Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Н. А. Ростовцев

(Чаплыгин)

Излагается решение осесимметричной задачи об определении смещений и напряжений в упругом полупространстве, которое скручивается вследствие поворота вокруг оси симметрии жесткого штампа, связанного с полупространством посредством трения или сцепления.

1. В этом случае вследствие осевой симметрии уравнения Ламе в цилиндрических координатах r, θ, z распадаются на две независимые системы, из которых первая состоит из двух уравнений относительно смещений u_r, u_z, а вторая — из одного относительно $u_\theta = v(r, z)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v = 0 \tag{1.1}$$

Напряжения $\tau_{z\theta}$ и $\tau_{r\theta}$ определяются независимо от остальных напряжений формулами

$$\tau_{z\theta} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \tag{1.2}$$

При наличии трения граничное значение $\tau_{z\theta}$ (и, следовательно, момент сил трения) определяется непосредственно через граничное значение нормального напряжения σ_z:

$$\tau_{z\theta} = F(r)\,\sigma_z\big|_{z=0} = -F(r)\,p(r) \qquad (r < a), \qquad \tau_{z\theta}\big|_{z=0} = 0 \qquad (r > a) \tag{1.3}$$

Здесь $F(r)$ — коэффициент трения. Поскольку эта величина вообще зависит от скорости скольжения, она тем самым зависит и от радиуса r[1].

Мыслим и другой случай — когда внутри круга $r = a$, $z = 0$ задается смещение, а внешность круга свободна от напряжений, например

$$v\big|_{z=0} = \alpha r \qquad (r < a), \qquad \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \qquad (r > a) \tag{1.4}$$

Здесь α — угол поворота жесткого штампа, находящегося в сцеплении с упругим полупространством. В обоих случаях возникает задача определения функции v, через нее функций $\tau_{z\theta}$ и $\tau_{r\theta}$ во всем упругом полупространстве. Ниже приводится решение этой задачи в квадратурах того же типа и тем же приемом, что и в работе[2].

2. Считая ось Oz направленной внутрь упругого полупространства, рассмотрим следующее частное решение уравнения (1.1) в виде комплексного интеграла Липшица-Ханкеля

$$\chi(r, z; s) = \int_0^\infty e^{-(z+is)t} J_1(rt)\frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{r^2 + (z+is)^2} - (z+is)}{r} \tag{2.1}$$

Предполагается, что $z \geqslant 0$, $r \geqslant 0$. Очевидно,

$$\chi|_{r=0} = 0, \qquad \chi|_{r=\infty} = 0, \qquad \chi|_{r=\infty} = 1 \tag{2.2}$$

При $z = 0$

$$\operatorname{Re}\chi|_{z=0} = \begin{cases} 0 & (r < s) \\ r^{-1}\sqrt{r^2 - s^2} & (r > s) \end{cases} \tag{2.3}$$

Для производной

$$\frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{1}{r}\left(\frac{z + is}{\sqrt{r^2 + (z+is)^2}} - 1\right) \tag{2.4}$$

имеем аналогично

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial z}\right|_{r=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\chi}{\partial z}\right|_{z=\infty} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\chi}{\partial z}\right|_{r=\infty} = 0 \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial\chi}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} r^{-1}\left[s(s^2 - r^2)^{-1/2} - 1\right] & (r < s) \\ -r^{-1} & (r > s) \end{cases} \tag{2.6}$$

3. Рассмотрим теперь решение уравнений (1.1), имеющее вид:

$$v = \operatorname{Re}\int_0^a g(s)\,\chi(r, z\cdot, s)\,ds \tag{3.1}$$

Относительно вспомогательной функции $g(s)$ полагаем, что она интегрируема по Стильтьесу и что

$$\int_0^a g(s)\,ds = 0 \tag{3.2}$$

Тогда на границе $z = 0$ получаем

$$v|_{z=0} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - s^2}\,g(s)\,ds & r < a \\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^a \sqrt{r^2 - s^2}\,g(s)\,ds & r > a \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_r^a \frac{sg(s)\,ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \tag{3.4}$$

Условие (3.2) позволяет упростить общее выражение (3.1) функции $v(r, z)$. Внося (2.1) в (3.1) при условии (3.2), получаем

$$v = \frac{1}{r}\operatorname{Re}\int_0^a g(s)\sqrt{r^2 + (z+is)^2}\,ds \tag{3.5}$$

Отсюда

$$\mu^{-1}\tau_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r}\operatorname{Re}\int_0^a g(s)\,\frac{z + is}{\sqrt{r^2 + (z+is)^2}}\,ds \tag{3.6}$$

$$\mu^{-1}\tau_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \operatorname{Re}\int_0^a g(s)\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+is)^2}} - \frac{2}{r^2}\sqrt{r^2 + (z+is)^2}\right]ds \tag{3.7}$$

Найдем еще выражение пары, эквивалентной системе касательных напряжений $\tau_{z\theta}$ в плоскости $z = \mathrm{const}$. Этот момент уравновешивается противоположным по знаку моментом пары, вращающей штамп (крутящий момент). Имеем

$$M = \lim_{b\to\infty} 2\pi\mu \int_0^b \frac{\partial v}{\partial z} r^2\, dr \tag{3.8}$$

Внося сюда (3.6), изменяя порядок интегрирования и принимая во внимание (3.2), в результате предельного перехода получим

$$M = 2\pi\mu \int_0^a g(s)\, s^2\, ds \tag{3.9}$$

независимо от z. К этому же выражению и тем же приемом приходим, вычисляя момент пары, эквивалентной системе касательных напряжений $\tau_{r\theta}$ на поверхности цилиндра $r = c > a$.

4. Формулы (3.3) и (3.4) позволяют свести задачу к решению интегральных уравнений Абеля относительно $g(s)$. Так, задав

$$v|_{z=0} = \varphi(r) \quad (r < a), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad (r > a) \tag{4.1}$$

получим

$$\int_0^r g(s)\sqrt{r^2 - s^2}\, ds = r\varphi(r) \tag{4.2}$$

Это уравнение определяет $g(s)$ с точностью до несобственного слагаемого $C\delta(a - s)$. Дифференцируя (4.2) по r и решая уравнение повторным интегрированием, находим

$$g(s) = C\delta(a - s) + \frac{2}{\pi}\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{t\varphi'(t) + \varphi(t)}{\sqrt{s^2 - t^2}}\, dt \tag{4.3}$$

Постоянная C находится из условия (3.2):

$$C = -\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{t\varphi'(t) + \varphi(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}}\, dt \tag{4.4}$$

Внося полученные выражения в (3.9) и упрощая, найдем выражение момента M непосредственно через смещение на поверхности:

$$M = -8\mu \int_0^a \frac{t^2\varphi(t)\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \tag{4.5}$$

5. В случае сцепления $\varphi(r) = \alpha r$. Предыдущие формулы дают

$$C = -\frac{4\alpha}{\pi} a, \qquad g(s) = -\frac{4\alpha}{\pi}[a\delta(a - s) - 1] \tag{5.1}$$

$$\tau_{z\theta}|_{z=0} = -\frac{4\alpha}{\pi}\mu \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{5.2}$$

$$M = -\frac{16}{3}\alpha\mu a^3 \tag{5.3}$$

Следовательно,

$$\tau_{z\theta}|_{z=0} = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{a^3}\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{5.4}$$

Вычисляя $v(r, z)$ по формуле (3.5), находим

$$v(r, z) = \frac{2\alpha}{\pi r} \operatorname{Im}\{(z - ia)\sqrt{r^2 + (z+ia)^2} + r^2 \ln[z + ia + \sqrt{r^2 + (z+ia)^2}]\} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\alpha}{r}\{z\sqrt{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}-(r^2+z^2-a^2)} -$$
$$- a\sqrt{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}+(r^2+z^2-a^2)} +$$
$$+ \sqrt{2}\, r^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}+(r^2+z^2-a^2)}}\Bigg\} \tag{5.5}$$

Отсюда

$$v|_{z=0} = \frac{2}{\pi}\alpha a\left(\frac{\arcsin\eta}{\eta} - \sqrt{1-\eta^2}\right), \qquad \eta = \frac{a}{r} \qquad (r > a) \tag{5.6}$$

Этот результат можно получить непосредственно из второй формулы (3.3). Для напряжений при помощи (1.2) и (5.3) находим

$$\tau_{z\theta} = -\frac{3}{8\pi}\frac{M}{a^3 r}\operatorname{Im}\left[\sqrt{r^2+(z+ia)^2} + \frac{r^2+z^2+a^2}{\sqrt{r^2+(z+ia)^2}}\right] = \tag{5.7}$$
$$= \frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\frac{M}{a^3 r}\left[\frac{r^2+z^2+a^2}{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}} - 1\right]\times$$
$$\times\sqrt{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}-(r^2+z^2-a^2)}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{a^3}\operatorname{Im}\left[\frac{ia}{\sqrt{r^2+(z-ia)^2}} + \frac{z-ia}{r^2}\sqrt{r^2+(z+ia)^2}\right] = \tag{5.8}$$
$$= \frac{3}{4\pi\sqrt{2}}\frac{M}{a^3}\left\{\frac{a\sqrt{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}+(r^2+z^2-a^2)}}{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}} +\right.$$
$$+\frac{1}{r^2}\left[z\sqrt{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}-(r^2+z^2-a^2)} -\right.$$
$$\left.\left.- a\sqrt{\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}+(r^2+z^2-a^2)}\right]\right\}$$

Заметим, что

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (r < a); \qquad \tau_{r\theta} = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{a^3}\frac{\eta^3}{\sqrt{1-\eta^2}}, \qquad \eta = \frac{a}{r} \quad (r > a) \tag{5.9}$$

Обращение $\tau_{r\theta}$ в бесконечность при $r = a + 0$ обязано слагаемому $C\delta(a-s)$ в $g(s)$. Вместе с тем легко убедиться, что это слагаемое не влечет разрыва в $v(r, 0) = \varphi(r)$.

6. В случае трения имеют место граничные условия (1.3). Тогда из (3.4) получаем для $g(s)$ уравнение Абеля

$$\int_r^a \frac{s g(s)\, ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = -\frac{r}{\mu} F(r)\, p(r) \tag{6.1}$$

Для выполнения условия (3.2) необходимо, чтобы $rF(r)$ обращалось в нуль при $r = 0$. Будем считать это требование выполненным. Уравнение (6.1) определяет решение с точностью до слагаемого $C\delta(s-0)$. Но из (3.1) видно, что это влечет появление свободного члена C в выражении $v(r, z)$. Поэтому $C = 0$, и это слагаемое отбрасывается.

Легко видеть, что функция $g(s)$ обладает особенностью при $s = a$, если $F(a)\, p(a) \neq 0$. Предполагая, что $F(a) \neq 0$, особенность имеет при

$p(a) \neq 0$. Важнейшие случаи, когда это происходит, связаны с наличием членов $A/\sqrt{a^2-r^2}$ и B в выражении $p(r)$.

Выделив явно особенности, отвечающие этим членам, мы получим уравнение для регулярной части $g(s)$. Покажем, как это делается, приняв закон Амонтона $F(r) = f = \text{const}$. Положим

$$p(r) = \frac{A}{\sqrt{a^2-r^2}} + B + p^*(r) \tag{6.2}$$

$$g(s) = -\frac{f}{\mu} A\delta(a-s) - \frac{2}{\pi}\frac{f}{\mu} B \frac{a}{\sqrt{a^2-s^2}} + g^*(s) \tag{6.3}$$

Звездочками здесь отмечены регулярные члены. Внося эти выражения в (6.1), получим после упрощений уравнение для $g^*(s)$:

$$\int_r^a \frac{sg^*(s)\,ds}{\sqrt{s^2-r^2}} = \frac{f}{\mu} A \frac{a-r}{\sqrt{a^2-r^2}} + \frac{f}{\mu} B(a-r) - \frac{f}{\mu} r p^*(r) \tag{6.4}$$

Теперь правая часть обращается в нуль при $r = a$ и $g^*(s)$ не имеет особенности при $s = a$. Полагая здесь $r = 0$, имеем

$$\int_0^a g^*(s)\,ds = \frac{f}{\mu} A + \frac{f}{\mu} Ba \tag{6.5}$$

Отсюда и из (6.3) следует, что условие (3.2) выполняется.

Решая теперь уравнение (6.4) обычными приемами, получаем

$$g(s) = \frac{f}{\mu}\frac{A}{a}\left[D\left(\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}} - a\delta(a-s)\right)\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{f}{\mu} B\left(\operatorname{arg\,ch}\frac{a}{s} - \frac{a}{\sqrt{a^2-s^2}}\right) + \frac{2}{\pi}\frac{f}{\mu}\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\int_s^a \frac{p^*(t)\,t^2\,dt}{\sqrt{t^2-s^2}} \tag{6.6}$$

Здесь D — символ полного эллиптического интеграла $D(k) = [K(k) - E(k)]/k$. Легко проверить, что (6.6) удовлетворяет (6.1) и (3.2).

7. **Вид** формулы (6.6) позволяет заключить, что в практически интересных случаях профиля штампа функция $g(s)$ выражается через полные эллиптические интегралы модуля $k^2 = 1 - s^2/a^2$. Используя разложения этих интегралов по степеням дополнительного модуля $k' = s/a$, можно вычислить квадратуры, выражающие смещение $v(r, z)$ и напряжения. Проще всего это делается при $z = 0$ и $r < a$. Рассмотрим в качестве примера штамп прямоугольного профиля. В этом случае

$$p^*(r) = 0, \quad B = 0, \quad A = \frac{P}{2\pi a} \tag{7.1}$$

Следовательно,

$$g(s) = \frac{fP}{2\pi a^2\mu}\left[D\left(\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}}\right) - a\delta(a-s)\right] \tag{7.2}$$

$$rv\big|_{z=0} = r\varphi(r) = \frac{fP}{2\pi a^2\mu}\int_0^r D\left(\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}}\right)\sqrt{r^2-s^2}\,ds \qquad (r < a) \tag{7.3}$$

Для D имеем разложение (7.4)

$$D\left(\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 (2n+1)\left[\log\frac{4a}{s} + 2\sum_{m=1}^{2n}\frac{(-1)^m}{m} - \frac{1}{2n+1}\right]\left(\frac{s}{a}\right)^{2n}$$

Почленным интегрированием находим

$$\frac{v}{r}\bigg|_{z=0} = \frac{\varphi(r)}{r} = \frac{fP}{8a^2\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\times \tag{7.5}$$

$$\times\left[\log\frac{8a}{r}+3\sum_{m=1}^{2n}\frac{(-1)^m}{m}-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}=\frac{fP}{8a^2\mu}\left[\log\frac{8a}{r}-\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{16}\left(\log\frac{8a}{r}-\frac{19}{12}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{45}{512}\left(\log\frac{8a}{r}-\frac{107}{60}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^4+\frac{875}{16.384}\left(\log\frac{8a}{r}-\frac{523}{280}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^6+\cdots\right]$$

Отсюда и из (1.2) следует

$$\tau_{r\theta} = -\frac{fP}{8a^2}+\frac{fP}{8a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3\frac{2n(2n+1)}{n+1}\times$$

$$\times\left[\log\frac{8a}{r}+3\sum_{m=1}^{2n}\frac{(-1)^m}{m}-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{2n}\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \tag{7.6}$$

8. Эти результаты на первый взгляд кажутся парадоксальными. Следует заметить, что логарифмическая особенность в угловом смещении появляется, как показывают вычисления, и в случае регулярных $p(r)$, например в случае упругого контакта Герца, когда $p(r) = C\sqrt{a^2-r^2}$. Эта особенность обусловлена формой закона трения $F(r) = f = \text{const}$.

Но по нашему мнению, это свидетельствует лишь о том, что краевые условия (1.3) утрачивают смысл вблизи оси верчения. В этой зоне упругие смещения становятся сравнимыми по величине с микроскопическими неровностями трущихся поверхностей, и поведение материала поэтому определяется местными деформациями. Зона эта невелика, ее радиус ρ вряд ли превышает в десятки раз средний размер микроскопических неровностей и поэтому весьма мал по сравнению с радиусом зоны контакта. Если нужно сохранить макроскопическое рассмотрение на всем интервале r от 0 до a, то в условиях (1.3) следует при $r < \rho$ взять $F(r)$ в виде, отличном от закона Амонтона, так, чтобы $F(0) = 0$. Можно, например, положить $F(r) = kr$. Тогда выражение углового смещения $r^{-1}\varphi(r)$ не будет иметь особенности при $r = 0$.

Вместе с тем, если ρ мало по сравнению с a, то решение, выраженное формулой (7.5), испытает пренебрежимо малое изменение и формула (7.5) может рассматриваться как приближенно справедливая при $r > \rho$.

В заключение приведем формулу для смещения на краю зоны контакта

$$\frac{\varphi(a)}{a} = C\frac{fP}{8a^2\mu} \tag{8.1}$$

где числовой коэффициент C имеет значение

$$C = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/2\pi} D(\sin\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi \approx 1.731 \tag{8.2}$$

Поступила 30 I 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактная задача теории упругости. ГТТИ, М., 1953.
2. Ростовцев Н. А. Комплексные функции напряжений в осесимметричной контактной задаче теории упругости. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.