**Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955**
**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ И МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

**Г. Л. Гродзовский**
(Жуковский)

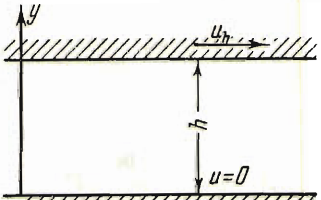
При изучении течений вязкого газа особый интерес представляют случаи, когда можно точно проинтегрировать движение вязкого газа. В гидромеханике несжимаемой жидкости известно точное решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя движущимися плоскими стенками и между двумя вращающимися цилиндрами [1, 2]. Ниже дано обобщение задачи для вязкого сжимаемого газа.

Рассмотрим сначала стационарное течение вязкого газа между двумя движущимися бесконечными параллельными плоскими стенками. Это течение эквивалентно течению газа в зазоре между двумя вращающимися соосными цилиндрами при малом зазоре между цилиндрами по сравнению с радиусами цилиндров. Будем рассматривать только относительное движение одной из стенок относительно неподвижной другой стенки; переносное движение обеих стенок, естественно, не влияет на решение задачи. Примем для определенности, что неподвижная стенка нетеплопроводна и температура газа у нее $T_0$; теплопередача через вторую (движущуюся) стенку и температура газа у нее $T_h$ должны определиться из решения задачи при заданных значениях скорости перемещения второй стенки $u_h$ и расстояния между стенками $y = h$ (фиг. 1).

Мы рассматриваем случай, когда течение газа в зазоре между движущимися бесконечными параллельными плоскими стенками определяется только вязкими силами за счет движении самих стенок, т. е. продольный градиент давления $dp/dx$ отсутствует. При таком течении распределение параметров газа в различных сечениях по $X$ будут подобными, поверхности тока являются плоскостями $y = \text{const}$, и все параметры течения (продольная скорость $u$, температура $T$, плотность $\rho$) являются функциями только одной координаты $y$. Соответственно уравнение движения и уравнение притока тепла запишутся в виде

$$\mu \frac{du}{dy} = \tau_0 = \text{const} \tag{1}$$

$$\frac{d}{dy}\left(k\frac{dT}{dy}\right) + \frac{\mu}{J}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 0 \tag{2}$$




Фиг. 1

где $\mu$ — коэффициент вязкости, $k$ — коэффициент теплопроводности, $J$ — механический эквивалент тепла, $\tau_0$ — напряжение трения на стенке.

Подстановкой выражения для $dJ/dy$ из уравнения (1) в (2) получим следующее дифференциальное уравнение для определения профиля температуры

$$\frac{d}{dy}\left(k\frac{dT}{dy}\right) + \frac{\tau_0^2}{J\mu} = 0 \tag{3}$$

В уравнение (3) входят коэффициенты $k$ и $\mu$, которые зависят от температуры. Для газа эта зависимость определяется известными соотношениями

$$k = k_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{0.76}, \qquad \mu = \mu_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{0.76}$$

с учетом которых уравнение (3) перепишется в виде

$$T^\circ \frac{d^2T^\circ}{dy^{\circ 2}} + 0.76\left(\frac{dT^\circ}{dy^\circ}\right)^2 + \frac{2P}{T^{\circ 0.52}} = 0 \qquad \left(T^\circ = \frac{T}{T_0},\ y^\circ = \frac{y}{\frac{\mu_0}{\tau_0}\sqrt{2gJc_pT_0}}\right) \tag{4}$$

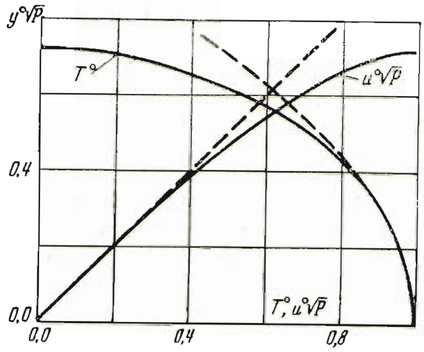
безразмерные значения температуры и расстояние до неподвижной стенки, $P = g\mu c_p / k$ — число Прандтля, которое для газа можно принять не зависящим от температуры.

Решение уравнения (4) при указанных выше начальных условиях на неподвижной стенке (при $y^\circ = 0$, $dT^\circ / dy^\circ = 0$, $T^\circ = 1.0$) запишется в виде

$$y^\circ \sqrt{P} = \int\limits_{1.0}^{T^\circ} \frac{dT^\circ}{2\sqrt{T^{\circ -1.52} - T^{\circ -0.52}}} \tag{5}$$

Интеграл в правой части уравнения (5) вычисляется графически или при помощи рядов. Результирующая кривая $T^\circ = F(y^\circ\sqrt{P})$ приведена на фиг. 2. Там же для сравнения пунктирной линией приведены результаты решения при постоянном значении коэффициентов теплопроводности и вязкости:

$$y^\circ \sqrt{P} = \sqrt{1 - T^\circ} \tag{5'}$$



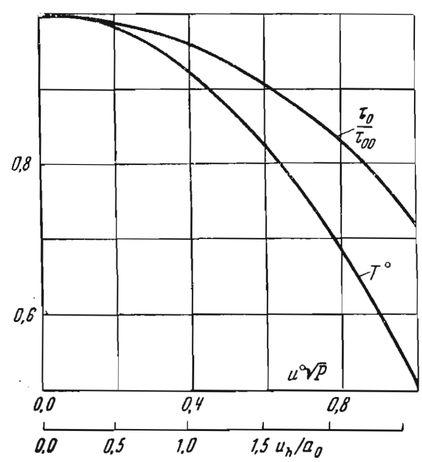

Фиг. 2

Найденное распределение температуры $T$ позволяет при помощи уравнения (1) определить профиль скорости:

$$u^\circ \sqrt{P} = \int\limits_0^{y^\circ\sqrt{P}} \left(\frac{1}{T^\circ}\right)^{0.76} dy^\circ\sqrt{P} \tag{6}$$

$$\left(u^\circ = \frac{u}{\sqrt{2gJc_p\tau_0}}\right)$$

где $u^\circ$ — безразмерное значение скорости.




Фи. 3

Кривая зависимости $u^\circ\sqrt{P} = \Phi(y^\circ\sqrt{P})$ приведена на фиг. 2, там же для сравнения пунктирной линией дана линейная зависимость $u' = y^\circ$, соответствующая постоянному значению коэффициента вязкости. Данные фиг. 2 характеризуют величину нелинейности профиля скорости в сжимаемом газе.

Приведенные на фиг. 2 зависимости

$$T^\circ = F(y^\circ\sqrt{P}), \qquad u^\circ\sqrt{P} = \Phi(y^\circ\sqrt{P})$$

являются универсальными для плоской задачи с одной теплоизолированной стенкой: они определяют как профиль скоростей и температур в вязком газе между двумя движущимися стенками, так и разность температур и скоростей самих стенок (при $y = h, u^\circ = u_h^\circ,\ T^\circ = T_h^\circ$). Отношение температур газа у стенок $T_h^\circ$ в зависимости от $u_h^\circ\sqrt{P}$ приведено на фиг. 3; при этом одно деление по оси ординат для $T^\circ$ равно 0.2. Аналогично по данным фиг. 2 и 3 можно получить решение и для случая, когда обе стенки теплопроводны при заданном потоке тепла через одну из стенок[1].

[1] Например, если теплопроводность обеих стенок одинакова, то профиль температуры будет симметричен с максимумом в центре течения между стенками. Данные фиг. 2 и 3 определяют при этом параметры потока от оси симметрии до одной из стенок.

Полученное решение позволяет определить влияние сжимаемости на величину напряжения трения на стенках $\tau_0$. При заданных значениях разности скоростей стенок $u_h$ и температуры газа у нетеплопроводной стенки $T_0$ отношение напряжения трения на стенках $\tau_0$ к напряжению трения в несжимаемом газе $\tau_{00}$ определяется уравнением

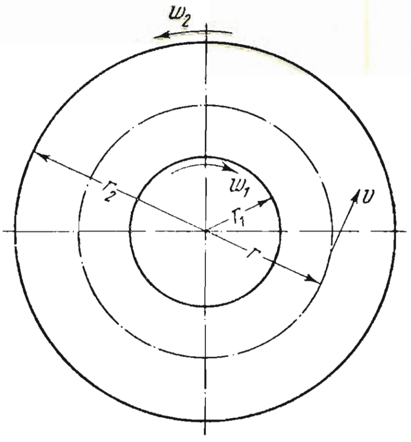
$$\frac{\tau_{00}}{\tau_0} = \frac{\Phi(h^\circ \sqrt{P})}{h^\circ \sqrt{P}}$$

Изменение $\tau_0 / \tau_{00}$ в зависимости от $u_h^\circ \sqrt{P}$ приведено на фиг. 3, где на оси ординат слева указана шкала для этих кривых, там же дана вторая шкала разметки скоростей по параметру $u_h / a_0$, где $a_0 = \sqrt{(\varkappa - 1) gJc_p T_0}$ — скорость звука в газе вблизи неподвижной стенки. Данные фиг. 3 определяют уменьшение напряжения трения ва стенках вследствие влияния сжимаемости.

Полученное точное решение задачи о течении вязкого сжимаемого газа между двумя движущимися параллельными плоскими стенками определяет все искомые параметры течения. Результирующие кривые фиг. 2 показывают, что при умеренном изменении температуры газа ($T^\circ \approx 0.7 - 0.8$) практически можно пользоваться постоянными значениями коэффициентов вязкости и теплопроводности (ср. сплошные и пунктирные кривые на фиг. 2), что может быть использовано для приближенного решения более сложных задач. В качестве примера рассмотрим стационарное течение вязкого газа между двумя соосными цилиндрами $r_1$ и $r_2$ (фиг. 4), вращающимися с постоянными угловыми скоростями $\omega_1$ и $\omega_2$. Такое стационарное движение должно происходить по концентрическим окружностям, параметры потока будут зависеть только от радиуса $r$. В цилиндрических координатах уравнения движения при постоянном значении коэффициента вязкости запишутся в виде

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{u^2}{r} \tag{8}$$




Фиг. 4.

Уравнения (7) и (8) совпадают с уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами [1], отличие заключается в переменной плотности $\rho$ в уравнении (8).

В уравнение (7), определяющее профиль скорости, плотность не входит, поэтому профиль скорости в газе (при $\mu = \text{const}$) определяется такой же формулой, как и в случае несжимаемого газа:

$$u = Ar + \frac{B}{r} = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\, r + \frac{1}{r}\, \frac{(\omega_1 - \omega_2)\, r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \tag{9}$$

Влияние сжимаемости проявится на распределении плотности, температуры и давления между вращающимися цилиндрами. Для определения профиля температуры $T$ обратимся к уравнению притока тепла, которое с учетом уравнения (9) при постоянных значениях $\mu$ и $k$ запишется в виде

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + 4\,\frac{P}{gJc_p}\,\frac{B^2}{r^3} = 0 \tag{10}$$

Как и выше, считаем один из цилиндров радиуса $r_1$ нетеплопроводным с температурой газа у поверхности $T_1$.

Тогда решение уравнения (10) запишется в виде

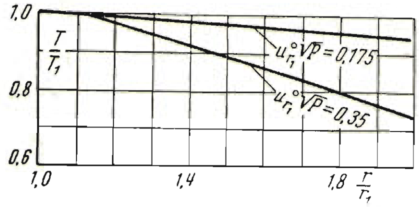
$$T^\circ = 1 - \frac{2Pu_{r1}^{\circ 2}}{(1 - r_1^2 / r_2^2)}\left(2\ln\frac{r}{r_1} + \frac{r_1^2}{r^2} - 1\right) \tag{11}$$

где

$$T^\circ = \frac{T}{T_1}, \qquad u_{r1}^\circ = \frac{(\omega_1 - \omega_2)\, r_1}{\sqrt{2gJc_pT_1}}$$

относительная окружная скорость первого цилиндра. Соотношение (11), не учитывающее изменение $\mu$ и $k$ с температурой, следует рассматривать как формулу первого приближения, практическое использование которой допустимо в диапазоне до $T^\circ \approx 0.7 \div 0.8$. При больших изменениях температуры следует точно решать задачу, как это сделано выше для плоского случая.

На фиг. 5 приведен пример расчета распределения температуры по формуле (10) при отношении радиусов $r_2 / r_1 = 2.0$. Сопоставление данных фиг. 3 и 5 показывает, что при одинаковых значениях $u^\circ \sqrt{P}$ в осесимметричном случае имеет место бо́льшая разность температур стенок, чем в плоском случае.




Фиг. 5

В целом приведенные результаты показывают, что при ламинарном течении вязкого газа между вращающимися цилиндрами и между движущимися плоскими стенками разность температур стенок зависит от произведения числа Прандтля на квадрат относительной скорости движения стенок. Возможно, что аналогичные зависимости будут иметь место и при турбулентном течении при соответствующих значениях числа Прандтля.

Поступила 27 IX 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е, Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, ГИТТЛ, 1948.
2. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.