вихревые пленки не в плоскости крыла, а в плоскости, перпендикулярной к плоскости крыла.

Если ограничиться крылом, прямоугольным в плане, то принятые предположения позволяют приблизительно определить, основываясь на выводах теории пограничного слоя, изменение критического угла атаки в зависимости от удлинения, а вместе с тем показать увеличение скоростей обтекания в задней половине крыла и, следовательно, выравнивание скоростей на верхней поверхности крыла при уменьшении удлинения и смещение центра давления к середине крыла. В заключение показывается, что перемещения центра давления за середину крыла, на что, по видимому, указывают наблюдения некоторых исследователей, возможно при наступлении «инверсии» в обтекании крыла, когда передняя кромка становится точкой деления набегающего потока, что физически возможно.

По методу исследования настоящая работа примыкает к моим исследованиям по теории разрезного крыла и по влиянию отсасывания потока; во всех этих работах изучается влияние различных факторов на структуру пограничного слоя, т. е. в конце концов влияние вязкости воздуха на обтекание крыла, т. е. твердого тела хорошо обтекаемой формы.