



ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ ГОЛУБЕВ

## Владимир Васильевич Голубев<sup>1</sup>

Владимир Васильевич Голубев родился 4.XII (21.XI) 1884 г. в Сергиевом Посаде, ныне г. Загорск.

В 1895 г. В. В. Голубев поступил в Московскую первую мужскую гимназию. По окончании гимназии в 1903 г. В. В. Голубев поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. В университете он заинтересовался математикой. Этому способствовали прекрасные лекции по математике Л. К. Лахтина и особенно Б. К. Млодзеевского. Его непосредственным учителем был Дмитрий Федорович Егоров, ученый с весьма глубокими знаниями в разнообразных областях математики и широкими научными интересами.

В 1905 г. В. В. Голубев перешел на III курс. Революционные события надолго прервали занятия в университете. В. В. Голубев по совету Д. Ф. Егорова уехал в Париж, где слушал в течение полугода лекции Гурса, Аппеля, Пуанкаре, Пенлеве и Раффи. Эта поездка имела для В. В. Голубева большое значение, — она дала ему возможность познакомиться с научными интересами иностранных ученых, с особенностями их методов преподавания. В Париже В. В. Голубев жил вместе с Н. Н. Лузиным, который тогда только что окончил университет; советы Н. Н. Лузина сыграли большую роль в развитии научных интересов В. В. Голубева.

Вернувшись летом 1906 года в Россию, В. В. Голубев продолжал занятия в университете; главным образом он изучал теорию функций действительного и комплексного переменного и теорию дифференциальных уравнений.

В. В. Голубев окончил университет весной 1908 года. За дипломную работу «Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с неподвижными критическими точками» он получал от факультета премию Д. Д. Гнусина и по представлению Д. Ф. Егорова и Б. К. Млодзеевского был оставлен при университете на два года «для приготовления к профессорскому званию».

По окончании университета, с осени 1908 года, В. В. Голубев начинает педагогическую работу. Он преподает математику и космографию в средней школе.

В течение зимы 1910—1911 года В. В. Голубев успешно сдал магистерский экзамен и, как «магистрант», получил право преподавания в высшей школе.

<sup>1</sup> Подробная биография В. В. Голубева напечатана в Известиях отделения технических наук Академии Наук СССР, вып. 12, 1954.



В 1911 году В. В. Голубев напечатал научную статью *Об одном приложении теоремы Пикара к теории дифференциальных уравнений*. Это была маленькая заметка в «Математическом сборнике». В том же году он был выбран в члены Московского математического общества.

В апреле 1913 года по инициативе В. К. Млодзеевского и Д. Ф. Егорова физико-математический факультет Московского университета командировал В. В. Голубева на один год за границу для научной работы.

С апреля 1913 до февраля 1914 года В. В. Голубев в Геттингене слушал лекции Гильберта, Каратеодори, Ландау, Вейля, занимался изучением аналитической теории дифференциальных уравнений и по теории аналитических функций. В результате этой работы возникла тема его диссертации. В феврале 1914 года В. В. Голубев переехал в Париж, где слушал лекции Пикара, Адамара и Гранье, а также занимался работой над диссертацией.

По возвращении в Россию В. В. Голубев вернулся к преподавательской работе в коммерческом училище и в женской гимназии и одновременно с этим с осени 1914 года он был зачислен «сверхштатным преподавателем» математики в Московский институт инженеров путей сообщения, где начал вести практические занятия по математике. Кроме того, В. В. Голубев читал лекции на педагогических курсах им. Тихомирова.

В 1915 году, осенью, В. В. Голубев закончил магистерскую диссертацию *Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек*. В мае 1917 года после публичной защиты В. В. Голубева получил ученую степень «магистра чистой математики». Оппонентами были Д. Ф. Егоров и Н. И. Лузин.

В 1917 году В. В. Голубев на правах приват-доцента объявил в университете курс *Особые точки аналитических функций*. Однако он проработал в Московском университете всего один семестр. В октябре по рекомендации Д. Ф. Егорова Ученый совет Саратовского университета избрал В. В. Голубева и И. И. Привалова первыми профессорами математики нового физико-математического факультета.

В Саратовском университете В. В. Голубев одновременно с преподаванием вел большую административную работу. Осенью 1918 года он был избран деканом физико-математического факультета, в 1920 году — проректором, а затем ректором университета. В 1922 году В. В. Голубев закончил довольно большую работу *Исследования по теории особых точек*, которую он начал как диссертацию на соискание ученой степени доктора. Но защищать ее ему не пришлось, так как еще в 1919 году ученые степени были упразднены.

Кроме университета, В. В. Голубев преподавал с 1920 г. в Саратовском институте сельского хозяйства и мелиорации.

Первые годы работы в Саратове для В. В. Голубева сложились хорошо; в университете, помимо основных курсов, можно было читать интересные специальные курсы, появились способные молодые ученики из окончивших студентов и т. д. Однако превращение физико-математического факультета в отделение Педагогического факультета привело к сокращению

программ по математике. В. В. Голубев уже не мог заниматься теми разделами науки, которые его интересовали. Осенью 1930 г. он покинул Саратов и по приглашению С. А. Чаплыгина перешел на работу в Центральный аэро-гидродинамический институт (ЦАГИ) на должность старшего инженера. Одновременно В. В. Голубев был приглашен профессором в Московский государственный университет, где также вел преподавание, главным образом по аэрогидромеханике.

С 1932 г. В. В. Голубев начал преподавание высшей математики, и до последнего дня своей жизни руководил кафедрой математики в Военно-воздушной инженерной академии имени Жуковского; с 1939 г. он вступил в кадры Советской Армии.

Владимир Васильевич Голубев любил педагогическую деятельность; из всех своих многочисленных почетных званий он больше всего гордился званием профессора—руководителя и воспитателя молодежи.

Так же как в молодые годы в Саратове, одновременно с преподаванием В. В. Голубев постоянно вел большую административную и организационную работу; с 1936 года он состоял директором Научно-исследовательского института механики Московского университета, а с 1944 до 1952 года—деканом Механико-математического факультета. Последние годы В. В. Голубев вел научную работу в Институте механики АН СССР (членом-корреспондентом Академии Наук СССР он был выбран в 1934 г.).

Владимир Васильевич Голубев оставил о себе светлую память, прожив прекрасную большую жизнь ученого, педагога, организатора и общественного деятеля.

## ОБЗОР НАУЧНЫХ ТРУДОВ В. В. ГОЛУБЕВА<sup>1</sup>

Основные работы Владимира Васильевича Голубева следует разделить на две группы: математические исследования и исследования, посвященные различным разделам современной аэродинамики; несколько особое место занимает его работа по движению тела с одной неподвижной точкой.

### Работы по математике

Математические исследования В. В. Голубева относятся к области аналитической теории дифференциальных уравнений, к общей теории функций комплексного переменного и к теории автоморфных функций.

<sup>1</sup> При составлении этого обзора редакцией были использованы следующие материалы. Сохранившиеся в архиве высказывания покойного академика Н. Н. Лузина о математических исследованиях В. В. Голубева; дополнения по математическим монографиям В. В. Голубева и, в частности, о личных результатах В. В. Голубева, опубликованных в лекциях по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, сделаны П. Я. Кочиной и Г. Н. Свешниковым.

Обзор исследований В. В. Голубева в области аэродинамики составлен по материалам А. А. Космодемьянского; цикл работ, связанных с теорией машущего крыла, описан Я. Е. Половским.



1. Аналитической теорией дифференциальных уравнений В. В. Голубев начал заниматься еще будучи студентом; так, его дипломная работа была посвящена теории уравнений Пенлеве, интегралы которых не имеют подвижных критических точек. Затем в работах *Об одном приложении теоремы Пикара к теории дифференциальных уравнений* <sup>[1]</sup> (1911) и *К теории уравнений Пенлеве* <sup>[2]</sup> (1942) В. В. Голубев впервые осуществил идею применения теоремы Пикара одновременно с теоремой единственности к оценке общих свойств интегралов. Этот способ дает возможность легко устанавливать отсутствие однозначных интегралов для некоторого класса дифференциальных уравнений, а также выявить природу агармонического отношения четырех однозначных интегралов в области изолированной особой точки.

В статье об уравнениях Пенлеве В. В. Голубевым дано доказательство действительного отсутствия критических точек в интегралах уравнений Пенлеве, и одновременно с этим построены целые функции, через отношение которых могут быть представлены интегралы уравнений Пенлеве, а также написаны дифференциальные уравнения для этих функций.

2. Работы В. В. Голубева по общей теории функции комплексного переменного имеют исключительно важное значение. Достаточно указать, что из магистерской диссертации В. В. Голубева *Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек* <sup>[3]</sup> (1916) вытекли исследования И. И. Привалова, Н. Н. Лузина, П. С. Урисона, В. С. Федорова и ряд других работ, влияние которых на развитие науки легко проследить например по работам Данжуа (Denjoy).

Одной из основных проблем, которые поставлены В. В. Голубевым в названной диссертации, явилась проблема о возможности распространения классических формул теории функций комплексного переменного (например, интеграла Коши) на произвольные спрямляемые контуры.

Дело в том, что все работы после Коши или не уточняли природы пути интегрирования, или явно налагали слишком большие и, повидимому, совершенно излишние ограничения, вроде непрерывного изменения радиуса кривизны вдоль кривой интеграции. Освобождение от этих ограничений являлось важным насущным делом рассматриваемой ветви науки. Вместе с тем это освобождение оказалось делом весьма трудным, так как простой тривиальный переход к пределу здесь был незаконным. В. В. Голубеву понадобилось установить многие весьма тонкие предварительные понятия, геометрические образы, конструкции, леммы и теоремы, чтобы установить, наконец, со всей строгостью сохранение избранных им классических формул теории функции комплексного переменного для спрямляемых контуров общего вида.

Из точных результатов, достигнутых самим В. В. Голубевым, следует отметить в первую очередь сохранение теоремы Фату (Fatou) об ограниченных функциях для спрямляемых замкнутых контуров. Здесь же В. В. Голубев впервые высказал свою известную гипотезу об инвариантности множеств линейной меры нуль при конформном отображении, послужившую предметом дальнейших работ других авторов.



В этой же диссертации В. В. Голубев, после того как впервые установил ряд важных теорем о функциях проективноограниченных, дал чрезвычайно ценное понятие о «множестве Пикара» и показал, что знание геометрического строения этого множества имеет большое значение, так как от него зависят глубокие свойства аналитических функций.

Из других результатов, находящихся в диссертации В. В. Голубева, следует указать на открытие им функций, непрерывных всюду и имеющих совершенное множество особых точек с нулевой плоскостной мерой. Существование таких функций, несмотря на работы Помпейю (Pompeiu) и Данжуа, подвергалось сильным сомнениям, и В. В. Голубеву принадлежит заслуга установления их существования.

Наконец, в той же диссертации В. В. Голубевым высказаны важные идеи о продолжаемости функции за особую линию, впоследствии развитые французским академиком Данжуа. Некоторые вопросы, относящиеся к кругу идей, разрабатываемых в диссертации, опубликованы В. В. Голубевым в статьях *Sur les fonctions à singularités discontinues* <sup>[4]</sup> (1914) и *О теореме Пикара* <sup>[9,16]</sup> (1924—1929).

Из других результатов В. В. Голубева, находящихся вне диссертации, следует упомянуть статью *О звезде Миттаг — Леффлера* <sup>[3]</sup> (1914), в которой изучается звезда, лежащая в конечном куске плоскости и происходящая от совершенного прерывного множества точек.

Кроме рассмотренной диссертации, В. В. Голубеву принадлежит еще и другая большая работа по общей теории функций комплексного переменного, опубликованная фрагментами в Ученых записках Саратовского университета под общим заглавием *Исследования по теории особых точек однозначных функций* <sup>[8]</sup> (1924—1929).

Идея этой работы состоит в изучении функций с совершенным множеством особых точек методами, аналогичными тем, которые применяются в теории целых функций. В. В. Голубев исследовал применимость, в принципе, к функциям, имеющим окружность особой линией, приемов, употребляемых в теории целых функций.

Для определения характера особой точки по аналитическому выражению функции потребовалось введение понятия «канонического произведения» для функций рассматриваемого класса. После этого на них удалось перенести понятие жанра, после чего тотчас же получились аналоги теорем Адамара, Бореля, Линделёфа и др.

В. В. Голубев занимался также изучением частоты значений независимого переменного, при которых функция принимает равные значения.

При этом В. В. Голубев независимо получил, как предельный случай, знаменитую теорему Витали (Vitali) относительно распределения нулей ограниченной функции. В этих же работах В. В. Голубевым опубликованы неравенство и сходимости, характеризующие теорему Монтеля, задолго до появления соответствующей работы Монтеля. Наконец, В. В. Голубевым много было сделано по переносу результатов, связанных с теоремой Пикара, на функции, данные внутри окружности. Здесь же В. В. Голубев дал первые результаты о дескриптивном строении множеств.



Вне этой большой работы В. В. Голубевым в статьях *О соответствии границ при конформном отображении* [10] (1924) и *О конформном отображении границ областей* [17] (1929) даны очень ценные и парадоксальные результаты о несохранении инвариантности множества меры нуль при неспрямляемой границе и о сохранении этой инвариантности при конформном отображении римановых поверхностей определенного вида.

В статье *К теории лакунарных рядов* [19] (1930) В. В. Голубев получил результаты, частично совпадающие с изысканиями Госса (Goss).

3. Автоморфные функции всегда привлекали особое внимание В. В. Голубева [13, 15, 20], видевшего в них наиболее простую модель функций, имеющих окружность особой линией. Естественно, первое, что нужно было сделать, — это применить общие теоремы, найденные для функций внутри особой окружности, к автоморфным функциям. В. В. Голубев нашел для фуксовых функций вид их аналитического выражения и показатель сходимости множества эквивалентных точек, который оказался не превосходящим 2. Как следствие отсюда вытекло, что логарифм квадрата модуля эллиптической функции есть вторая производная ограниченной функции.

Затем В. В. Голубевым найдены условия для того, чтобы автоморфная функция существовала в смысле подхода по некасательным путям почти всюду на особой окружности.

Наконец, В. В. Голубевым сделано крупное открытие ограниченных автоморфных функций, существование которых а priori нельзя было предполагать.

4. Кроме математических работ исследовательского характера, В. В. Голубев написал две тесно связанные между собой монографии по аналитической теории дифференциальных уравнений.

Первая *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений* [80] (1950) — излагает, помимо собственных задач и методов аналитической теории дифференциальных уравнений и поверхностей Римана, общие вопросы теории многозначных функций и основные понятия теории полнэдрических, модулярных и автоморфных функций, т. е. функций, связанных с теорией групп движения, с одной стороны, и с важнейшими вопросами конформного отображения — с другой. Особое внимание уделено уравнениям первого и второго порядков с неподвижными критическими точками, а в теории линейных уравнений — уравнению Римана и его частным случаям.

Вторая монография *Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки* [89] (1953) — ставит своей задачей показать, как классическая задача механики связана с такими, на первый взгляд далекими вопросами чистой математики, как теория поверхностей Римана, зэта-функции, задача обращения гиперэллиптических интегралов, метод малого параметра в теории дифференциальных уравнений. Соответственно этому первая часть книги посвящена изложению теории последнего множителя Якоби и метода малого параметра, применением которого и выявляются случаи отсутствия в интегралах уравнений Эйлера подвижных критических особых точек. Затем изло-



жены методы приведения уравнений движения тяжелого тела около неподвижной точки к квадратурам в случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской.

Для отыскания необходимых условий однозначности интегралов уравнений движения В. В. Голубев применяет метод малого параметра, введенный Пуанкаре и развитый Пенлеве. При помощи этого метода В. В. Голубев нашел оригинальный, наиболее простой, путь выяснения всех возможных случаев однозначных общих интегралов.

Далее, в книге дается обстоятельное изложение теории эллиптических и гиперэллиптических интегралов — на основе теории алгебраических функций и поверхностей Римана, — при помощи которых осуществляется интегрирование уравнений движения в классических случаях, в том числе в особенно сложном случае С. В. Ковалевской.

Рассмотрены также частные случаи интегрируемости уравнений движения (Гесса — Аппельрота, Горячева — Чаплыгина, Бобылева — Стеклова, Млодзеевского) и приведены интересные исторические замечания.

5. В. В. Голубев был хорошо знаком с историей математики, особенно интересовался работами русских математиков, и им составлены ценные комментарии к некоторым работам П. Л. Чебышева, относящимся к интегрированию иррациональных дифференциалов.

Кроме того, в сборнике «Научное наследие Чебышева. Т. 1. Математика» (1945 г.) В. В. Голубевым помещена статья *Работы Чебышева по интегрированию алгебраических функций*. В этой статье изложены генезис и история и, ей Абеля и их влияние на работы Чебышева. Затем изложены работы Лиувилля по интегрированию алгебраических функций и подчеркнута независимость от них работ Чебышева. Самые работы Чебышева охарактеризованы с точки зрения идей Римана, и работам Чебышева придан смысл с точки зрения общей теории алгебраических функций.

### Работы по аэродинамике

В. В. Голубев опубликовал с 1927 г. более 40 работ, относящихся к теории механизированного крыла, теории пограничного слоя, теории вихревого сопротивления, теории крыла конечного размаха и теории машущего крыла.

6. Для уменьшения посадочной скорости самолета инженерами были предложены так называемые механизированные крылья; наибольшее распространение получили: предкрылок, закрылок, циток и щитовидный закрылок. Для выяснения аэродинамических характеристик крыла с предкрылком или закрылком В. В. Голубев предложил учитывать влияние предкрылка или закрылка на поле скоростей основного крыла при помощи присоединенного вихря, заменяющего предкрылок или закрылок.

Изучая расположение критических точек на окружности единичного радиуса, В. В. Голубев доказал интересную теорему: сумма смещений критических точек на окружности единичного радиуса, происходящих от действия добавочных вихрей, равна нулю. Оказывается, что это свойство критических точек на окружности остается верным при любом числе добавочных вихрей и при любом их расположении около окружности.



Зная способ определения положения критических точек на окружности единичного радиуса, можно проанализировать влияние предкрылка и закрылка на картину распределения скоростей по контуру профиля крыла.

Действие добавочного вихря сводится к изменению положения критической точки разделения потока и к изменению поля скоростей. Изменение картины распределения скоростей, обусловленное добавочным вихрем, сводится к некоторому выравниванию скоростей на большей части верхней поверхности крыла. Уменьшение максимальной скорости позволяет также увеличить предельный угол атаки, до которого профиль крыла работает в условиях плавного обтекания. Из анализа кинематической картины обтекания профиля при наличии вихрей В. В. Голубев получил следующие основные результаты о механизме действия предкрылка и закрылка.

Действие предкрылка сказывается в увеличении предельного угла атаки, которое получается от действия двух источников: от изменения положения критической точки и проистекающего отсюда кажущегося изменения угла атаки и от выравнивания скоростей на профиле крыла. В случае закрылка имеет место уменьшение предельного угла атаки, происходящее от смещения критической точки и кажущегося увеличения угла атаки, которое отчасти компенсируется перераспределением скоростей. Применение ко всей системе (крыло плюс вихри) теоремы Жуковского позволяет легко установить, что закрылок дает увеличение подъемной силы значительно большее, чем предкрылок.

Для определения циркуляции добавочных вихрей В. В. Голубев вводит гипотезу: циркуляция добавочных вихрей равна циркуляции скорости вокруг пластинки, хорда которой равна хорде предкрылка или закрылка, а скорость потока равна той скорости, которая получится в точке, соответствующей центру добавочного вихря, при отсутствии добавочных вихрей.

Вычисления, проведенные В. В. Голубевым для ряда конкретных случаев, показали, что предкрылок весьма мало увеличивает циркуляцию  $\Gamma$ , но зато резко увеличивает предельный угол атаки, а вместе с тем и подъемную силу, а закрылок незначительно уменьшает предельный угол атаки, но зато резко увеличивает циркуляцию, что в свою очередь значительно увеличивает подъемную силу, т. е. действие предкрылка сводится к увеличению критического (предельного) угла атаки; действие закрылка эквивалентно влиянию изменения изогнутости основного профиля.

Для изучения работы щитка и щитовидного закрылка В. В. Голубевым была развита общая теория обтекания внешней части многоугольника с использованием формулы Шварца — Кристоффеля, дающей отображение внешней части многоугольника на внешнюю часть окружности единичного радиуса  $R=1$ . Развитие этой теории позволило получить ранее известные результаты С. А. Чаплыгина и Н. С. Аржаникова и др. единым методом и дополнительно рассмотреть течения около так называемых звездообразных профилей<sup>[51]</sup>.

7. В области теории пограничного слоя В. В. Голубеву принадлежат следующие научные результаты: установление интегральных соотноше-



ний Голубева; интегрирование уравнения Польшаузена для «односкатного» профиля; качественный анализ решения уравнения пограничного слоя для плоской пластинки.

Из интегральных соотношений В. В. Голубева получается как частный случай интегральное соотношение Л. С. Лейбензона, полученное применением теоремы о кинетической энергии к элементу пограничного слоя, и интегральное соотношение Кармана, выведенное при помощи теоремы о количестве движения. Следует отметить, что бесконечная совокупность интегральных соотношений В. В. Голубева эквивалентна дифференциальным уравнениям пограничного слоя. Указанные интегральные соотношения Кармана и Л. С. Лейбензона — ни каждое в отдельности, ни совместно — не могут быть эквивалентны этим уравнениям. Это обстоятельство следует иметь в виду при построении приближенных решений пограничного слоя, исходя из соотношений Кармана или Л. С. Лейбензона. Система интегральных соотношений В. В. Голубева позволяет решать большое число разнообразных конкретных задач.

В научной литературе по теории пограничного слоя большое распространение получил тот случай интеграции уравнений пограничного слоя Польшаузена, когда распределение давлений вне пограничного слоя изменяется по линейному закону (односкатный профиль давлений). Следует указать, что решение уравнений пограничного слоя для этого частного случая было впервые дано В. В. Голубевым.

В известной книге В. В. Голубева<sup>[23]</sup> дано качественное исследование дифференциального уравнения пограничного слоя, причем впервые в научной литературе по пограничному слою строго показан монотонный характер интегральной кривой, соответствующей решению этого уравнения, удовлетворяющему краевым условиям. Кроме того, это качественное исследование позволило установить, что если функция  $F(z)$  является интегралом уравнения пограничного слоя, то функции  $k^2 F_1(kz)$ , зависящие от параметра  $k$ , также будут интегралами этого уравнения. Это позволяет формулировать вспомогательную краевую задачу с упрощенными граничными условиями, решение которой дает возможность найти интеграл уравнения пограничного слоя с реальными условиями на границах слоя.

8. В. В. Голубеву принадлежит разъяснение противоречия в условиях устойчивости шахматных вихревых дорожек, полученных в известных работах Н. Е. Жуковского и Кармана. В. В. Голубев показал, что условия устойчивости шахматных вихревых дорожек получаются различными при различных способах наложения возмущений. Так, если смещать только один вихрь (как это и делал Жуковский), то получаются условия устойчивости Жуковского, если смещать все вихри, то получаются условия устойчивости Кармана. Налагая возмущения на вихри только верхней цепочки или только нижней цепочки и т. д., можно получить серию различных условий устойчивости. Так как возмущения, рассмотренные Карманом, являются наиболее общими, следует считать полученное им условие устойчивости наиболее близким к геометрическим конфигурациям наблюдаемых вихревых дорожек, образующихся за плохо обтекаемыми телами.



9. При решении основного интегродифференциального уравнения крыла конечного размаха широкое распространение получил метод Глауэрта. Этот метод обладает одним существенным недостатком, состоящим в том, что результаты  $n$ -го приближения нельзя использовать при отыскании  $(n+1)$ -го приближения. Все вычисления для  $(n+1)$ -го приближения приходится проводить заново. В. В. Голубев дал другой метод решения основной задачи теории крыла конечного размаха, названный им методом тригонометрических разложений.

10. Среди проблем нестационарного движения находится весьма важная в научном и практическом отношении задача машущего крыла. Одна из основных трудностей при рассмотрении вопросов неустановившегося движения состоит в том, что такое движение происходит при переменной циркуляции скорости вокруг крыла. Вследствие этого, согласно принципу сохранения циркуляции, от крыла отходят вихри, создающие за ним сложную завихренную зону. Эти вихревые образования в кильватерной зоне в свою очередь влияют на обтекание, вызывая в области крыла дополнительные индуктивные скорости.

В 1922 году Л. Прандтль предложил в качестве вихревой схемы вихревую пелену. По этой схеме поток рассматривается как потенциальный всюду, кроме контура крыла и некоторой линии разрыва скоростей, имеющей начало в задней острой кромке крыла; кроме того, принимается предположение о плоском строении вихревой пелены. Последнее предположение дает возможность рассматривать только бесконечно малые колебания крыла, имеющего бесконечно малый угол атаки, т. е. рассматривать вибрации тонкого крыла. Таким образом, результаты, получаемые в рамках схемы Прандтля, носят лишь частный характер.

В 1926 году была опубликована работа С. А. Чаплыгина *О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое тело*, в которой рассматривалось любое неустановившееся движение тела, плавно обтекаемое неограниченным безвихревым потоком несжимаемой жидкости. С. А. Чаплыгин предполагает отсутствие завихренной зоны за крылом. Такое допущение влечет за собой необходимость принятия условия о постоянстве циркуляции вокруг профиля крыла, без чего невозможно удовлетворить основному в теории крыла постулату Чаплыгина — Жуковского о сходе струй с острой задней кромки крыла. При указанных условиях автор получил обобщение своих замечательных формул для подъемной силы и момента профиля крыла на случай неустановившегося движения. Таким образом, С. А. Чаплыгин разобрал частный, но весьма важный случай неустановившегося движения крыла с постоянной циркуляцией. Прогресс, достигнутый С. А. Чаплыгиным и его последователями, состоит в том, что в частном случае постоянства циркуляции скорости вокруг профиля крыла задача решалась для конечных колебаний крыла любой формы и толщины, при конечных углах атаки.

С 1942 года публикуются работы В. В. Голубева по теории машущего крыла, в которых рассматриваются конечные колебания крыла в плоскопараллельном потоке при самых общих предположениях отно-



сительно угла атаки, формы и толщины профиля [55,58,67,74,75,82]. В качестве вихревой системы кильватерной зоны за машущим крылом В. В. Голубев берет вихревую дорожку. Эта схема предполагает, что в крайних положениях крыла, производящего возвратно-поступательные колебания с одинаковой скоростью опускания и поднятия, от крыла отделяются дискретные вихри постоянной циркуляции, образующие за крылом вихревую дорожку кармановского типа, но с противоположным направлением вращения вихрей. Выполнение постулата Чаплыгина — Жуковского требует изменения циркуляции отходящих вихрей по мере их удаления от крыла, а это противоречит основной теореме о постоянстве циркуляции вихрей. В работах В. В. Голубева показывается, что образование вихрей в идеальной, лишенной вязкости жидкости физически невозможно, и выполнение теоремы о постоянстве циркуляции вихрей требует учета сил вязкости. Наиболее удобной формой учета сил вязкости является теория пограничного слоя, в которой этот слой рассматривается как завихренная зона идеальной жидкости. Крыло находится под действием потока и непрерывно распределенных вихрей пограничного слоя. Влияние отходящего от крыла вихря на величину циркуляции вокруг крыла компенсируется соответствующим изменением завихренности пограничного слоя, так что выполняются и постулат Чаплыгина — Жуковского и теорема Томсона.

Во время опускания или поднятия крыла влияние отходящих вихрей на положение точки схода потока (при сохранении неизменной циркуляции вокруг крыла) компенсируется соответствующим изменением структуры пограничного слоя. В крайних положениях крыла, ввиду резкого изменения условий обтекания, такая компенсация становится невозможной, и пограничный слой распадается — выделяется вихрь. Эти вихри и образуют двойную вихревую дорожку шахматного вида, т. е. дорожку кармановского типа, образующуюся при обтекании преграды, но с противоположным направлением вращения вихрей. С этой точки зрения пограничный слой при колебаниях крыла не распадается непрерывно, образуя вихревую пелену, а распадение происходит только в верхнем и нижнем положениях крыла. В процессе перехода крыла из одного крайнего положения в другое крайнее положение толщина пограничного слоя нарастает. Таким образом, пограничный слой, т. е. в конечном счете вязкость жидкости, является своеобразным регулятором, позволяющим одновременно удовлетворять и постулату Чаплыгина — Жуковского и теореме Томсона.

Применяя общие теоремы аэромеханики и теорию вихревых дорожек, В. В. Голубев получает формулы для тяги и подъемной силы машущего крыла, определяет циркуляцию вихрей дорожки и решает ряд других задач машущего крыла. В. В. Голубев рассмотрел вопрос о так называемом «полете на месте», который наблюдается в природе у некоторых птиц и насекомых. Развиваемая им теория вполне объясняет и этот вид машущего полета, дает все необходимые количественные соотношения, а выводы хорошо согласуются с имеющимися опытными данными. В монографии [74] В. В. Голубева изложены как прежние результаты, так и решение ряда других вопросов машущего крыла: о максимальной тяге,



о выгоднейших режимах полета и др.

Среди задач машущего крыла фундаментальное значение имеет вопрос о его коэффициенте полезного действия. Этой важной задачей В. В. Голубев занимался ряд лет и в 1953 г. получил ее полное решение<sup>[81]</sup>.

В докладе, прочитанном на сессии Отделения технических наук АН СССР 11—12 января 1946 г., В. В. Голубев выдвинул ряд задач и в том числе вопрос о возможности образования вихревых дорожек, резко отличающихся от направления течения позади тела. Эксперименты оправдали гипотезы, положенные В. В. Голубевым в основу теории машущего крыла, и подтвердили его предположение о существовании „косых“ вихревых дорожек, когда скорости опускания и поднятия различны.

11. В заключение нужно отметить значение монографий В. В. Голубева по теории крыла аэроплана, на которых воспитывалось несколько поколений инженеров и ученых. По этим книгам можно проследить развитие идей русской [аэродинамической школы Жуковского—Чаплыгина и ее значение для развития теоретической аэродинамики.

#### СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ В. В. ГОЛУБЕВА

1. Об одном приложении теоремы Picard'a к теории дифференциальных уравнений. Математ. сборн., т. 27, 1911.
2. К теории уравнений Painlevé. Математ. сборн., т. 28, 1912.
3. О звезде Mittag-Leffler'a. Математ. сборн., т. 29, 1914.
4. Sur les fonctions à singularités discontinues. Comptes Rendus, Paris, 1914.
5. Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек. Учен. зап. МУ, 1916.
6. Введение в математическую статистику. Крайиздат, Саратов, 1920.
7. Теория логарифмов в курсе средней школы. Учен. зап. Сарат. пед. ин-та, 1921.
8. Исследования по теории особых точек однозначных функций. Учен. зап. Сарат. гос. университета, т. I, вып. 3, 1924; т. II, вып. 1, 1924; т. IV, вып. 2, 1925; т. V, вып. 3, 1926; т. VI, вып. 3, 1927.
9. О теореме Picard'a. Математ. сборн., т. 31, 1924.
10. О соответствии границ при конформном отображении. Матем. сб., т. 31, 1924.
11. Об одном классе автоморфных функций. Труды I съезда математиков, 1927.
12. Sur une fonction automorphe bornée. Comptes Rendus, Paris, 1926.
13. Теория крыла аэроплана в плоско-параллельном потоке. Тр. ЦАГИ, в. 29, 1927.
14. Об элементарном вычислении некоторых сумм. Отчет о деятельности математической Конференции Педагогического общества Дальневосточного университета. Владивосток, 1927 г.
15. К теории медленно растущих автоморфных функций. Учен. зап. Сарат. гос. университета, т. VII, 1928.
16. О теореме Picard'a. Учен. зап. Сарат. гос. университете, т. VII, вып. 3, 1929.
17. О конформном отображении границ областей. Учен. зап. Сарат. гос. университет, т. VII, вып. 3, 1929.
18. Элементы математической статистики в приложении к лесному делу. Изд. Центр. упр. лесами (ЦУЛ), 1929.
19. К теории лакунарных рядов. Бюллетень № 1 съезда математиков. Харьков, 1930; Гиз. Укр.
20. Recherches sur les fonctions automorphes. Annali di Matematica, Bologna, 1930.
21. О пограничном слое. Труды 1-й конференции по аэродинамике, 1931.
22. К теории разрезного крыла. Труды 1-й конференции по аэродинамике, 1931.
23. Теория крыла аэроплана конечного размаха. Труды ЦАГИ, вып. 108, 1931.



24. Об устойчивости вихревых дорог Кармана. Изв. АН СССР, 1932.
25. Обзор трудов по аэродинамике (совместно с Д. С. Кузнецовым). Сборник «Механика за XV лет», 1932.
26. К теории вихревых дорог Кармана. Математ. сборн., т. 40, 1933.
27. Исследования по теории разрезного крыла, ч. 1. Теория предкрылка в плоско-параллельном потоке. Труды ИАШ, вып. 147, 1933.
28. К вопросу об аналитическом изображении автоморфных функций. Учен. зап. Саратов. гос. университета, т. 12, 1934.
29. Математика и техника. Фронт науки и техники, № 5—6, 1934.
30. К теории разрезного крыла. Труды ЦАГИ, вып. 240, 1935.
31. О работе крыла с отсасыванием пограничного слоя. Технич. заметки, ЦАГИ, № 45, 1935.
32. Некоторые математические задачи, связанные с теорией крыла, Труды конференции по механике при ВВА КА, 1936.
33. К теории продувки цилиндров двигателей внутреннего сгорания (совместно с С. А. Чаплыгиным). Труды ЦАГИ, вып. 171, 1936.
34. Математика и техника. Журнал «СОРЕНА», № 10, 1935.
35. К теории предкрылка и закрылка (совместно с С. А. Чаплыгиным). Труды ЦАГИ, вып. 175, 1936.
36. The Theory of Slaf in a two-dimensional Flow. Journal of the Royal Aeronautical Society, 1938.
37. К теории влияния земли на подъемную силу крыла. Тр. ЦАГИ, вып. 301, 1937.
38. Аэродинамические основания методов увеличения подъемной силы крыла. Труды 3-й конференции по аэродинамике, 1937.
39. Исследования по теории разрезного крыла, т. II. Приближенная теория предкрылка и закрылка. Труды ЦАГИ, вып. 306, 1937.
40. Н. Е. Жуковский (биограф. очерк). Собр. соч. Н. Е. Жуковского, т. I, 1937.
41. Обтекание цилиндра в присутствии системы неподвижных вихрей. Учен. зап. МГУ, вып. 7, 1937.
42. Основные формулы гидромеханики (в кн.: Дюренд. Аэромеханика, т. I, 1937).
43. Работы по гидромеханике (совместно с С. А. Чаплыгиным). Вестник АН СССР, 1938.
44. О силах, действующих на крыло в неоднородном потоке. Труды ЦАГИ, вып. 342, 1938.
45. О влиянии надстроек на подъемную силу крыла. Тр. ЦАГИ, вып. 342, 1938.
46. К теории течений на двулистной поверхности Римана. Учен. зап. МГУ, вып. 24, 1938.
47. К теории щитков крыльев самолета. Труды ЦАГИ, вып. 398, 1938.
48. Теория крыла аэроплана в плоско-параллельном потоке (2-е перераб. изд.) ГТТИ, 1938.
49. Откуда берется подъемная сила крыла. Физика в школе, 1938.
50. Теоретические основания методов увеличения подъемной силы крыла. Разрезные крылья, щитки, отсасывание. Труды ВВА КА, № 46, 1939.
51. Приложение формул Шварца-Кристоффеля к построению аэродинамических профилей. Труды ЦАГИ, вып. 492, 1940.
52. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. ГТТИ, 1940.
53. Методические вопросы преподавания математики во втузах, Вестник высшей школы, № 5, 1941.
54. Н. Е. Жуковский. Его жизнь и научные труды. Бюро новой тех. НКАП, 1941.
55. К теории пограничного слоя. Юбилейный сборник ВВА КА, 1942.
56. Академик С. А. Чаплыгин. Его жизнь, научная и общественная деятельность. Вестник АН СССР, № 3, 1944.
57. Академик С. А. Чаплыгин (сокращен. излож. предыдущей статьи). Наука и жизнь, № 4—5, 1944.



58. Механизм образования тяги машущего крыла. Науч. конферен. ВВА КА, 1944
59. С. А. Чаплыгин. Его жизнь, научная и общественная деятельность. Бюро новой техники. НКАП, 1944.
60. Русские работы по механике и их влияние на мировую науку. Научная конференция МГУ, 1944.
61. Работы П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций. Научное наследие П. Л. Чебышева. I. Математика. Изд. АН СССР, 1945.
62. Машущее крыло; общая проблема тяги и сопротивления. Общее собрание АН СССР, 14—17 октября 1944 г. Изд. АН СССР, 1945.
63. Исследования русских ученых в области технической аэромеханики. Вестник АН СССР, № 5—6, 1945.
64. К теории влияния эллиптических труб на помещенное в них крыло самолета. Учен. зап. МГУ.
65. Влияние формы крыла в плане на его аэродинамические характеристик; крылья малых удлинений. Учен. зап. МГУ. 1949.
66. Н. Е. Жуковский. Отец русской авиации. Изд. лекц. бюро ВКВШ, 1945.
67. Тяга машущего крыла. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1946.
68. К теории крыла малого удлинения. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1947.
69. Н. Е. Жуковский. «Физика в школе, № 2, 1947.
70. Н. Е. Жуковский. Успехи математических наук, № 6, 1947.
71. Н. Е. Жуковский и современная техническая аэромеханика. Юбилейный сборник. АН СССР, ч. II, 1947.
72. П. Л. Чебышев. Об интегрировании иррациональных дифференциалов. П. Л. Чебышев. Соч., т. II, 1947, стр. 485.
73. П. Л. Чебышев. Соч., т. V, 1951, стр. 3.
74. Лекции по теории крыла. ГТТИ, 1949.
75. Некоторые вопросы теории машущего крыла. Учен. зап. МГУ, т. IV, 1950.
76. Работы С. В. Ковалевской по задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.
77. Крыло и винт самолета. Механика за XXX лет, 1950, стр. 341.
78. Ник. Егор. Жуковский. «Замечательные ученые Моск. университета», 1949.
79. Серг. Алексеевич Чаплыгин. «Замечательные ученые Моск. университета», 1951.
80. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2-е. ГТТИ, 1950.
81. Биография Н. Н. Лузина (совместно с Н. К. Бари). В кн.: Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд. ГТТИ, 1951.
82. Исследования по теории машущего крыла. Учен. зап. МГУ, т. V, 1951.
83. В. В. Голубев. Работы П. Е. Жуковского в области теории крыла и винта самолета. Вестник воздушного флота, № 3, 1951, стр. 36.
84. Работы П. Е. Жуковского по аэродинамике. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1951.
85. С. А. Чаплыгин (К 10-летию со дня смерти). Наука и жизнь, № 10, 1952.
86. По поводу некоторых пособий по элементарной математике. Советская книга, декабрь, 1952.
87. Гордость советской науки (К 10-летию со дня смерти С. А. Чаплыгина). Природа, декабрь, 1952.
88. Работы Н. Е. Жуковского по аэродинамике (перепечатка № 87). Труды по истории техники, № 4, 1952.
89. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ГТТИ, 1953.
90. В. В. Голубев. Работы Н. Е. Жуковского по аэродинамике. Труды по истории техники АН СССР, вып. IV, 1954, стр. 26—33.
91. О коэффициенте полезного действия машущего крыла. Уч. зап. МГУ, 1954.
92. К теории крыла малого удлинения. ПММ, т. XIX, в. 2, 1955.
93. К вопросу о строении спутной зоны за плохо обтекаемым телом. Известия ОТН АН СССР. 1954. № 12.