

О ДВИЖЕНИИ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ, ЗАНИМАЮЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, ИЛИ ПЛОСКИЙ ОТКРЫТЫЙ КАНАЛ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

В предлагаемой работе рассматриваются в среднем стационарные и однородные в направлении дна потока турбулентные движения неоднородной, — т. е. содержащей взвешенные частицы, — жидкости в полупространстве или плоском открытом канале конечной глубины. Исследование ведется, исходя из общих соображений о движении мелких взвешенных частиц в турбулентном потоке при малых объемных и массовых концентрациях частиц, изложенных в работе [1]. В основе исследования лежат идеи А. Н. Колмогорова о балансе пульсационной энергии потока, опубликованные им применительно к однородной несжимаемой жидкости в 1942 г. [2] и получившие затем развитие и применение к различным задачам турбулентного движения однородной и термически неоднородной жидкости в работах его учеников А. М. Обухова [3] и А. С. Монина [4, 5].

Движение оказывается существенно зависящим от безразмерной комбинации

$$K = -\sigma g \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \left(\frac{d\bar{V}_1}{dx_3} \right)^{-2} \quad (0.1)$$

где $\sigma = (d_2 - d_1) / d_1$, d_2 — плотность частиц, d_1 — плотность жидкости, $\bar{\rho}$ — среднее значение объемной концентрации частиц в данной точке, \bar{V}_1 — среднее значение продольной компоненты скорости потока в данной точке, x_3 — координата, направленная по нормали к дну потока, g — ускорение силы тяжести. Число K аналогично известному числу Ричардсона, встречающемуся в различных задачах турбулентного движения термически неоднородной жидкости. Отметим, что некоторые схемы, использующие число Ричардсона, предлагались А. М. Обуховым [3] и А. С. Мониним [5]. При значениях K , малых сравнительно с единицей, движение может быть описано так называемой диффузионной теорией, основанной на предположении, что взвешенные частицы не влияют на динамику несущего потока. Излагаемая постановка задачи предназначена для изучения течений при K , сравнимых с единицей, причем следует подчеркнуть, что малость K не связана исключительно с малой гидравлической крупностью частиц; K может иметь порядок единицы, т. е. диффузионная теория может быть неприменимой и в потоках, несущих частицы с малой гидравлической крупностью, при условии достаточного насыщения потока частицами.

Характер движения оказывается также существенно зависящим от безразмерного параметра, уже давно появлявшегося в разнообразных вариантах диффузионных теорий:

$$\omega = \frac{a}{\kappa v_*}$$

где κ — так называемая константа Бармана, v_* — скорость трения, a — гидравлическая крупность частиц. При $\omega > 1$, т. е. при малых скоростях потока или крупных частицах, перенос частиц происходит в основном вблизи дна потока, в верхних областях потока влияние взвешенных частиц на динамику несущего потока мало; при $\omega < 1$ движение частиц происходит в основной массе потока; получается, что для данной скорости, глубины потока и шероховатости дна существует такое насыщение потока частицами данного размера и гидравлической круп-

ности, что стационарные движения неоднородной жидкости при большом насыщении потока частицами не могут существовать. Режим движения, отвечающий этому насыщению, назван режимом предельного насыщения. Далее теоретически получается «уменьшение константы Кармана», а также уменьшение пульсаций скорости в потоке, несущем взвешенные частицы, сравнительно с соответствующим потоком однородной жидкости. В частности, в пренебрежении диффузией турбулентных пульсаций получается формула

$$v = v_0 (1 - K)^{1/4}$$

где v — среднеквадратичная пульсация скорости в потоке, несущем взвешенные частицы, v_0 — эта же величина в соответствующем однородном потоке. Уменьшение пульсаций скорости и константы Кармана в потоке, несущем взвешенные частицы, были ранее экспериментально обнаружены в работах ряда авторов [6,7].

В последней части работы приводятся результаты обработки опытов В. Ванони [7] по движению неоднородной жидкости в открытом канале, качественно подтверждающие развиваемую теорию.

Эта работа выполнялась по предложению и под руководством А. Н. Колмогорова, которому автор приносит глубокую благодарность за советы и указания.

§ 1. Общие соображения. Полученные в работе^[1] общие уравнения плоских движений неоднородной жидкости, стационарных и однородных по горизонтали в среднем, имеют вид¹:

уравнение количества движения

$$\overline{V_1' V_3'} = -v_*^2 + Cx_3 \quad (1.1)$$

уравнение баланса массы

$$\overline{\rho' V_3'} = a\bar{\rho} \quad (1.2)$$

уравнение баланса пульсационной энергии

$$\varepsilon a \bar{\rho} g + \frac{Q}{d_1} + \overline{V_1' V_3'} \frac{d\overline{V_1}}{dx_3} + \frac{d}{dx_3} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{V_i'^2 V_3'} \right] = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $\overline{V_i}$ — i -я компонента осредненной скорости неоднородной жидкости, т. е. осредненной скорости центра тяжести бесконечно малого объема смеси, окружающего данную точку, a — гидравлическая крупность частиц, предполагаемых одинаковыми, Q — диссипация пульсационной энергии на единицу объема неоднородной жидкости, v_* — некоторая константа, имеющая размерность скорости и характеризующая движение, — так называемая динамическая скорость, или скорость трения, C — отношение перепада давления в горизонтальном направлении к плотности жидкости, x_i ($i = 1, 2, 3$) — прямоугольные координаты, причем координата x_3 направлена вертикально вверх, штрихом обозначаются пульсации соответствующей величины, чертой сверху — средние значения, понимаемые в смысле математических ожиданий.

Для движений, в среднем однородных в направлении, имеющем некоторый уклон i к горизонтали, выбирая ось x_1 по этому направлению,

¹ Положенные в основу работы [1] уравнения (1.1) и (1.2) этой работы представляют собой уравнения количества движения соответственно для жидкой и твердой фаз потока, осредненные по масштабам, большим сравнительно с размерами частиц и малым сравнительно с характерным масштабом турбулентности.

а ось x_3 направляя перпендикулярно ему вглубь потока, в сделанных предположениях о характере потока придем к тем же уравнениям (1.1)—(1.3) с той, однако, разницей, что константа C будет равняться сумме перепада давления в направлении x_1 , деленного на плотность несущей жидкости, и величины gi . Так будет, например, в случае наклонной трубы. В открытом канале перепад давления в направлении дна канала равен нулю, и константа C равняется в этом случае gi .

Приведем вывод уравнений (1.1) — (1.3) для потока, в среднем стационарного и однородного в направлении x_1 , имеющем некоторый малый уклон i к горизонтали.

Как показано в [1], основная система уравнений движения неоднородной жидкости в принятых предположениях о характере потока имеет вид:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial V_i}{\partial x_\alpha} = -(1 + \sigma\rho) g_i + \frac{1}{d_1} \frac{\partial T_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{d_1} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (I)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = a \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \quad (II)$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = -a\sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \quad (III)$$

где $T_{\alpha i}$ — компоненты тензора напряжений неоднородной жидкости [1].

Общий принцип, принятый в работе [1], состоит в том, что неоднородность жидкости учитывается в уравнении баланса массы, а в динамических уравнениях лишь, если член, зависящий от неоднородности жидкости, имеет множитель g .

Осредняя уравнение (III) и вспоминая, что осредненные характеристики движения могут зависеть только от x_3 , получаем

$$\frac{d\bar{V}_3}{dx_3} = -a\sigma \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \quad (IV)$$

Интегрируя (IV) и используя условие равенства нулю полного потока вещества в направлении x_3 , получаем

$$\bar{V}_3 = -a\sigma\bar{\rho} \quad (V)$$

Осредняя (II), получаем

$$\bar{V}_3 \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} + \frac{d\bar{\rho}\bar{V}_3'}{dx_3} - \bar{\rho}' \frac{d\bar{V}_3'}{dx_3} = a \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \quad (VI)$$

Первый член левой части (VI) имеет порядок $a\bar{\rho}^2$, третий — $a\rho'^2$, поэтому ими пренебрегаем. Интегрируя получающееся уравнение и пользуясь тем, что полный поток вещества в направлении x_3 равен нулю, получаем (1.2).

Осредняя (I), беря $i = 1, 3$ и пользуясь малостью уклона, имеем

$$\bar{V}_3 \frac{d\bar{V}_1}{dx_3} = -(1 + \sigma\bar{\rho}) g_1 + \frac{1}{d_1} \frac{d\bar{T}_{13}}{dx_3} - \frac{1}{d_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} - \frac{d}{dx_3} (\bar{V}_1' \bar{V}_3') + \bar{V}_1' \frac{\partial \bar{V}_\alpha'}{\partial x_\alpha} \quad (VII)$$

$$\bar{V}_3 \frac{d\bar{V}_3}{dx_3} = -(1 + \sigma\bar{\rho}) g + \frac{1}{d_1} \frac{d\bar{T}_{33}}{dx_3} - \frac{1}{d_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} - \frac{d}{dx_3} (\bar{V}_3'^2) + \bar{V}_3' \frac{\partial \bar{V}_\alpha'}{\partial x_\alpha} \quad (VIII)$$

Пренебрегая малыми слагаемыми, получаем из (VII) и (VIII)

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = -d_1(1 + \sigma \bar{\rho})g \quad (\text{IX})$$

$$\frac{d}{dx_3} (\bar{V}_1' \bar{V}_3') = -gi - \frac{1}{d_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \quad (\text{X})$$

Из (IX) следует, что $\partial \bar{p} / \partial x_1 = \text{const}$, поэтому, интегрируя (X), получаем¹ (1.1). Далее, с точностью до пренебрежимо малой величины порядка ρa^2 полная энергия E единицы объема равна:

$$E = \frac{d_1}{2} (1 + \sigma \rho) \sum_{i=1}^3 V_i^2 \approx \frac{d_1}{2} \sum_{i=1}^3 V_i^2$$

Имеем

$$\bar{E} = E^\circ + B, \quad E^\circ = \frac{d_1}{2} (\bar{V}_1^2 + \bar{V}_3^2), \quad B = \frac{d_1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \bar{V}_i'^2 + \sigma a \bar{\rho} \bar{V}_3 \right)$$

Слагаемые \bar{V}_3^2 и $\sigma a \bar{\rho} \bar{V}_3$ в выражениях для E° и B пренебрежимо малы и могут быть отброшены. Легко видеть, что, пренебрегая малым слагаемым $\bar{E}' (\partial \bar{V}_\alpha' / \partial x_\alpha)$, получаем соотношение

$$\bar{V}_3 \frac{d\bar{E}}{dx_3} = \frac{d\bar{E}}{dt} - \frac{d\bar{E}' \bar{V}_3'}{dx_3} \quad (\text{XI})$$

Умножая (I) на V_i , суммируя по i и осредняя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{E}}{dt} = \overline{d_1 V_\alpha \frac{dV_\alpha}{dt}} = & -d_1(1 + \sigma \bar{\rho}) g i \bar{V}_1 - d_1(1 + \sigma \bar{\rho}) g \bar{V}_3 - d_1 \sigma g i \bar{\rho}' \bar{V}_1' - \\ & - d_1 \sigma g \bar{\rho}' \bar{V}_3' + \overline{V_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}} - \bar{V}_3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} - \bar{V}_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} - \overline{V_\alpha' \frac{\partial p'}{\partial x_\alpha}} - d_1 \overline{V_\alpha' \frac{\partial V_\alpha'}{\partial t}} \quad (\text{XII}) \end{aligned}$$

Пренебрегая малыми слагаемыми, получаем

$$\bar{E}' \bar{V}_3' = \frac{d_1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{V}_i'^2 \bar{V}_3' + d_1 \bar{V}_1' \bar{V}_3' \bar{V}_1 \quad (\text{XIII})$$

Далее

$$\begin{aligned} \bar{V}_3 \frac{dE^\circ}{dx_3} = d_1 \bar{V}_1 \bar{V}_3 \frac{d\bar{V}_1}{dx_3} = & -(1 + \sigma \bar{\rho}) g i d_1 \bar{V}_1 + \\ & + \bar{V}_1 \frac{d\bar{T}_{13}}{dx_3} - \bar{V}_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} - d_1 \bar{V}_1 \frac{d}{dx_3} (\bar{V}_1' \bar{V}_3') + d_1 \bar{V}_1 \left(\bar{V}_1' \frac{\partial V_\alpha'}{\partial x_\alpha} \right) \quad (\text{XIV}) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение баланса энергии среднего движения записывается в виде

$$\begin{aligned} d_1 g i \bar{V}_1 + \bar{V}_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + d_1 \bar{V}_1 \frac{d}{dx_3} (\bar{v}_1' \bar{v}_3') + \\ + \left\{ \bar{V}_3 \frac{dE^\circ}{dx_3} - \bar{V}_1 \frac{d\bar{T}_{13}}{dx_3} - d_1 \bar{V}_1 \left(\bar{V}_1' \frac{\partial V_\alpha'}{\partial x_\alpha} \right) + d_1 g i \sigma \bar{\rho}' \bar{V}_1 \right\} = 0 \end{aligned}$$

причем слагаемое в фигурных скобках мало и может быть отброшено.

¹ Отметим, что в работе [1] в нумерованном равенстве на стр. 268 перед (1.29) имеется опечатка. Это равенство следует читать так:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = -d_1 C, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = 0$$

Ни на каких последующих формулах эта опечатка не сказывается.

Из последних соотношений получаем

$$d_1 \sigma g \overline{\rho' V_3'} + T'_{\alpha\beta} \frac{\partial V'_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{d_1}{2} \frac{d}{dx_3} \left(\sum_{i=1}^3 \overline{V_i'^2 V_3'} \right) + \\ + d_1 \overline{V_1' V_3'} \frac{d \overline{V_1}}{dx_3} - \left\{ \frac{\partial T'_{\alpha\beta} V'_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - d_1 \sigma g i \overline{\rho' V_1'} - \right. \\ \left. - d_1 \overline{V_1} \left(V_1' \frac{\partial V'_{\alpha'}}{\partial x_{\alpha}} \right) - \overline{V_{\alpha'}} \frac{\partial p'}{\partial x_{\alpha}} - \frac{d_1}{2} \overline{V_3} \frac{d}{dx_3} \left(\sum_{i=1}^3 \overline{V_i'^2} \right) - d_1 V_{\alpha'} \frac{\partial V'_{\alpha'}}{\partial t} \right\} = 0 \quad (\text{XV})$$

Подставляя $\overline{\rho' V_3'}$ из (1.2), обозначая

$$Q = T'_{\alpha\beta} \frac{\partial V'_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}$$

и отбрасывая малое [1] слагаемое в фигурных скобках, получаем (1.3).

Приведем также уравнение баланса осредненной полной энергии потока:

$$d_1 g i \overline{V_1} + d_1 \sigma a g \overline{\rho} + \frac{d_1}{2} \frac{d}{dx_3} \left(\sum_{i=1}^3 \overline{V_i'^2 V_3'} \right) + d_1 \frac{d}{dx_3} (\overline{V_1' V_3' V_1}) + \\ + \overline{V_1} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} + Q - \left\{ \frac{\partial T'_{\alpha\beta} V'_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \sigma g i d_1 \overline{\rho' V_1'} - \sigma g i d_1 \overline{\rho} \overline{V_1} - \right. \\ \left. - \overline{V_{\alpha'}} \frac{\partial p'}{\partial x_{\alpha}} - \overline{V_3} \frac{dE}{dx_3} - d_1 V_{\alpha'} \frac{\partial V'_{\alpha'}}{\partial t} \right\} = 0 \quad (\text{XVI})$$

причем слагаемое в фигурных скобках мало и может быть отброшено.

Отметим, что член Q — диссипация пульсационной энергии — в последнем уравнении является существенным и отброшен быть не может.

Определим коэффициенты перемешивания — величины ν_1 , ν_2 , λ — следующим образом:

$$\nu_1 = \frac{-\overline{V_1' V_3'}}{d \overline{V_1} / dx_3}, \quad \nu_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{V_i'^2 V_3'} \left(\frac{db}{dx_3} \right)^{-1}, \quad \lambda = \frac{-\overline{(\rho' V_3')}}{d \overline{\rho} / dx_3} \quad (1.4)$$

где b — пульсационная энергия единицы массы неоднородной жидкости, причем в сделанных предположениях о характере потока можно считать

$$b = \frac{1}{2} (\overline{V_1'^2} + \overline{V_2'^2} + \overline{V_3'^2}) \quad (1.5)$$

остальные слагаемые в выражении для b пренебрежимо малы. Подставляя (1.4) в систему (1.1)—(1.3), приведем эту систему к виду

$$\nu_1 \frac{d \overline{V_1}}{dx_3} = \nu_*^2 - C x_3 \quad (1.6)$$

$$a \overline{\rho} + \lambda \frac{d \overline{\rho}}{dx_3} = 0 \quad (1.7)$$

$$\sigma a g \overline{\rho} + \frac{Q}{d_1} - \frac{d}{dx_3} \left[\nu_2 \frac{db}{dx_3} \right] - \nu_1 \left(\frac{d \overline{V_1}}{dx_3} \right)^2 = 0 \quad (1.8)$$

Примем основную гипотезу А. Н. Колмогорова, что характеристики ν_1 , ν_2 и λ , а также диссипация пульсационной энергии на единицу массы Q/d_1 зависят только от b и некоторой величины l , имеющей размерность длины — «пути смешения».

Эта гипотеза выполнялась бы точно, если бы поле пульсаций скорости было изотропным. В реальных потоках она выполняется приближенно. Однако хорошее совпадение с опытом теорий, основанных на этой гипотезе в различных областях приложения турбулентности, дает основание для использования этой гипотезы и в рассматриваемой задаче. Приняв гипотезу А. Н. Колмогорова, получим при помощи анализа размерностей

$$v_1 = ql\sqrt{b}, \quad v_2 = q_1 l\sqrt{b}, \quad \lambda = q_2 l\sqrt{b}, \quad Q = cd_1 \frac{b^{3/2}}{l} \quad (1.9)$$

где q, q_1, q_2, c — универсальные константы. Пользуясь тем, что l определено с точностью до постоянного множителя, выберем l так, чтобы q равнялось единице. Подставляя (1.9) в систему (1.6)–(1.8), приводим основную систему уравнений задачи к виду

$$l\sqrt{b} \frac{d\bar{v}_1}{dx_3} = v_*^2 - Cx_3 \quad (1.10)$$

$$a\bar{\rho} + q_2 l\sqrt{b} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} = 0 \quad (1.11)$$

$$\sigma a g \bar{\rho} + c \frac{b^{3/2}}{l} - q_1 \frac{d}{dx_3} \left(l\sqrt{b} \frac{db}{dx_3} \right) - l\sqrt{b} \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_3} \right)^2 = 0 \quad (1.12)$$

Эта система является замкнутой, если известна l как функция координат, или известна связь l с определяемыми величинами. Для ряда задач^[1] в уравнении баланса пульсационной энергии можно пренебречь слагаемым, выражающим приток пульсационной энергии благодаря диффузии пульсаций, тогда уравнение (1.12) запишется в виде

$$\sigma a g \bar{\rho} + c \frac{b^{3/2}}{l} - l\sqrt{b} \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_3} \right)^2 = 0 \quad (1.13)$$

Исключая при помощи (1.11) из (1.13) $\bar{\rho}$ и обозначая $c = \gamma^4$, приводим последнее уравнение к форме

$$b^2 = \frac{(v_*^2 - Cx_3)^2}{\gamma^4} [1 - q_2 K] \quad (1.14)$$

где K — безразмерное число — определено согласно (0.1).

Основная система уравнений задачи учитывает, таким образом, воздействие частиц на динамику потока посредством учета работы взвешивания частиц потоком в уравнении баланса пульсационной энергии.

Однако рассмотрение этого уравнения показывает, что если член $\sigma a g \bar{\rho}$, выражающий упомянутую работу взвешивания, мал сравнительно с другими членами уравнения баланса пульсационной энергии, то становится применимой диффузионная теория явления, т. е. теория, игнорирующая обратное влияние взвешенных частиц на динамику потока. Входящее в уравнение (1.14) безразмерное число K аналогично известному числу Ричардсона, появляющемуся при рассмотрении турбулентных течений термически неоднородной жидкости, и равно отношению работы, затрачиваемой потоком на подъем частиц, к притоку пульсационной энергии из энергии среднего движения потока. Легко видеть, что условием применимости диффузионной концепции является $K \ll 1$.

Обработка опытов В. Ванони показывает, что можно считать, по-видимому, $q_2 = 1$. Тогда уравнение (1.14) может быть переписано в виде $v = v_0(1 - K)^{1/4}$, где $v = \sqrt{2b/3}$ — среднеквадратичная скорость пульсационного движения в потоке неоднородной жидкости, а v_0 — та же величина в соответствующем потоке однородной жидкости. Таким образом, в потоке, содержащем взвешенные частицы, пульсации скорости уменьшаются сравнительно с соответствующим потоком однородной жидкости, притом тем сильнее, чем больше число K . Уменьшение пульсаций скорости в потоке, несущем взвешенные частицы, было экспериментально установлено в работах ряда авторов. Значительный материал по этому вопросу можно найти в работе Н. А. Фукса [6].

§ 2. Движение неоднородной жидкости в полупространстве. 1°. Рассмотрим движение неоднородной жидкости в полупространстве, ограниченном снизу горизонтальной плоскостью $x_3 = 0$, при отсутствии перепада давления.

Это движение является наиболее простым с точки зрения теоретического рассмотрения, однако дает возможность ясно представить характерные особенности движения неоднородной жидкости. Вместе с тем оно интересно и непосредственно, поскольку это движение близко к движению жидкости в канале вдали от свободной поверхности и в трубе вдали от ее оси.

Перепад давления и гидравлический уклон в рассматриваемом случае равны нулю, поэтому константа C обращается в нуль и система основных уравнений задачи принимает вид:

$$l\sqrt{b} \frac{d\bar{V}_1}{dx_3} = v_*^2 \quad (2.1)$$

$$a\bar{\rho} + q_2 l\sqrt{b} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} = 0 \quad (2.2)$$

$$b^2 = \frac{v_*^4}{\gamma^4} \left[1 + \sigma g q_2 \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \left(\frac{d\bar{V}_1}{dx_3} \right)^{-2} \right] = \frac{v_*^4}{\gamma^4} (1 - q_2 K) \quad (2.3)$$

Перейдем в этих уравнениях к безразмерным переменным

$$x_3 = \frac{2v_*^2}{q_2 \kappa^2 \sigma g} y, \quad \bar{V}_1 = \frac{v_*}{\kappa} U, \quad l = \frac{2v_*^2}{q_2 \kappa^2 \sigma g} L, \quad b = \frac{v_*^2}{\gamma^2} B \quad (2.4)$$

где κ — константа Кармана, γ — ранее введенная универсальная константа. В безразмерных переменных (2.4) уравнения (2.1)–(2.3) принимают следующий вид:

$$L\sqrt{B} \frac{dU}{dy} = 1 \quad (2.5)$$

$$\omega\bar{\rho} + L\sqrt{B} \frac{d\bar{\rho}}{dy} = 0 \quad (2.6)$$

$$B^2 = \left(1 + 2 \frac{d\bar{\rho}}{dy} \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-2} \right) \quad (2.7)$$

$$K = -\frac{1}{q_2} 2 \frac{d\bar{\rho}}{dy} \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-2} \quad \left(\omega = \frac{a}{q_2 \kappa v_*} \right) \quad (2.8)$$

Безразмерный параметр ω , как будет показано ниже, является важной характеристикой движения неоднородной жидкости. Подставляя (2.5) в (2.6) и интегрируя получающееся уравнение, получаем вне зависимости от предположений относительно l

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 e^{-\omega U} \quad (2.9)$$

где $\bar{\rho}_0$ — значение объемов концентрации взвешенных частиц на некоторой условной высоте, на которой U обращается в нуль. Отметим, что это соотношение не связано также с гипотезой А. Н. Колмогорова, оно справедливо в одном предположении постоянства отношения коэффициентов ν_1 и λ .

2°. Пусть сперва движение таково, что $K \ll 1$ во всей области движения, т. е. частицы несущественно влияют на динамику потока, и мы находимся в области применимости диффузионной концепции явления. Считая, что l определяется только величинами x_3 и $d\bar{V}_1/dx_3$ (т. е. исключая из рассмотрения столь малую окрестность дна, что в ней существенно сказывается вязкость), и пренебрегая зависимостью l от содержания взвешенных частиц в потоке, получаем, что, как и в однородной жидкости:

$$l = \kappa \gamma x_3, \quad L = y \quad (2.10)$$

Пренебрегая вторым слагаемым в правой части (2.7) и интегрируя получающуюся систему уравнений, имеем

$$B \equiv 1, \quad U = \ln y + \text{const}, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_1 \left(\frac{y}{y_1} \right)^{-\omega} \quad (2.11)$$

Здесь $\bar{\rho}_1$ — объемная концентрация взвеси на высоте y_1 , величина, различная для разных движений. Решение этой задачи в таком виде имеется в книге Л. Прандтля [8].

3°. Рассмотрим теперь течения такие, что K для них имеет порядок единицы. Предположим сперва, что l определяется величинами

$$x_3, \quad \frac{d\bar{V}_1}{dx_3}, \quad \sigma g \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \quad (2.12)$$

где последняя величина представляет собой градиент массы взвеси, переносимой потоком. Анализ размерностей дает для этого случая

$$l = \kappa \gamma x_3 (\Phi q_2 K), \quad L = y \Phi \left[-2 \frac{d\bar{\rho}}{dy} \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-2} \right] \quad (2.13)$$

где Φ — некоторая функция, котсрая должна быть определена экспериментально или из дополнительных теоретических соображений. Аналогичные предположения при анализе термически неоднородных потоков высказывались А. М. Обуховым и А. С. Моиним. Мы не будем делать о функции Φ никаких дополнительных предположений, за исключением того, что Φ не возрастает при возрастании аргумента, поскольку путь смещения l должен уменьшаться от наличия взвеси в потоке.

Так как значение $\rho \equiv 0$ должно соответствовать однородной жидкости, то ясно, что $\Phi(0) = 1$.

Подставляя (2.9) в выражение для K , имеем вне зависимости от предположений относительно l , что

$$q_2 K = 2\omega^2 \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \right]^{-1} \quad (2.14)$$

Подставляя далее (2.7) и (2.13) в (2.6) и используя (2.14), приходим к уравнению первого порядка относительно функции $\bar{\rho}(y)$:

$$\omega \bar{\rho} + y \Phi \left(\frac{2\omega^2}{\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right)} \right) \left(1 - \frac{2\omega^2}{\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right)} \right)^{1/4} \frac{d\bar{\rho}}{dy} = 0 \quad (2.15)$$

Разделяя обе части последнего уравнения на $2\omega^2 \bar{\rho}^2$ и полагая $R = 1/\bar{\rho}$, приведем это уравнение к виду:

$$\frac{R}{2\omega} - y \Phi \left(\frac{2\omega^2}{dR/dy} \right) \left(1 - \frac{2\omega^2}{dR/dy} \right)^{1/4} \frac{dR}{dy} \frac{1}{2\omega^2} = 0 \quad (2.16)$$

Пусть $u(w)$ — функция, обратная к функции

$$w = \Phi \left(\frac{1}{u} \right) \left(1 - \frac{1}{u} \right)^{1/4} u \quad (2.17)$$

Тогда уравнение (2.16) можно записать в виде

$$\frac{dR}{dy} = 2\omega^2 u \left(\frac{1}{2\omega} \frac{R}{y} \right) \quad (2.18)$$

и мы получаем, интегрируя

$$\xi - \xi_0 = \ln \frac{y}{y_0} = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\omega u(P) - P}, \quad P = \frac{R}{2\omega y}, \quad P_0 = \frac{R_0}{2\omega y_0} \quad (2.19)$$

Зная, таким образом, R , найдем U по формуле

$$U = \frac{1}{\omega} \ln R + \frac{1}{\omega} \ln \bar{\rho}_0 \quad (2.20)$$

получающейся логарифмированием (2.9), и B по формуле

$$B = \left(1 - \frac{2\omega^2}{dR/dy} \right)^{1/2} \quad (2.21)$$

Решения задачи, в частности вид интегральных кривых уравнения (2.19), существенно различны для случаев $\omega > 1$ и $\omega < 1$.

В случае $\omega < 1$ уравнение

$$\omega u(P) - P = 0 \quad (2.22)$$

имеет один единственный корень; обозначим его P^* . Легко видеть, что $u^* = u(P^*)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega = \Phi \left(\frac{1}{u^*} \right) \left(1 - \frac{1}{u^*} \right)^{1/4} \quad (2.23)$$

Интегральные кривые уравнения (2.19) разбиваются на два класса, внутри каждого из которых кривые конгруэнтны. Эти два класса разделяются интегральной кривой — прямой $P = P^*$ (фиг. 1). Кривые клас-

са II подходят к оси ξ под некоторым углом и асимптотически приближаются к прямой $P = P^*$. Кривые класса I также асимптотически приближаются к прямой $P = P^*$; при $\xi \rightarrow -\infty$ функция P стремится к бесконечности по закону $P = ce^{-\xi(1-\omega)}$, где c — некоторая константа.

Переходя к плоскости ρy , получаем, что интегральные кривые основного уравнения (2.15), т. е. возможные кривые распределения объемной концентрации взвешенных частиц по высоте, располагаются следующим образом (фиг. 2). Кривые класса I при $y \rightarrow 0$ ведут себя следующим образом: $\rho = \rho_* y^{-\omega} + o(y^{-\omega})$, где ρ_* — константа, различная для различных

кривых. Кривые класса II имеют асимптоты — прямые вида $y = \text{const}$. Разделяющей эти два класса интегральной кривой является гиперболы

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2\omega P^* y} \quad (2.24)$$

Можно показать, что при $y \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2\omega P^* y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \quad (2.25)$$

справедливое для интегральных кривых обоих классов. Зная $\bar{\rho}(y)$, мы можем, как

указано выше, определить B и U . Можно показать, что при $y \rightarrow \infty$ получаются следующие асимптотические представления этих характеристик движения:

$$U(y) = \frac{1}{\omega} \ln y + o(\ln y) \quad (2.26)$$

$$B = \left(1 - \frac{\omega}{P^*}\right)^{1/2} + o(1) \quad (2.27)$$

Далее, число K при $y \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине, равной

$$K_0 = \frac{\omega}{P^*} \quad (2.28)$$

Разделяющая интегральная кривая $P = P^*$ уравнения (2.19) отвечает авто-

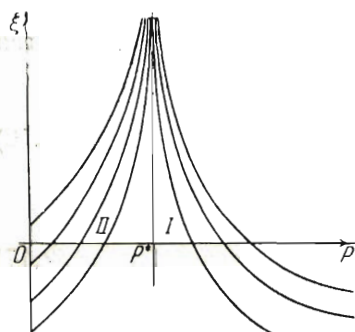
модельному движению со следующим распределением характеристик движения по высоте:

$$U = \frac{1}{\omega} \ln y + \text{const} \quad (2.29)$$

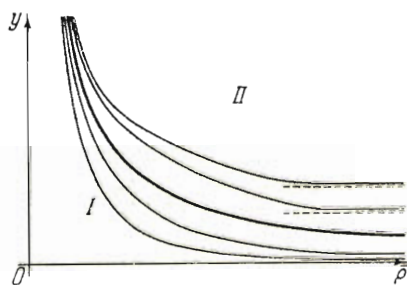
$$\bar{\rho} = \frac{1}{2\omega P^* y} \quad (2.30)$$

$$B = \left(1 - \frac{\omega}{P^*}\right)^{1/2} \quad (2.31)$$

Если распределение объемной концентрации взвешенных частиц по высоте представляется некоторой кривой класса I, то вблизи дна число K близко к нулю; с ростом y оно возрастает до значения $K_0 = \omega/P^*$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Вне зависимости от условий в придонной области на большой высоте течение асимптотически приближается к автомодельному течению, для которого распределение характеристик движения по высоте дано формулами (2.29) — (2.31). Безразмерная пульсационная энергия B убывает для этих движений от единицы при $y = 0$ до $(1 - \omega/P^*)^{1/2}$ при $y = \infty$.

Функция L вблизи дна представляется формулой $L = y$, при $y \rightarrow \infty$ представляется формулой

$$L = \Phi\left(\frac{\omega}{P^*}\right)y = \frac{\omega}{(1 - \omega/P^*)^{1/2}}y$$

Если распределение взвешенных частиц по высоте представляется некоторой кривой класса II, то решение дает, что на некоторой высоте $y = y_1$, отличной от нуля, объемная концентрация взвешенных частиц становится бесконечно большой, а пульсационная энергия на этой высоте обращается в нуль.

Число K для этих решений убывает вверх по высоте потока от $K = 1$ при $y = y_1$ до ω/P^* при $y = \infty$. При $y < y_1$ решения не существует.

Если же $\omega > 1$, то уравнение (2.22) не имеет корней и поле интегральных кривых уравнения (2.19) состоит (фиг.3) из конгруэнтных кривых, подходящих под некоторым углом к оси ξ и уходящих в бесконечность по закону $P = Ce^{\xi(\omega-1)}$, где C — некоторая константа.

Переходя к плоскости $\bar{\rho}y$, получаем (фиг. 4), что все интегральные кривые, т. е. возможные кривые распределения объемной концентрации взвешенных частиц по высоте, в этом случае имеют асимптоты вида $y = \text{const}$. Рассматривая движение, отвечающее некоторой кривой такого вида с асимптотой $y = y_1$, получим, что при $y = y_1$ пульсационная энергия обращается в нуль; число K убывает от единицы до нуля

при возрастании y от y_1 до бесконечности. При $y < y_1$ рассматриваемого решения не существует. При $y \rightarrow \infty$ имеем следующие асимптотические представления характеристик движения:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_* y^{-\omega} + o(y^{-\omega}) \quad (2.32)$$

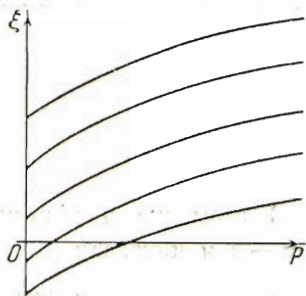
$$B = 1 + o(1) \quad (2.33)$$

$$U = \ln y + o(\ln y) \quad (2.34)$$

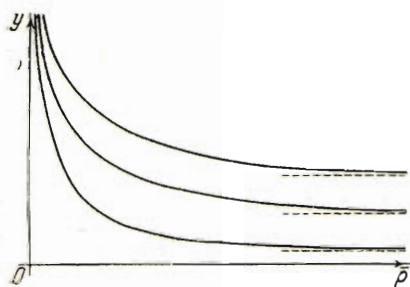
Таким образом, при $y \rightarrow \infty$ концентрация взвешенных частиц стремится к нулю быстрее в случае $\omega > 1$, чем в случае $\omega < 1$, и распределение взвешенных частиц по высоте потока должно существенно зависеть от придонных условий.

Поскольку $K \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, выполняется условие применимости диффузионной концепции в высоких областях потока.

Поскольку $K \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, выполняется условие применимости диффузионной концепции в высоких областях потока.



Фиг. 3



Фиг. 4

4°. Если число K мало во всем потоке (так будет при значениях ω , близких к единице), то можно провести линеаризацию основных соотношений. Принимая при малых K

$$\Phi(q_2 K)(1 - q_2 K)^{1/4} = 1 - \alpha q_2 K \quad (2.35)$$

где $\alpha = \Phi'(0) - \frac{1}{4}$, запишем уравнение (2.23) в виде

$$\omega = 1 - \frac{\alpha}{u^*} \quad (2.36)$$

Отсюда

$$u^* = \frac{\alpha}{1 - \omega}, \quad P^* = \frac{\alpha\omega}{1 - \omega} \quad (2.37)$$

В этом же приближении соотношение (2.17) запишется в виде $w = u - \alpha$ и интеграл (2.19) примет вид:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\omega} = \frac{\alpha\omega - (1-\omega)P_0}{\alpha\omega - (1-\omega)P} \quad \text{для } \omega < 1 \quad (2.38)$$

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\omega-1} = \frac{\alpha\omega + (\omega-1)P}{\alpha\omega + (\omega-1)P_0} \quad \text{для } \omega > 1 \quad (2.39)$$

Переходя от P к $\bar{\rho}$, получаем выражения для объемной концентрации $\bar{\rho}$ при $\omega < 1$:

$$\bar{\rho} = \left\{ \frac{2\alpha\omega^2}{1-\omega} y \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\omega} \right] + \frac{1}{\bar{\rho}_0} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\omega} \right\}^{-1} \quad (2.40)$$

где $\bar{\rho}_0$ — значение $\bar{\rho}$ при $y = y_0$, и при $\omega > 1$

$$\bar{\rho} = \left\{ \left[\frac{1}{\bar{\rho}_0} + \frac{2\alpha\omega^2}{\omega-1} y_0 \right] \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\omega} - \frac{2\alpha\omega^2}{\omega-1} y \right\}^{-1} \quad (2.41)$$

Отсюда легко получаются все остальные характеристики движения для линеаризованной постановки задачи. В частности, для распределения продольной скорости по высоте потока получаем формулы

$$U = \frac{1}{\omega} \ln \left\{ \frac{2\alpha\omega^2}{1-\omega} y \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\omega} \right] + \frac{1}{\bar{\rho}_0} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\omega} \right\} + \frac{1}{\omega} \ln \bar{\rho}_0 \quad (\omega < 1)$$

$$U = \frac{1}{\omega} \ln \left\{ \left[\frac{1}{\bar{\rho}_0} + \frac{2\alpha\omega^2}{\omega-1} y_0 \right] \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\omega} - \frac{2\alpha\omega^2}{\omega-1} y \right\} + \frac{1}{\omega} \ln \bar{\rho}_0 \quad (\omega > 1)$$

§ 3. Движение неоднородной жидкости в полупространстве (продолжение). 1°. Рассмотрим другой вариант определения пути смещения в случае полупространства. Именно, обобщая известные предположения Кармана о подобии, сформулированные им для однородной жидкости, предположим, что l зависит от величин

$$\frac{d\bar{V}_1}{dx_3}, \quad \frac{d^2\bar{V}_1}{dx_3^2}, \quad \sigma g q_2 \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \quad (3.1)$$

Напомним, что для однородной жидкости Карман^[9] предположил, что путь смещения определяется первой и второй производными от продольной скорости по высоте потока.

Принимая, что l определяется величинами (3.1), получаем при помощи анализа размерностей

$$l = -\kappa\gamma \frac{d\bar{V}_1}{dx_3} \left(\frac{d^2\bar{V}_1}{dx_3^2}\right)^{-1} \Psi(q_2 K), \quad L = -\frac{dU}{dy} \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^{-1} \Psi(q_2 K) \quad (3.2)$$

где Ψ — некоторая универсальная функция, которую следует определять из опыта или из дополнительных теоретических соображений. Дальнейшее исследование, как и в предыдущем параграфе, не будет опираться ни на какие предположения о конкретном виде функции Ψ ; поскольку путь смешения необходимо должен уменьшаться с увеличением количества взвеси в потоке, Ψ должна уменьшаться с возрастанием своего аргумента.

Подставляя (3.2) и (2.7) в (2.5) и используя (2.9), получаем

$$-\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^{-1} \Psi(q_2 K) (1 - q_2 K)^{1/4} = 1 \quad (3.3)$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\left[\omega \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \frac{d^2U}{dy^2}\right] \omega e^{2\omega U} = \left[1 + \frac{1}{\omega} \frac{d^2U}{dy^2} \left(\frac{dU}{dy}\right)^{-2}\right] \omega^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 e^{2\omega U} = \\ = \left[1 - \frac{1}{\omega} \Psi(q_2 K) (1 - q_2 K)^{1/4}\right] \omega^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 e^{2\omega U}$$

Используя соотношения

$$\omega \left[\omega \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \frac{d^2U}{dy^2}\right] e^{2\omega U} = e^{\omega U} \frac{d^2}{dy^2} e^{\omega U}, \quad q_2 K = 2 \omega^2 \left(\frac{dR}{dy}\right)^{-1}, \quad R = \frac{1}{\rho}$$

запишем уравнение (2.3) в виде

$$R \frac{d^2 R}{dy^2} = \frac{1}{\omega} \left[\omega - \Psi \left(2 \omega^2 \left(\frac{dR}{dy}\right)^{-1}\right) \left(1 - 2 \omega^2 \left(\frac{dR}{dy}\right)^{-1}\right)^{1/4}\right] \left(\frac{dR}{dy}\right)^2 \quad (3.4)$$

Полагая $p = dR/dy$ и принимая R за независимое переменное, приводим уравнение (3.4) к виду

$$\frac{dp}{dR} = \frac{1}{\omega} \frac{p}{R} \tau(\omega, p) \quad (3.5)$$

где положено

$$\tau(\omega, p) = \omega - \Psi(2 \omega^2 p^{-1}) (1 - 2 \omega^2 p^{-1})^{1/4}$$

Уравнение (3.5) интегрируется в квадратурах. Имеем

$$\ln R = \omega \int \frac{dp}{p\tau(\omega, p)} \quad (3.6)$$

Но $\ln R = \omega U - \ln \bar{\rho}_0$, откуда

$$U = \int \frac{dp}{p\tau(\omega, p)} \quad (3.7)$$

$$\bar{\rho} = \exp\left[-\omega \int \frac{dp}{p\tau(\omega, p)}\right] \quad (3.8)$$

$$y = \int \frac{dR}{p} = \omega \int \frac{1}{p^2\tau(\omega, p)} \exp\left[\omega \int \frac{dp}{p\tau(\omega, p)}\right] dp \quad (3.8)$$

Константы интегрирования будут определены ниже. Как и в предположении предыдущего параграфа, полученные решения имеют существенно различный характер при $\omega < 1$ и $\omega > 1$. Пусть сперва $\omega < 1$. Уравнение

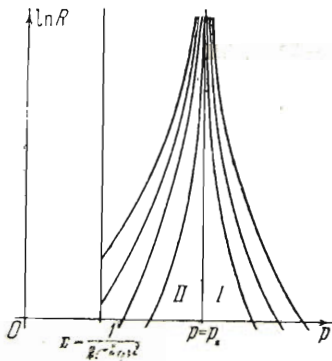
$$\tau(\omega, p_*) \equiv \omega - \Psi(2\omega^2 p_*^{-1})(1 - 2\omega^2 p_*^{-1})^{1/2} = 0 \quad (3.10)$$

при $\omega < 1$ единственным образом определяет p_* в функции ω , $p_*^{-1} = F(\omega)$. Заметим, что решения (3.7) — (3.9) имеют смысл только при $p \geq 2\omega^2$, в противном случае они становятся комплексными.

При $\omega < 1$ поле интегральных кривых уравнения (3.5) распадается на два класса (фиг. 5). Разделяющей эти два класса интегральной кривой является кривая $p = p_*$. При $p \rightarrow p_*$ имеем

$$y \rightarrow \infty, \quad \bar{\rho}_0 p_* = \omega \frac{dU}{dy} e^{\omega U} + o(1), \quad e^{\omega U} = \bar{\rho}_0 p_* y + o(y) \quad (3.11)$$

Отсюда легко получаем асимптотические представления характеристик движения при $y \rightarrow \infty$:



Фиг. 5

$$U = \frac{1}{\omega} \ln y + o(\ln y) \quad (3.12)$$

$$\bar{\rho} = \frac{F(\omega)}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right), \quad F(\omega) = \frac{1}{p_*} \quad (3.13)$$

$$B = [1 - 2\omega^2 F(\omega)]^{1/2} + o(1) \quad (3.14)$$

Эти асимптотические представления, как и в предыдущем варианте предположения относительно пути смещения, справедливы для движений, отвечающих интегральным кривым обоих классов.

Таким образом, независимо от придонных условий на большой высоте устанавливается некоторый предельный автомодельный режим.

Рассмотрим движение, отвечающее некоторой кривой класса I. Из всех возможных решений, отвечающих этой кривой, следует выбрать такое, которое удовлетворяет условию равенства нулю пути смещения на дне потока, т. е. условию $L(0) = 0$. Но имеем

$$L = \frac{\omega}{p} \left(1 - \frac{2\omega^2}{p}\right)^{-1/2} \exp\left[\omega \int \frac{dp}{p\tau(\omega, p)}\right] \quad (3.15)$$

Отсюда следует, что искомое решение отвечает условию $p = \infty$ при $y = 0$. Это даст возможность определить константы интегрирования в квадратурах (3.7) — (3.9); имеем

$$U = \int_{p_0}^p \frac{dp}{p\tau(\omega, p)}, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \exp\left(-\omega \int_{p_0}^p \frac{dp}{p\tau(\omega, p)}\right)$$

$$y = \frac{1}{\bar{\rho}_0} \int_{\infty}^p \frac{1}{p^2\tau(\omega, p)} \omega \exp\left[\omega \int_{p_0}^p \frac{dp}{p\tau(\omega, p)}\right] dp$$

Здесь p_0 — значение p , соответствующее некоторой условной высоте, на которой $U = 0$. Считая, что $U = 0$ при $y = y_0$, получаем для определения p_0 уравнение $y(p_0) = y_0$. Вблизи $y = 0$ получаем

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_* y^{-\omega} + o(y^{-\omega}), \quad \bar{\rho}_* = \text{const}, \quad U = \ln y + o(\ln y)$$

вполне аналогично соответствующему случаю предыдущего параграфа. Разделяющая кривая $p = p_*$ отвечает автомодельному движению, являющемуся предельным для движений, отвечающих кривым класса I при условии $L(0) = 0$:

$$U = \frac{1}{\omega} \ln y + \text{const} \quad (3.16)$$

$$\bar{\rho} = \frac{F(\omega)}{y} \quad (3.17)$$

$$B = \left[1 - 2\omega^2 F(\omega) \right]^{1/2} \quad (3.18)$$

Это предельное решение также удовлетворяет условию $L(0) = 0$. Вдоль кривых класса II величина p возрастает от $p = 2\omega^2$ до $p = p_*$, причем dy/dp положительно, $p = p_*$ отвечает $y = \infty$. На этих кривых L не обращается в нуль ни в одной точке, $L = \infty$ при $p = 2\omega^2$, при возрастании p функция L сперва убывает, достигает при $p = p_{**} = F_1(\omega)$ некоторого минимума, отличного от нуля, после чего снова начинает возрастать и возрастает до бесконечности при $p = p_*$.

Таким образом, для кривых класса II нельзя установить соответствия между y и p так, чтобы $L(0) = 0$.

При $p = 2\omega^2$ пульсационная энергия обращается в нуль; в отличие от соответствующих кривых предыдущего параграфа при пульсационной энергии, равной нулю, объемная концентрация $\bar{\rho}$ сохраняет конечное значение.

В случае $\omega > 1$ выражение

$$r(\omega, p_*) = \omega - \Psi(2\omega^2 p_*^{-1})(1 - 2\omega^2 p_*^{-1})^{1/2}$$

не обращается в нуль ни для какого p_* , причем dy/dp всегда положительно. Легко видеть, что $p = \infty$ отвечает $y = \infty$, причем имеют место асимптотические равенства при $y \rightarrow \infty$:

$$p \rightarrow \infty, \quad y = O(p^{1/(\omega-1)}), \quad K = o(1)$$

$$U = \ln y + o(\ln y), \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_* y^{-\omega} + o(y^{-\omega}), \quad \bar{\rho}_* = \text{const}$$

в точности совпадающие с соответствующими асимптотическими равенствами предыдущего параграфа. При $\omega > 1$ у всех решений p возрастает от $p = 2\omega^2$ до $p = \infty$. Вполне аналогично случаю кривых класса II при $\omega < 1$ L обращается в бесконечность при $p = 2\omega^2$, с возрастанием p уменьшается, достигает при некотором $p = p_{**} = F_1(\omega)$ минимума, отличного от нуля, и далее снова возрастает до бесконечности.

Таким образом, нельзя установить соответствия между величинами y и p так, чтобы $L(0) = 0$.

2°. Исследование движений неоднородной жидкости в полупространстве, проведенное в двух предположениях относительно пути смешения, привело к результатам, по существу одинаковым, которые заключаются в следующем.

Движение существенно различно в случаях $\omega < 1$ и $\omega > 1$. При $\omega < 1$ в зависимости от степени насыщения потока частицами могут иметь место различные движения. При определенном насыщении потока частицами во всем полупространстве устанавливается автомодельное распределение характеристик движения по высоте потока, данное формулами (2.29)—(2.31) или (3.16) — (3.18). Нетрудно показать, что эти формулы совпадут между собой, если $F(\omega) = 1/2\omega P_*$. Еще раз отметим как бы уменьшение константы Кармана в таком движении: распределение скорости по высоте потока остается логарифмическим, как и в потоке однородной жидкости, однако вместо значения κ , которое константа Кармана имела в потоке однородной жидкости, ее значение становится равным $\kappa\omega$. При меньшем насыщении потока взвешенными частицами движение при малых y соответствует диффузионной концепции, при больших же y независимо от придонных условий устанавливается предельный автомодельный режим, причем он устанавливается на тем меньшей высоте y , чем больше насыщение потока частицами.

Развиваемая в работе теория предполагает частицы, взвешенные потоком, малями. Однако это предположение, а также пренебрежение шероховатостью дна становятся неприемлемыми в некоторой области вблизи дна потока. Поэтому получающиеся из построенного решения распределения характеристик движения должны сопрягаться с соответствующими распределениями характеристик движения в придонной области. Построение рациональной схемы движения неоднородной жидкости в придонной области представляет собой задачу, по видимому, чрезвычайно трудную, так что относительно распределения характеристик движения в придонной области можно высказать лишь качественные соображения, основанные на анализе размерности.

Если насыщение потока взвешенными частицами больше, нежели то, которое соответствует автомодельному режиму, то исследование решений показывает, что в первом предположении относительно пути смешения у соответствующих решений пульсационная энергия обращается в нуль на некоторой высоте, а ниже решения не существует. Подсчет слагаемого уравнения баланса пульсационной энергии, определяющего приток пульсационной энергии за счет диффузии пульсаций, показывает малость этого слагаемого сравнительно с главными членами уравнения баланса пульсационной энергии — работой взвешивания частиц потоком и притоком пульсационной энергии среднего движения в области, где пульсационная энергия мала, так что учет диффузионного слагаемого не изменит этого вывода. Во втором предположении относительно пути смешения среди кривых, отвечающих насыщениям, большим чем то, которое соответствует автомодельному режиму, нет кривых, удовлетворяющих условию $L(0) = 0$, так что в обоих случаях нижняя часть получающихся кривых лишена физического смысла.

Однако верхняя часть этих кривых может быть сопряжена с некоторыми кривыми распределения характеристик движения в придонной области, в которой существенны размеры частиц, вязкость жидкости, шероховатость дна и где рассматриваемая теория становится неприменимой.

Полученный автомодельный режим является режимом предельного насыщения потока взвешенными частицами в следующем смысле. При достаточно малом размере частиц (но постоянной гидравлической крупности их), достаточно малой вязкости и шероховатости дна этот режим имеет место как угодно близко к дну. При этом возможные при подходящих условиях в придонной области режимы с большим насыщением потока взвешенными частицами будут все более приближаться к автомодельному режиму. В первом варианте предположения относительно пути смешения это видно из того, что размер придонной области с уменьшением размеров частиц шероховатости и величины вязкости уменьшается, т. е. применимыми становятся кривые, у которых пульсационная энергия обращается в нуль на все меньшей высоте; эти кривые приближаются к автомодельному режиму. Во втором варианте

предположения относительно пути смещения это видно из того, что получающиеся в этом варианте кривые II класса применимы только в части от минимума, достигаемого L и выше, т. е. при больших r . Поскольку придонная область, в которой рассматриваемая теория неприменима, уменьшается с уменьшением размера частиц, вязкости и шероховатости, величина пути смещения на ее внешней границе должна уменьшаться¹ и соответствующая величина L также должна уменьшаться, так что можно сопрягать с придонной областью кривые со все меньшим значением минимума L . Таким образом, режим движения с наибольшим возможным насыщением потока частицами приближается к автомодельному.

Итак, в обоих вариантах предположения относительно пути смещения при уменьшении размера частиц, шероховатости дна и вязкости режим с наибольшим для данных значений параметров потока насыщением потока взвешенными частицами приближается к рассматриваемому автомодельному режиму.

Представляет интерес получение объемного расхода взвешенных частиц за единицу времени для потока, движущегося при автомодельном режиме.

Как было указано выше, при малой шероховатости, малых размерах частиц и малой вязкости эта величина будет близка к предельной несущей способности потока с данными параметрами v_* и ω .

Формула (3.17) для распределения продольной скорости по высоте потока становится применимой лишь вне некоторой окрестности дна потока, размер которой и движение внаутри которой определяются диаметром частиц d , вязкостью жидкости ν , абсолютной шероховатостью ε , величиной $\sigma = (d_2 - d_1) / d_1$ (эта величина будет входить отдельно, поскольку в придонной области существенна инерция частиц), динамической скоростью v_* и гидравлической крупностью частиц a . Таким образом, высота придонной области равна

$$\delta = d\Phi\left(\frac{v_* d}{\nu}, \frac{\varepsilon}{d}, \sigma, \omega\right) \quad (3.19)$$

где Φ — безразмерная функция своих аргументов. При этом предполагается, что размер придонной области мал сравнительно с линейным масштабом $v_*^2 / \sigma g$. Малость размера частиц d сравнительно с характерным масштабом $v_*^2 / \sigma g$ (точнее говоря, с масштабом $2v_*^2 / q_2 \kappa^2 \sigma g$, отличающимся от него на постоянный множитель) является непременным условием применимости рассматриваемой теории.

Распределение продольной скорости по высоте потока вне придонной области может быть приведено к виду

$$U = \frac{1}{\omega} \ln \frac{y}{\Delta} + U_{\Delta}, \quad \Delta = \frac{\delta q_2 \kappa^2 \sigma g}{2v_*^2} \quad (3.20)$$

где U_{Δ} зависит от тех же аргументов, что и функция Φ в равенстве (3.19), и равно безразмерной продольной скорости на внешней границе придонной области, т. е. при $y = \Delta$. Формула (3.20) преобразуется к виду

$$U = \frac{1}{\omega} \ln \frac{Ax_3}{\delta} \quad (3.21)$$

где A — некоторая функция от тех же аргументов, что и Φ .

Несущая способность всего потока равна бесконечности в силу его бесконечной глубины. Представляет интерес нахождение несущей способности части потока от дна до некоторого $x_3 = H$. Вспомнив, что $\bar{\rho}(y)$ вне придонной области удовлетворяет уравнению (3.13), получаем для расхода взвешенных частиц Q

$$Q = \int_0^H \bar{\rho} \bar{V}_1(x_3) dx_3 = \int_0^{\delta} \bar{\rho} \bar{V}_1 dx_3 + \int_{\delta}^H \bar{\rho} \bar{V}_1 dx_3 = \int_0^{\delta} \bar{\rho} \bar{V}_1 dx_3 + \frac{2v_*^3 F(\omega)}{q_2 \kappa^2 \sigma g \omega} \left(\ln^2 \frac{AH}{\delta} - \ln^2 A \right)$$

¹ Поскольку величина пути смещения в потоке однородной жидкости $l = \chi x_3$ заведомо превосходит величину пути смещения в потоке неоднородной жидкости,

Относительно первого члена правой части последнего равенства (3.22) можно сказать по соображениям размерности, что он равен $\delta v_* G$, где G — безразмерная функция тех же аргументов, что и в равенстве (3.19). Имеем

$$Q = \delta v_* G + \frac{2v_*^3 F(\omega)}{q_2 \kappa^3 \sigma g \omega} \ln^2 \frac{AH}{\delta} - \frac{2v_*^3 F(\omega)}{q_2 \kappa^3 \sigma g \omega} \ln^2 A = \\ = \frac{2v_*^3 F(\omega)}{q_2 \kappa^3 \sigma g \omega} \left\{ \ln^2 \frac{H}{\delta} + 2 \ln A \ln \frac{H}{\delta} \right\} + \delta v_* G \quad (3.23)$$

Из уравнения (3.10), определяющего $F(\omega)$, вытекает, что $F(\omega) \approx 1 + 2\omega^2$ при малых ω ; поэтому при малых ω для Q получаем

$$Q = \frac{v_*^3}{q_2 \kappa^3 \sigma g \omega^3} \left\{ \ln^2 \frac{H}{\delta} + 2 \ln A \ln \frac{H}{\delta} \right\} + \delta v_* G \quad (3.24)$$

В случае числа K , достаточно малого по всей области потока, чтобы можно было произвести линеаризацию предыдущего параграфа, получаем

$$F(\omega) = \frac{1 - \omega}{2\alpha\omega^2}, \quad Q = \frac{v_*^3 (1 - \omega)}{\alpha q_2 \kappa^3 \sigma g \omega^3} \left\{ \ln^2 \frac{H}{\delta} + 2 \ln A \ln \frac{H}{\delta} \right\} + \delta v_* G \quad (3.25)$$

Отметим, что при малых ω линеаризация основных соотношений для автомодельного режима и близких к нему недопустима, поскольку K для этих течений близко к единице. Поэтому формулы (3.24) не переходят в (3.25) при малых ω .

В случае $\omega > 1$ получаются следующие результаты. В первом предположении о пути смещения все решения обладают тем свойством, что у них на некоторой высоте пульсационная энергия обращается в нуль, а ниже решение не существует, причем учет диффузионного слагаемого в уравнении баланса пульсационной энергии не меняет этого вывода. Во втором предположении у всех решений L нигде не обращается в нуль, так что нельзя построить решения такого, что $L(0) = 0$. Функция L для этих решений уменьшается от бесконечности при $p = 2\omega^2$ до некоторого минимального значения, величина которого растет с ростом насыщенности потока частицами и не равна нулю и далее снова возрастает до бесконечности.

Отсюда следует, что нижняя часть всех кривых распределения характеристик движения по высоте не может быть использована, однако верхняя часть (во втором предположении относительно пути смещения, начиная с точки, где L имеет минимум) может быть сопряжена с некоторыми кривыми распределения характеристик движения в придонной области. Движение, таким образом, существенно зависит от придонных условий. Асимптотические формулы для характеристик движения при $y \rightarrow \infty$ показывают, что в этом случае в верхних областях потока применима диффузионная концепция движения.

Если размеры частиц, вязкость и шероховатость дна будут уменьшаться при сохранении гидравлической крупности частиц постоянной, то размер придонной области, движение в которой не описывается предлагаемой теорией, а определяется указанными параметрами, уменьшается. Тем самым должна уменьшаться величина L на внешней границе придонной области, и возможные движения становятся все менее насыщенными. В этом смысле можно сказать, что в рамках рассматриваемой теории, считающей частицы бесконечно малыми и не рассматривающей придонных явлений, в случае $\omega > 1$ частицы должны были бы просто лежать на дне. Однако благодаря наличию придонной области и конечности размеров частиц движение взвеси в этом случае все же будет иметь место; вне придонной области это движение может быть рассчитано по формулам предложенной теории, на большой высоте применима диффузионная схема.

Качественное различие случаев $\omega > 1$ и $\omega < 1$ может быть проиллюстрировано следующим образом. Подъем взвешенных частиц в потоке происходит за счет переноса их вместе с поднимающимися, благодаря вертикальным пульсациям, частицами жид-

кости. Скорость вертикальных пульсаций имеет порядок динамической скорости v_* . Однако во время подъема частицы жидкости происходит опускание взвешенных частиц внутри поднимающейся частицы со скоростью a . Величина отношения a/v_* и показывает, будут ли в среднем частицы подниматься или опускаться.

3°. Формулы (2.29) — (2.31) или (3.16) — (3.18), дающие асимптотические представления характеристик движения неоднородной жидкости при $y \rightarrow \infty$ для случая $\omega < 1$, на первый взгляд парадоксальны в том отношении, что при $\omega \rightarrow 0$, т. е. «стремлении жидкости к однородности», характеристики движения, отвечающие предельному режиму, не стремятся к характеристикам, отвечающим потоку однородной жидкости. Этот кажущийся парадокс имеет следующее объяснение.

Зафиксируем некоторые $y = Y_0$ и $\bar{\rho}_0$ — объемную концентрацию взвешенных частиц на некоторой высоте y_0 .

Тогда, при уменьшении ω функция $\rho(y)$ будет, как это легко показать, стремиться к $\bar{\rho}_0 (y/y_0)^{-\omega}$, функция $B(y)$ — к единице, а распределение скорости по высоте потока — к известному логарифмическому профилю скорости в потоке однородной жидкости. Иными словами, картина движения при уменьшении ω и фиксированном относительном объеме взвешенных частиц на некоторой высоте приближается к диффузионной и все более отдаляется от режима предельного насыщения. Область применимости асимптотических формул отодвигается все выше.

Рассмотрим теперь некоторый участок потока между $y = y_1$ и $y = y_2$. Тогда в столбе единичной площади сечения, расположенном в этом участке, количество массы взвеси, переносимой потоком, движущимся при режиме предельного насыщения, равно

$$d_2 F(\omega) \ln \frac{y_2}{y_1}$$

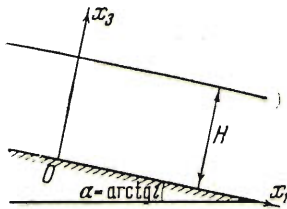
оно возрастает при уменьшении ω , поскольку $F(\omega)$ возрастает при уменьшении ω . Это имеет тот смысл, что при облегчении частиц поток в состоянии захватить большую массу взвеси, что и вынуждает его соответственно перестроиться.

Полученные соотношения позволяют сделать заключение о движении неоднородной жидкости, если частицы неизменны, запас их неограничен, а скорость потока все возрастает. При небольших скоростях потока частицы движутся в основном вблизи дна потока, поток переносит конечную массу взвеси на единицу площади дна, так что на большой высоте распределение скорости по высоте потока и пульсации такое же, как в соответствующем потоке однородной жидкости, а распределение концентрации взвешенных частиц по высоте потока соответствует диффузионной концепции. Когда же скорость становится настолько значительной, что ω переходит через критическое значение, равное единице, и становится меньше единицы, движение становится другим, — поток переносит бесконечно большую массу взвеси на единицу площади дна, распределение скорости по высоте потока остается логарифмическим, однако значение константы Кармана уменьшается: вместо κ становится равным $\kappa\omega$.

Объемная концентрация взвешенных частиц убывает обратно пропорционально высоте; наконец, пульсации скорости во всем потоке уменьшаются сравнительно с соответствующим потоком однородной жидкости.

§ 4. Движение неоднородной жидкости в плоском открытом канале конечной глубины. 1°. Рассмотрим плоское стационарное и однородное в направлении дна потока в среднем турбулентное движение неоднородной жидкости в открытом канале глубины H с малым уклоном i (фиг. 6). С позиций диффузионной теории это движение рассматривалось в работе Кармана-Ишпена [7,9,10] и др. Гравитационная теория М. А. Великанова [11] построена им применительно именно к этому движению.

Выбирая оси координат, как показано на фиг. 6, легко приведем основные уравнения задачи к виду



Фиг. 6

$$l \sqrt{b} \frac{d\bar{v}_1}{dx_3} = v_*^2 \left(1 - \frac{x_3}{H}\right), \quad v_* = \sqrt{giH} \quad (4.1)$$

$$\bar{\omega} \rho + q_2 l \sqrt{b} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} = 0 \quad (4.2)$$

$$b^2 = \frac{v_*^4}{\gamma^4} \left(1 - \frac{x_3}{H}\right)^2 (1 - q_2 K) \quad (4.3)$$

$$K = -\sigma g \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_3}\right)^{-2}$$

причем в уравнении баланса пульсационной энергии (4.3) мы пренебрегли диффузией пульсаций. Диффузия пульсаций играет заметную роль в непосредственной близости свободной поверхности, где количество взвеси, переносимой потоком, ничтожно. Поскольку мы не интересуемся этой областью, мы и в дальнейшем будем пренебрегать упомянутым членом. Отметим, что в задаче о теплопередаче потоком со свободной поверхностью уже нельзя игнорировать диффузионное слагаемое, так как важно получить асимптотически правильное поведение характеристик движения жидкости вблизи свободной поверхности, определяющее теплообмен с внешней средой. В рассматриваемой задаче ничего подобного нет, и для упрощения задачи пренебрежение диффузией турбулентных пульсаций в первом приближении допустимо. Константа v_* определена, как обычно, из условия равенства нулю турбулентного трения на свободной поверхности канала.

Как и в случае полупространства, величина пути смешения l должна определяться из дополнительных соображений.

Перейдем в уравнениях (4.1) — (4.3) к безразмерным переменным

$$U = \frac{x\bar{v}_1}{v_*}, \quad y = \frac{x_3}{H}, \quad B = \frac{\gamma^2 b}{v_*^2}, \quad L = \frac{l}{x_1 H} \quad (4.4)$$

Тогда уравнения (4.1) — (4.3) переписуются в виде

$$L \sqrt{B} \frac{dU}{dy} = (1 - y) \quad (4.5)$$

$$\bar{\omega} \rho + L \sqrt{B} \frac{d\bar{\rho}}{dy} = 0 \quad (4.6)$$

$$B^2 = (1 - y)^2 (1 - q_2 K), \quad q_2 K = -2D \frac{d\bar{\rho}}{dy} \left(\frac{dU}{dy}\right)^{-2}, \quad D = \frac{q_2 \kappa^2 \sigma}{2i} \quad (4.7)$$

2. Если работа потока на поднятие взвешенных частиц мала сравнительно с другими членами уравнения баланса пульсационной энергии (т. е. во всей области потока $K \ll 1$), уравнение (4.7) записывается в виде

$$B^2 = (1 - y)^2 \quad (4.8)$$

Далее, считая в соответствии с предположением $K \ll 1$, что l от содержания взвешенных частиц в потоке не зависит, а определяется величинами $d\bar{V}_1/dx_3$, $d^2\bar{V}_1/dx_3^2$, имеем

$$L = -\frac{dU}{dy} \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)^{-1} \quad (4.9)$$

Подставляя (4.8) и (4.9) в (4.5), получаем для U дифференциальное уравнение второго порядка, интегрируя которое при условии $dU/dy = \infty$ при $y = 0$, получим

$$U - U^0 = \sqrt{1 - y} + \ln(1 - \sqrt{1 - y}) \quad (4.10)$$

где U^0 — значение U при $y = 1$. Далее из формулы (4.10) имеем

$$L = 2\sqrt{1 - y} [1 - \sqrt{1 - y}] \quad (4.11)$$

Последние две формулы представляют собой известные соотношения для плоского открытого канала [12]. Подставляя (4.11) в (4.6), получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции $\bar{\rho}(y)$, интегрируя которое при условии $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0$ при $y = y_0$, получаем

$$\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \right) = \left[\frac{\sqrt{1 - y}}{1 - \sqrt{1 - y}} \right]^\omega \left[\frac{1 - \sqrt{1 - y_0}}{\sqrt{1 - y_0}} \right]^\omega \quad (4.12)$$

Зафиксировав y_0 , из формулы (4.12) получаем, что в пределах применимости изложенной диффузионной схемы кривая

$$\frac{1}{\omega} \lg \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} = \lg \frac{\sqrt{1 - y}}{1 - \sqrt{1 - y}} - \lg \frac{\sqrt{1 - y_0}}{1 - \sqrt{1 - y_0}} \quad (4.13)$$

должна быть универсальной, т. е. не должна зависеть от $\bar{\rho}_0$ и от ω .

3°. При K , сравнимых с единицей, вполне аналогично предыдущему параграфу, обобщая предположения Кармана на неоднородную жидкость, получаем

$$L = -\frac{dU}{dy} \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)^{-1} \Theta \left(-2D \frac{d\bar{\rho}}{dy} \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-2} \right), \quad D = \frac{q_2 \kappa^2 \sigma}{2i} \quad (4.14)$$

где Θ , как в предыдущем параграфе, — некоторая функция, не возрастающая с возрастанием аргумента, $\Theta(0) = 1$. Функция Θ должна быть определена из дополнительных соображений или из опыта. Подставляя (4.14) и (4.7) в (4.5) и (4.6), получаем систему уравнений:

$$\bar{\omega} \bar{\rho} + \frac{d\bar{\rho}}{dy} \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-1} (1 - y) = 0 \quad (4.15)$$

$$-\frac{d^2U}{dy^2} \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-2} = \frac{1}{\sqrt{1 - y}} \Theta(q_2 K) (1 - q_2 K)^{1/4} \quad (4.16)$$

Получение решения этой системы в замкнутом виде маловероятно. Вместе с тем численное интегрирование этой системы при заданных граничных условиях может быть без труда осуществлено.

Систему (4.15) — (4.16) можно привести к виду

$$\bar{\omega}\bar{\rho} + Q \frac{d\bar{\rho}}{dy} (1 - y) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{1}{V\sqrt{1-y}} \Theta(q_2 K) (1 - q_2 K)^{1/4} \quad (4.18)$$

$$Q = \left(\frac{dU}{dy}\right)^{-1}, \quad q_2 K = -2DQ^2 \frac{d\bar{\rho}}{dy}$$

Для интегрирования удобнее привести систему (4.17) — (4.18) к другому виду. Положим

$$1 - y = z, \quad 2D\bar{\rho} = r$$

Система (4.17) — (4.18) принимает вид:

$$\frac{dr}{dz} = \omega \frac{r}{Qz} \quad (4.19)$$

$$\frac{dQ}{dz} = -\frac{1}{Vz} \Theta\left(\omega \frac{Qr}{z}\right) \left(1 - \omega \frac{Qr}{z}\right)^{1/4} \quad (4.20)$$

При малых y течение должно быть близко к рассмотренному в двух предыдущих параграфах движению неоднородной жидкости в полупространстве, поэтому о движении в области вблизи дна можно повторить все, сказанное по этому поводу в предыдущих параграфах.

Отсюда следует, в частности, что при $\omega < 1$ существует движение, при малых y переходящее в ранее изученный автотомельный режим. Это движение также будет режимом предельного насыщения в смысле предыдущего параграфа. Движения, отвечающие меньшему насыщению потока частицами, при малых y соответствуют диффузионной концепции, при больших y имеет место отклонение от диффузионной схемы, тем большее, чем больше насыщение потока частицами, и приближение к режиму предельного насыщения.

Остановимся на несущей способности потока в открытом канале конечной глубины. Из предыдущего следует, что излагаемая теория применима вне некоторой придонной области, размер которой определяется вязкостью жидкости, шероховатостью дна, размером частиц, динамической скоростью и гидравлической крупностью частиц, а также величиной σ , поскольку в придонной области существенна инерция частиц.

Таким образом, несущая способность потока определяется несущей способностью придонной области и расходом, вычисленным, если распределение концентрации взвешенных частиц по высоте потока взять по интегральной кривой, допускающей сопряжение с придонной областью и отвечающей наибольшему возможному насыщению потока взвешенными частицами. В соответствии с предыдущим при уменьшении размера частиц (но сохранении постоянной гидравлической крупности), уменьшении

вязкости и шероховатости дна высота придонной области уменьшается, и при $\omega > 1$ несущая способность потока стремится к нулю, а при $\omega < 1$ — к несущей способности потока, движущегося при режиме, при малых y переходящем в автомодельный режим, рассмотренный в предыдущем параграфе.

При $\omega > 1$ в верхних областях потока применима диффузионная схема. Если запас частиц, которые могут быть захвачены потоком, приходящийся на единицу площади дна потока (напомним, что канал предполагается бесконечно длинным), превосходит несущую способность потока, то часть частиц будет находиться на дне.

Если же этот запас становится меньше несущей способности потока, то распределение частиц по высоте потока становится все более равномерным (однако на свободной поверхности концентрация частиц неизменно равна нулю).

Отметим, что при этом в определенных частях потока влияние взвешенных частиц на динамику потока несущественно: при $\omega > 1$ в верхней, при $\omega < 1$ в нижней.

4°. Если во всей области потока число K мало, то можно провести линеаризацию задачи, подобно тому, как это делалось в конце § 2. Именно при малых K можно считать

$$\Theta(q_2 K)(1 - q_2 K)^{1/4} = 1 - \alpha q_2 K, \quad \alpha = \Theta'(0) - \frac{1}{4}$$

При этом система (4.17) — (4.18) принимает вид:

$$\omega \bar{\rho} + Q \frac{d\bar{\rho}}{dy} (1 - y) = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y}} \left[1 + 2\alpha D Q^2 \frac{d\bar{\rho}}{dy} \right] \quad (4.22)$$

Подобно общей системе (4.17) — (4.18) эту систему преобразованием

$$1 - y = z, \quad 2\alpha D \bar{\rho} = r$$

можно привести к форме

$$\frac{dr}{dz} = \omega \frac{r}{Qz} \quad (4.23)$$

$$\frac{dQ}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{z}} \left[1 - Q^2 \frac{dr}{dz} \right] \quad (4.24)$$

Решение системы (4.17) — (4.18) или (4.21) — (4.22) может быть проведено, в частности, методом последовательных приближений.

Первое приближение совпадает с диффузионной схемой, развитой в п. 2, и получается, если принять значение K в функции $\Theta(q_2 K)(1 - q_2 K)^{1/4}$ равным нулю [соответственно пренебречь вторым слагаемым в скобках правой части (4.22)].

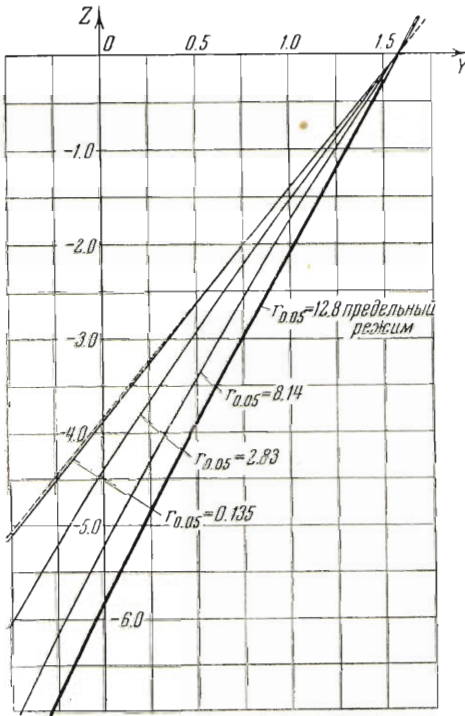
На графиках фиг. 7 и 8 изображены кривые распределения по высоте потока концентрации взвеси и продольной скорости, полученные в результате численного интегрирования системы (4.23) — (4.24) для нескольких вариантов, соответствующих случаю $\omega = 0.6875$. Для удобства сравнения кривые распределения концентрации построены в координатах

$$Z = \frac{1}{\omega} \lg \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{1}{\omega} \lg \frac{r}{r_{0.05}}, \quad Y = \lg \frac{\sqrt{1-y}}{1-\sqrt{1-y}}$$

которые будут использованы ниже при обработке опытов В. Ванони ($r_{0.05}$ — значение r при $y = 0.05$), а кривые распределения продольной скорости — в координатах

$$U^* = U - U^0$$

$$Y^* = \sqrt{1-y} + \ln(1-\sqrt{1-y})$$



Фиг. 7

Фиг. 7 и 8 показывают, что кривые распределения по высоте концентрации взвеси и продольной скорости в рассматриваемых координатах весьма близки к прямым линиям, наклон которых возрастает с увеличением степени насыщения потока взвешенными частицами. Проведенные расчеты для значений ω , более близких к единице, показали, что соответствующие кривые распределения еще более близки к прямым линиям; отклонение этих кривых от прямых линий значительно меньше, чем разброс имеющихся в настоящее время экспериментальных данных.

Можно сказать, таким образом, что влияние взвешенных частиц сказывается в том, что как бы уменьшается константа Кармана, а в остальном характер распределения концентрации и скорости по высоте потока остается таким же, как и в случае пренебрежимо малого воздействия взвешенных частиц на динамику потока.

5°. В 1944 г. была опубликована работа В. Ванони [7], посвященная изучению распределения концентрации взвешенных частиц и продольной скорости по высоте турбулентного потока неоднородной жидкости, занимающего открытый канал. При изложении теории этого движения В. Ванони исходил из варианта диффузионной концепции, ранее предложенного Карманом. Именно выражение для l он получал, исходя из логарифмического распределения продольной скорости по высоте потока, которое для открытого канала представляет собой не более чем эмпирическую формулу. Подобно изложенной в п. 4° диффузионной схеме, эта схема также приводит к некоторой универсальной кривой для распределения объемной концентрации взвешенных частиц по высоте потока.

Помимо этого В. Ванони провел значительное число опытов-замеров в одном и том же месте распределения концентрации частиц и продольной скорости по высоте.

Из опытов В. Ванони были выбраны 23 наиболее совершенные серии, замеренные на одинаковом расстоянии от стенок канала, где поток можно считать плоским, содержащие данные обо всех характеристиках движения, и т. д. При этом шесть серий опытов I (1,1 А; 2,2 В; 3,3 С), II (15, 14 А; 16, 14 В; 17, 21 С) относились к однородной жидкости, 17 серий опытов — к неоднородной жидкости I (4, 1 ЕА; 5, 2 FД; 13, 12 РХ; 12, 11 ОV; 14, 13 QAA; 10, 8 LQ; 7, 5 JI; 9, 7 KN; 6, 3 GE; 8, 6 JL), II (22, 19 JK; 21, 18 HD; 24, 21 KB; 25, 22 LL; 19, 15 EN; 20, 16 FO; 23, 20 JA).

Опыты, относящиеся к однородной жидкости, были использованы для проверки формулы (4.10) для распределения продольной скорости по высоте потока. Интегрируя формулу (4.10), получаем

$$U^m - U^0 = -0,833 \tag{4.25}$$

где $U^m = \kappa \bar{V}_1^m / v_*$ — среднее значение безразмерной продольности скорости по высоте потока.

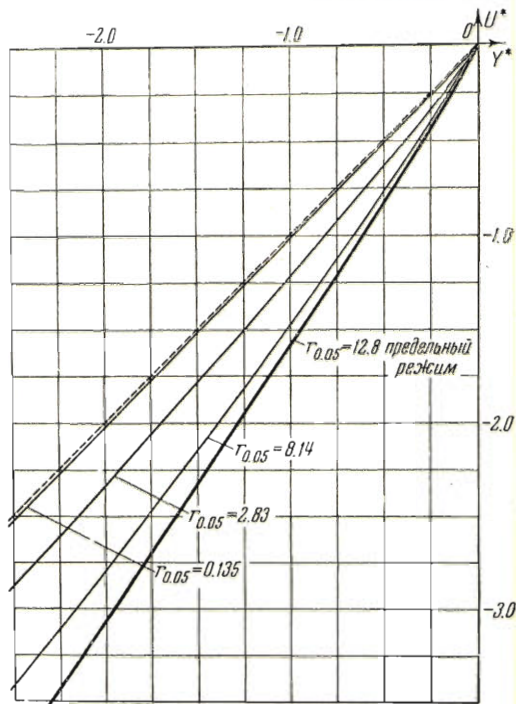
Из (4.10) и (4.25) получаем

$$U - U^m = \frac{\kappa (\bar{V}_1 - \bar{V}_1^m)}{v_*} = \sqrt{1-y} + \ln(1 - \sqrt{1-y}) + 0,833 = L(y) \tag{4.26}$$

(Разность $\bar{V}_1 - \bar{V}_1^m$ определяется точнее, чем $\bar{V}_1 - \bar{V}_1^0$, так как \bar{V}_1^m определяется через расход.) Фиг. 9 показывает, что опытные точки действительно ложатся на теоретическую прямую в координатах $\zeta = (U - U^m) / \kappa$, $L(y)$, если принять для константы κ значение $\kappa = 0,41$.

У В. Ванони y_0 принято равным 0.05. Развита в п. 2° диффузионная схема показывает, что для движений с динамически малой концентрацией взвеси опытные точки в координатах

$$Z = \frac{V_{gi} H}{a} \lg \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \quad Y = \lg \frac{\sqrt{1-y}}{1 - \sqrt{1-y}} \tag{4.27}$$



Фиг. 8

должны лечь на прямую

$$Z = \frac{1}{\alpha q_2} (Y - Y_0), \quad Y_0 = \lg \frac{V\sqrt{1-y_0}}{1 - \sqrt{1-y_0}} \quad (4.28)$$

Остановимся на понятии динамически малой концентрации взвеси. В граничные условия рассматриваемой задачи входят параметры $\sigma \rho_0 g$ — вес взвеси за вычетом архимедовой силы, приходящейся на единицу объема на относительной высоте y_0 , v_* — динамическая скорость, H — глубина канала.

Из этих параметров можно составить единственную безразмерную комбинацию

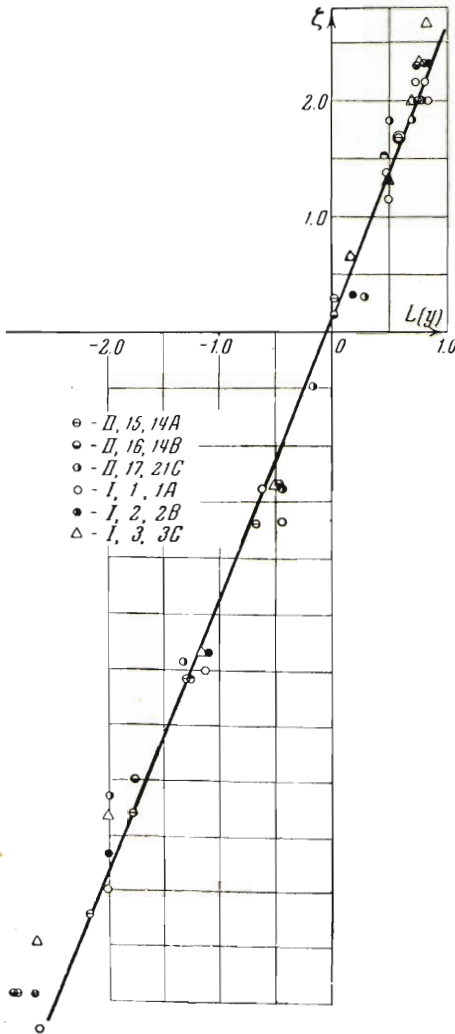
$$\beta = \frac{\sigma \rho_0 g H}{v_*^2}$$

являющуюся характеристикой степени замутненности потока. Малые значения β соответствуют динамически малой концентрации взвеси, т. е. в соответствующих потоках число K будет малым. Выбранные серии опытов были разбиты по параметру β на три группы:

- (1) I (4.1 EA ($\beta = 1.06$), 5.2 FD ($\beta = 0.95$));
II (22.19 JK ($\beta = 1.05$))
- (2) I (13.12 PX ($\beta = 5.26$), 12.110 V
($\beta = 8.00$), 14.13 QAA ($\beta = 5.71$))
- (3) все остальные серии ($1.41 \geq \beta \geq 3.92$)

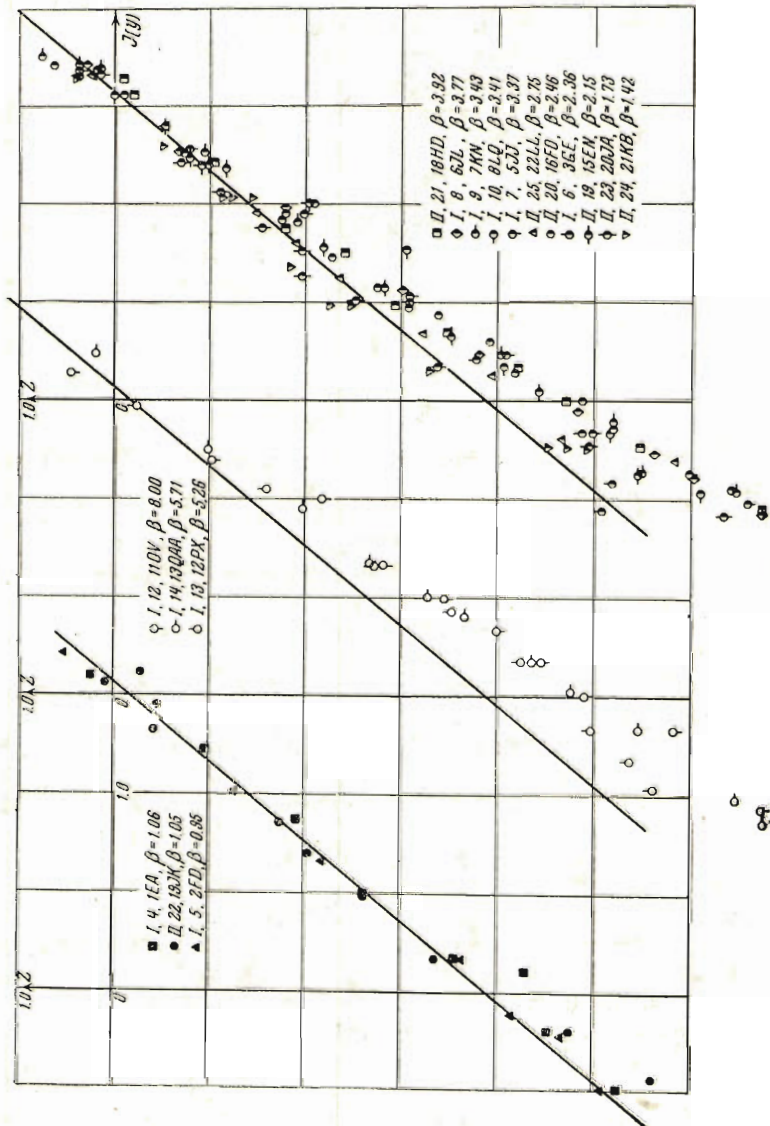
Для всех опытов В. Ванони $\omega < 1$. На фиг. 10, а нанесены опытные точки, отвечающие сериям с динамически малой концентрацией взвеси — группа (1). Как видно, опытные точки вполне удовлетворительно ложатся на теоретическую прямую диффузионной схемы п. 2°, причем для q_2 принято значение $q_2 = 1$. Наоборот, фиг. 10, б показывает, что опытные точки, отвечающие потокам с динамически значительной концентрацией взвеси [группа (2)], дают систематически более низкие значения для концентрации взвеси, чем диффузионная схема п. 2°. Фиг. 10, в, на которой представлены опытные точки промежуточной группы (3), занимает промежуточное положение и показывает, что имеют место систематические отклонения от этой прямой, причем эти отклонения располагаются «веером» — они больше для потоков с динамически большей концентрацией взвеси и меньше для потоков с динамически менее значительной концентрацией взвеси. Таким образом, при более значительных β кривая распределения концентрации взвешенных частиц по высоте потока в координатах ZY перестает быть универсальной.

Опыты Ванони бесспорно приводят к следующим выводам. Во-первых, движения, отвечающие динамически малой концентрации взвеси, т. е. малым β , удовлетворительно описываются диффузионной схемой п. 2° на всей глубине потока. Движения



Фиг. 9

с ббльшими β обнаруживают систематические всеообразные отклонения от этой схемы в сторону уменьшения концентрации взвеси сравнительно с диффузионной схемой п. 2°. Наконец, в случае значительных β кривая распределения концентрации по высоте существенно отличается от диффузионной. В пределах точности данных В. Ванони можно считать, что кривые распределения концентрации по высоте в принятой системе координат изображаются прямыми линиями, наклон которых возрастает с ростом замутненности потока.



Фиг. 10

Во-вторых, как сказано выше, работа В. Ванони содержит также измерения распределения продольной скорости по высоте потока неоднородной жидкости. Данные В. Ванони, несомненно, указывают на изменение поля скорости под влиянием взвешенных частиц. Ванони пишет в своей работе об «уменьшении константы Кармана» под влиянием неоднородности жидкости, причем происхождение этого уменьшения им не объясняется. Предыдущие результаты позволяют придать полученному В. Ванони экспериментальному результату вполне определенный смысл. Ванони

наблюдал перестройку поля скорости в потоке неоднородной жидкости сравнительно с однородной, причем эта перестройка происходит в направлении увеличения скорости при сохранении общего характера распределения скорости по высоте. Опыты Ванони в частности определенно показывают, что предположение о совпадении продольных скоростей в потоке неоднородной жидкости и соответствующем потоке однородной жидкости не соответствует действительности для потоков с существенным воздействием взвешенных частиц на динамику потока.

В-третьих, имеющееся в работе В. Ванони указание на падение коэффициента сопротивления в потоке неоднородной жидкости сравнительно с соответствующим потоком однородной жидкости является косвенным доказательством падения пульсаций в потоке, несущем взвешенные частицы. Последнее обстоятельство отмечалось в многочисленных других работах; сводку их можно найти в статье Н. А. Фукса [6].

Все эти факты качественно подтверждают развиваемую теорию. К сожалению, точность опытов В. Ванони, повидимому, невысока. Кроме того, статья Ванони не содержит числовых отчетов о проведенных опытах, а содержит лишь графики. Для получения вновь числовых данных нам пришлось обрабатывать увеличенные фотографии графиков, что внесло дополнительную неточность. Таким образом, данные В. Ванони достаточны для качественного подтверждения развиваемой теории, однако для количественного сравнения этой теории с экспериментом и определения константы α желательны более точные данные.

Поступила 17 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, т. XVII, вып. 3, 1953.
2. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. ИАН СССР, сер. физич., № 1—2, 1942.
3. Обухов А. М. Турбулентность в температурно-неоднородной атмосфере. Труды ИТГ АН СССР, № 1, 1946.
4. Монин А. С. Динамическая турбулентность в атмосфере. ИАН СССР, сер. геогр. и геоф., т. XIV, вып. 3, 1950.
5. Монин А. С. Турбулентный режим в приземном слое воздуха. Илф. сб. Гл. упр. Гидрометслужбы № 1, 1950.
6. Фукс Н. А. Влияние пыли на турбулентность газового потока. ЖТФ, т. XXI, вып. 6, 1951.
7. Vanoni V. Transportation of suspended sediment by water. Proc. of ASCE, vol. 70, № 6, 1944.
8. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. ИЛ, М., 1949.
9. Th. Kármán. Some aspects of the turbulence problem. Proceedings; Fourth International Congress for Applied Mechanics. Cambridge, England, 1934.
10. H. Rouse. Modern conceptions of the Mechanics of Fluid Turbulence. Transactions of ASCE, vol. 102, 1937.
11. Великанов М. А. Движение наносов. Речиздат, М., 1948.
12. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГТТИ, М., 1940.