Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В. В. Соколовский
(Москва)

Настоящая работа посвящена формулировке основных зависимостей между компонентами напряжения и скорости деформации при условии пластичности общего вида, без допущения о несжимаемости материала. Проведено подробное исследование уравнений плоского пластического равновесия и показаны различные пути их преобразования. Дан сравнительно простой прием решения этих уравнений в форме тригонометрических рядов. Рассмотрены некоторые виды условия пластичности, при которых уравнения плоского пластического равновесия имеют наиболее простые коэффициенты.

§ 1. Основные уравнения. Рассмотрим пространственную задачу и будем проводить все рассуждения по отношению к системе координат xyz. Напряжения определяются компонентами σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy}, а скорости деформации — компонентами ε_x, ε_y, ε_z, γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy}, связанными с компонентами скорости u, v, w соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad 2\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad 2\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad 2\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Главные оси напряжения и главные оси скорости деформации обозначим через *1*, *2*, *3*, а главные нормальные напряжения и главные скорости деформации через σ_1, σ_2, σ_3 и ε_1, ε_2, ε_3.

Среднее напряжение σ и скорость средней деформации ε имеют вид

$$3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \qquad 3\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

а интенсивности напряжений τ и скоростей деформаций γ даются так:

$$\tau^2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2\right] + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2$$
$$\gamma^2 = \frac{1}{6}\left[(\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2\right] + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2$$

В основу теории, следуя Р. Мизесу [1], положим общее условие пластичности

$$\Phi(\sigma, \tau) = 0 \qquad \text{или} \qquad \tau = \tau(\sigma) \tag{1.1}$$

а также понятие о потенциале текучести. Применяя в качестве такого потенциала функцию Φ, получим известные зависимости:

$$\frac{\varepsilon_x}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\sigma_x}} = \frac{\varepsilon_y}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\sigma_y}} = \frac{\varepsilon_z}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\sigma_z}} = \frac{2\gamma_{yz}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau_{yz}}} = \frac{2\gamma_{zx}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau_{zx}}} = \frac{2\gamma_{xy}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau_{xy}}} \tag{1.2}$$

которые недавно рассматривали Д. Друкер и В. Прагер [2].

Производные $\partial\Phi / \partial\sigma_x, \ldots, \partial\Phi / \partial\tau_{xy}$ могут быть выражены в форме

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_x} = \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} + \frac{\sigma_x - \sigma}{2\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$$

Поэтому зависимости (1.2) дают такие уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \frac{\gamma}{\tau}(\sigma_x - \sigma), & \gamma_{yz} &= \frac{\gamma}{\tau}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y - \varepsilon &= \frac{\gamma}{\tau}(\sigma_y - \sigma), & \gamma_{zx} &= \frac{\gamma}{\tau}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z - \varepsilon &= \frac{\gamma}{\tau}(\sigma_z - \sigma), & \gamma_{xy} &= \frac{\gamma}{\tau}\tau_{xy} \end{aligned} \tag{1.3}$$

а для скорости средней деформации — уравнение

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\gamma\frac{\partial\Phi / \partial\sigma}{\partial\Phi / \partial\tau} = \gamma\chi \tag{1.4}$$

причем χ — известная функция от σ и τ. Так как обычно

$$\frac{\partial\Phi / \partial\sigma}{\partial\Phi / \partial\tau} = -\frac{d\tau}{d\sigma} \geqslant 0$$

то скорость средней деформации $\varepsilon \geqslant 0$. Заметим, что в частном случае, когда условие (1.1) имеет вид $\tau = k$, уравнение (1.4) дает $\varepsilon = 0$.

Остановимся теперь подробнее на плоской задаче и будем проводить все рассуждения по отношению к системе координат xy. Напряжения определяются компонентами σ_x, σ_y, τ_{xy} и σ_z, а скорости деформации компонентами $\varepsilon_x, \varepsilon_y$, γ_{xy} и ε_z. Главные оси *1* и *2* лежат на плоскости xy, а главная ось *3* параллельна оси z.

Наряду с величинами σ и τ удобно пользоваться величинами s и t, определенными так $(\sigma_1 \geqslant \sigma_2)$:

$$s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \qquad t = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$

а наряду с величинами ε и γ можно применять величины e и g, данные следующим образом $(\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2)$:

$$e = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \qquad g = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

На основании уравнений (1.3) легко установить равенство:

$$\frac{g}{t} = \frac{\gamma}{\tau}$$

При плоском деформированном состоянии, полагая $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, получим скорость средней деформации и интенсивность скоростей деформации в виде

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{2}{3}e, \qquad \gamma^2 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2) + \gamma_{xy}^2 = g^2 + \frac{1}{3}e^2$$

Отсюда, а также из уравнений (1.3) и (1.4) следуют соотношения

$$\tau^2 - t^2 = 3(\sigma - s)^2, \qquad s = \sigma + \frac{1}{2}\chi\tau, \qquad t^2 = \tau^2\left(1 - \frac{3}{4}\chi^2\right)$$

которые на основании (1.1) позволяют написать

$$\Phi(\sigma, \tau) = F(s, t) = 0$$

Можно указать также на дифференциальные соотношения

$$\frac{d\tau^2}{d\sigma} = \frac{dt^2}{ds}, \qquad \frac{d\gamma^2}{d\varepsilon} = e + \frac{3}{2}\frac{dg^2}{de}$$

следующие из приведенных выражений.

При плоском напряженном состоянии, считая $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, найдем среднее напряжение и интенсивность касательных напряжений:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2}{3}s, \quad \tau^2 = \frac{1}{3}(\sigma_x{}^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y{}^2) + \tau_{xy}{}^2 = t^2 + \frac{1}{3}s^2$$

Отсюда, а также из уравнений (1.3) и (1.4) вытекают соотношения

$$\gamma^2 - g^2 = 3(\varepsilon - e)^2, \qquad \sigma = \frac{2}{3}s, \qquad \tau^2 = t^2 + \frac{1}{3}s^2$$

которые, вследствие (1.1), дают

$$\Phi(\sigma, \tau) = F(s, t) = 0$$

Нужно указать также на дифференциальные соотношения:

$$\frac{d\gamma^2}{d\varepsilon} = \frac{dg^2}{de}, \qquad \frac{d\tau^2}{d\sigma} = s + \frac{3}{2}\frac{dt^2}{ds}$$

вытекающие из предыдущих выражений.

Таким образом, как при плоском деформированном, так и при плоском напряженном состояниях общее условие пластичности (1.1) принимает вид:

$$F(s, t) = 0 \quad \text{или} \quad t = t(s) \tag{1.5}$$

а зависимости (1.2) будут

$$\frac{\varepsilon_x}{\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_x}} = \frac{\varepsilon_y}{\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_y}} = \frac{\varepsilon_z}{\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_z}} = \frac{2\gamma_{xy}}{\dfrac{\partial F}{\partial\tau_{xy}}} \tag{1.6}$$

Производные $\partial F / \partial\sigma_x, \ldots, \partial F / \partial\tau_{xy}$ могут быть выражены в форме

$$2\frac{\partial F}{\partial\sigma_x} = \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\sigma_x - s}{t}\frac{\partial F}{\partial t}, \ \ldots, \ \frac{\partial F}{\partial\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{t}\frac{\partial F}{\partial t}$$

Поэтому зависимости (1.6) дают уравнения

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x - e = \frac{g}{t}(\sigma_x - s), \\ &\varepsilon_y - e = \frac{g}{t}(\sigma_y - s), \qquad \gamma_{xy} = \frac{g}{t}\tau_{xy} \\ &\varepsilon_z - e = \frac{g}{t}(\sigma_z - s), \end{aligned} \tag{1.7}$$

а также уравнение

$$e = g\frac{\partial F / \partial s}{\partial F / \partial t} = gh \tag{1.8}$$

причем h — известная функция от s и t. Ясно, что

$$h = \frac{e}{g} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

а, следовательно,

$$|h| \leqslant 1 \quad \text{при } \varepsilon_1\varepsilon_2 \leqslant 0, \qquad |h| \geqslant 1 \quad \text{при } \varepsilon_1\varepsilon_2 \geqslant 0.$$

Заметим что уравнения (1.7) могут быть легко получены и непосредственно из уравнений (1.3).

Известные формулы преобразования

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\varphi, \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\varphi$$

в которых φ — угол между осью x и направлением главного нормального напряжения σ_1, приводят для компонент напряжения к выражениям:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = s \pm t\cos 2\varphi, \qquad \tau_{xy} = t\sin 2\varphi \tag{1.9}$$

а для компонент скорости деформации к таким выражениям:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{matrix}\right\} = e \pm g\cos 2\varphi, \qquad \gamma_{xy} = g\sin 2\varphi \tag{1.10}$$

§ 2. Исследование уравнений плоского равновесия гиперболического типа. Займемся теперь исследованием основных уравнений пластического плоского равновесия, следуя обычным путем.

Внося в дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0$$

выражения (1.9), получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial s}{\partial x} + \cos 2\varphi\frac{\partial t}{\partial x} + \sin 2\varphi\frac{\partial t}{\partial y} - 2t\left(\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0\\ &\frac{\partial s}{\partial y} + \sin 2\varphi\frac{\partial t}{\partial x} - \cos 2\varphi\frac{\partial t}{\partial y} + 2t\left(\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0\end{aligned} \tag{2.1}$$

а подставляя в уравнения (1.10) выражения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad 2\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

будем иметь

$$\begin{aligned}&2\sin 2\varphi\frac{\partial u}{\partial x} - (h + \cos 2\varphi)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\\ &2\sin 2\varphi\frac{\partial v}{\partial y} - (h - \cos 2\varphi)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\end{aligned} \tag{2.2}$$

Дифференциальные уравнения характеристик приведенных систем уравнений (2.1) и (2.2) имеют вид: (2.3)

$$d\varphi \pm \frac{\sqrt{1-h^2}}{2h}d\ln t = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\varphi \mp \sqrt{1-h^2}}{\cos 2\varphi - h}, \qquad \frac{dv}{du} = \frac{\sin 2\varphi \pm \sqrt{1-h^2}}{\cos 2\varphi + h}$$

Отсюда ясно, что основная система уравнений принадлежит к *гиперболическому* или *эллиптическому* типам в зависимости от того, будет ли $|h| < 1$ или $|h| > 1$.

Проведем преобразование и исследование уравнений характеристик, когда $|h|<1$, т. е. когда основная система уравнений является гиперболической. Введем новую переменную ψ следующим образом:

$$\frac{dt}{ds}=-h=\cos 2\psi$$

и новую функцию λ при помощи уравнений

$$2\,d\lambda=\sqrt{1-h^2}\,\frac{ds}{t}=\sin 2\psi\,\frac{ds}{t}=\operatorname{tg}2\psi\,d\ln t \tag{2.4}$$

При плоском деформированном состоянии, в частном случае $\tau=k$, очевидно, что

$$t=k,\quad h=0,\quad \psi=\tfrac{1}{4}\pi$$

а потому λ, с точностью до произвольной постоянной, имеет вид:

$$\lambda=\frac{s}{2k}$$

При плоском напряженном состоянии, в том же случае $\tau=k$, имеют место соотношения

$$\frac{s^2}{3}+t^2=k^2,\qquad h=\frac{s}{3t}=-\cos 2\psi$$

из которых следует, что

$$s=\frac{3kh}{\sqrt{1+3h^2}}=\frac{-3k\cos 2\psi}{\sqrt{1+3\cos^2 2\psi}},\qquad t=\frac{k}{\sqrt{1+3h^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+3\cos^2 2\psi}}$$

а потому λ, с точностью до произвольной постоянной, напишется так

$$\lambda=-\operatorname{arc\,tg}\left[\left(\frac{1-h}{1+h}\right)^{3/2}\right]=-\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}^3\psi)$$

Под arc tg здесь и в дальнейшем подразумевается его главное значение, лежащее между $-{}^1/_2\pi$ и $+{}^1/_2\pi$.

Характеристики систем уравнений (2.1) и (2.2) образуют два семейства и определяются уравнениями

$$\eta=\lambda(\psi)-\varphi=\text{const},\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(\varphi-\psi),\quad \frac{du}{dv}=-\operatorname{tg}(\varphi-\psi) \tag{2.5}$$

$$\xi=\lambda(\psi)+\varphi=\text{const},\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(\varphi+\psi),\quad \frac{du}{dv}=-\operatorname{tg}(\varphi+\psi) \tag{2.6}$$

Ясно, что характеристики наклонены к оси x под углами $\varphi\mp\psi$; углы 2ψ между характеристиками на плоскости xy будут, вообще говоря, в различных точках различны. Так как для каждого семейства

$$\frac{dy}{dx}\frac{dv}{du}=-1$$

то характеристики на плоскости координат xy ортогональны соответствующим характеристикам на плоскости скоростей uv.

Займемся преобразованием уравнений характеристик, используя новые переменные, позволяющие получить соответствующие результаты в более удобной форме.

Введем вместо координат x и y координаты

$$\bar{x}=\frac{1}{\sin 2\psi}\left[x\sin(\varphi+\psi)-y\cos(\varphi+\psi)\right],$$
$$\bar{y}=\frac{1}{\sin 2\psi}\left[y\cos(\varphi-\psi)-x\sin(\varphi-\psi)\right]$$

а вместо компонент скорости u и v компоненты

$$\bar{u}=\frac{1}{\sin 2\psi}\left[u\cos(\varphi-\psi)+v\sin(\varphi-\psi)\right],$$
$$\bar{v}=\frac{1}{\sin 2\psi}\left[u\cos(\varphi+\psi)+v\sin(\varphi+\psi)\right]$$

Примем также новые переменные X, Y и U, V, определенные так:

$$X/\bar{x}=Y/\bar{y}=\sqrt{(t/k)\sin 2\psi},\qquad U/\bar{u}=V/\bar{v}=\sqrt{(t/k)\sin 2\psi}$$

причем k—произвольная, но наперед выбранная постоянная величина, имеющая размерность напряжений.

Уравнения характеристик (2.5) и (2.6) после указанной замены переменных и введения функции

$$P(\lambda)=\frac{1-d\psi/d\lambda}{\sin 2\psi}$$

могут быть преобразованы к такому виду:

$$\eta=\lambda(\psi)-\varphi=\text{const},\quad dY+XP\,d\lambda=0,\quad dU=VPd\lambda \tag{2.7}$$
$$\xi=\lambda(\psi)+\varphi=\text{const},\quad dX+YP\,d\lambda=0,\quad dV=UP\,d\lambda \tag{2.8}$$

Отсюда нетрудно получить так называемые канонические системы уравнений для координат

$$\frac{\partial Y}{\partial\xi}+\frac{P}{2}X=0,\qquad \frac{\partial X}{\partial\eta}+\frac{P}{2}Y=0 \tag{2.9}$$

и для скоростей

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}=\frac{P}{2}V,\qquad \frac{\partial V}{\partial\eta}=\frac{P}{2}U \tag{2.10}$$

Существуют также частные решения, отвечающие постоянным ξ и η, которые можно назвать интегралами уравнений пластичности.

Если $\xi\neq\text{const}$, $\eta=\eta_0=\text{const}$, то $\eta=\lambda-\varphi=\eta_0$, а следовательно, вдоль семейства характеристик (2.8) λ и φ постоянны. Таким образом, уравнения (2.8) дают

$$dX=0,\qquad dV=0$$

Отсюда ясно, что X и V являются произвольными функциями от ξ:

$$\lambda-\varphi=\eta_0,\qquad X=X(\xi),\qquad V=V(\xi) \tag{2.11}$$

а семейство характеристик (2.8) состоит из прямых $\xi=\text{const}$.

Семейство характеристик (2.7) на плоскости xy и величина U находятся путем интеграции уравнений

$$\frac{\partial Y}{\partial\xi}+\frac{P}{2}X=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial\xi}=\frac{P}{2}V$$

Если же $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$, $\eta \neq \mathrm{const}$, то $\xi = \lambda + \varphi = \xi_0$, а потому вдоль семейства характеристик (2.7) λ и φ постоянны. Следовательно, уравнения (2.7) дают

$$dY = 0, \qquad dU = 0$$

Поэтому Y и U суть произвольные функции от η:

$$\lambda + \varphi = \xi_0, \qquad Y = Y(\eta), \qquad U = U(\eta) \tag{2.12}$$

а семейство характеристик (2.7) на плоскости xy состоит из прямых $\eta = \mathrm{const}$. Семейство характеристик (2.8) и величина V находятся путем интеграции уравнений

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{P}{2} Y = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{P}{2} U$$

Если, наконец, $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$, $\eta = \eta_0 = \mathrm{const}$, то $\psi = \psi_0$ и $\varphi = \varphi_0$ суть тождественные постоянные. Семейства характеристик (2.7) и (2.8) образуют на плоскости xy две системы параллельных прямых

$$Y = \mathrm{const}, \qquad X = \mathrm{const}$$

а величины U и V суть произвольные функции от Y и X:

$$U = U(Y), \qquad V = V(X)$$

При плоском деформированном состоянии в частном случае $\tau = k$ величины

$$t = k, \quad \psi = \tfrac{1}{4}\pi, \quad P = 1$$

а предыдущие уравнения значительно упрощаются.

Отметим, что при замене компонент скорости u и v на координаты y и $-x$, а также компонент U и V на координаты Y и $-X$ все уравнения в компонентах скорости переходят в соответствующие уравнения в координатах.

§ 3. Преобразование уравнений гиперболического и эллиптического типов. Остановимся еще на другом приеме преобразования уравнений характеристик, который применим, когда $|h| < 1$ и $|h| > 1$, т. е. когда основная система является гиперболической и эллиптической. Этот прием в частном случае $\tau = k$ уже был использован нами ранее [3].

Введем вместо координат x и y координаты

$$\bar{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad \bar{y} = y\cos\varphi - x\sin\varphi$$

а вместо компонент u и v компоненты

$$\bar{u} = u\cos\varphi + v\sin\varphi, \qquad \bar{v} = v\cos\varphi - u\sin\varphi$$

Примем также новые переменные X, Y и U, V определенные так:

$$X/\bar{x} = V/\bar{v} = \sqrt{\frac{t}{k}}\exp\left(-\int\frac{d\ln t}{2h}\right), \qquad Y/\bar{y} = U/\bar{u} = \sqrt{\frac{t}{k}}\exp\left(\int\frac{d\ln t}{2h}\right)$$

причем k — произвольная постоянная величина, имеющая размерность напряжений.

Дифференциальные уравнения характеристик (2.3) после указанной замены переменных принимают вид:

$$d\varphi \pm \frac{\sqrt{1-h^2}}{2h} d\ln t = 0, \qquad dX \pm \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \exp\left(-\int \frac{d\ln t}{h}\right) dY = 0$$

$$dV \mp \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \exp\left(-\int \frac{d\ln t}{h}\right) dU = 0$$

Сначала проведем преобразование уравнений характеристик, когда $|h| < 1$, а dY/dX, dV/dU и $d\varphi/dt$ — действительные величины. Введем с этой целью функции L и λ следующим образом:

$$L = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \exp\left(-\int \frac{d\ln t}{h}\right), \qquad d\lambda = -\frac{\sqrt{1-h^2}}{2h} d\ln t$$

Они дают возможность переписать уравнения характеристик в следующем виде:

$$\eta = \lambda - \varphi = \text{const}, \quad dX + L\,dY = 0, \quad dV - LdU = 0 \tag{3.1}$$

$$\xi = \lambda + \varphi = \text{const}, \quad dX - L\,dY = 0, \quad dV + LdU = 0 \tag{3.2}$$

Отсюда уже нетрудно получить каноническую систему уравнений для координат:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = -L\frac{\partial Y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial X}{\partial \eta} = L\frac{\partial Y}{\partial \eta} \tag{3.3}$$

и для скоростей

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = L\frac{\partial U}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} = -L\frac{\partial U}{\partial \eta} \tag{3.4}$$

Переходя в этих уравнениях от переменных ξ и η к прежним переменным λ и φ, найдем следующую систему уравнений для координат:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -L\frac{\partial Y}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial X}{\partial \lambda} = -L\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \tag{3.5}$$

и для скоростей

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = L\frac{\partial U}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = L\frac{\partial U}{\partial \varphi} \tag{3.6}$$

Легко также получить частные решения, соответствующие постоянным ξ и η, которые уже были найдены выше в иной форме.

При плоском деформированном состоянии в частном случае $\tau = k$ очевидно, что $t = k$, $h = 0$, а потому функции L и λ будут

$$L = \exp(2\lambda), \qquad \lambda = \frac{s}{2k}$$

причем последняя определена лишь с точностью до постоянной.

При плоском напряженном состоянии в случае $\tau = k$ ясно, что

$$\frac{s^2}{3} + t^2 = k^2, \qquad h = \frac{s}{3t}$$

откуда следуют соотношения

$$s = \frac{3kh}{\sqrt{1+3h^2}}, \qquad t = \frac{k}{\sqrt{1+3h^2}}$$

Функции L и λ имеют вид:

$$L=\sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\exp\left[\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}h)\right], \qquad \lambda=-\operatorname{arc\,tg}\left[\left(\frac{1-h}{1+h}\right)^{3/2}\right]$$

причем последняя найдена лишь с точностью до постоянной. Исключая h, получим

$$L=(\operatorname{tg}|\lambda|)^{1/3}\exp\left[\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\,\frac{1-(\operatorname{tg}\lambda)^{2/3}}{1+(\operatorname{tg}\lambda)^{2/3}}\right)\right]$$

Под arc tg, как и выше, подразумевается его главное значение, лежащее между $-{}^1/_2\pi$ и $+{}^1/_2\pi$.

Вернемся теперь опять к уравнениям для координат (3.5) или для скоростей (3.6) и покажем иной путь их преобразования. Ограничимся в целях определенности уравнениями для координат, так как уравнения для скоростей аналогичны.

Введем новые переменные

$$A=\frac{X}{\sqrt{L}}=\bar{x}\sqrt{\frac{t}{k}}\left(\frac{1+h}{1-h}\right)^{1/4}, \qquad B=Y\sqrt{L}=\bar{y}\sqrt{\frac{t}{k}}\left(\frac{1-h}{1+h}\right)^{1/4}$$

которые позволяют представить уравнения (3.5) в следующей форме:

$$\frac{\partial A}{\partial\lambda}+\frac{\partial B}{\partial\varphi}=-PA, \qquad \frac{\partial B}{\partial\lambda}+\frac{\partial A}{\partial\varphi}=PB \tag{3.7}$$

причем коэффициент P выражается так:

$$P=\frac{1}{2}\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+h^2}}\frac{dh}{d\lambda}\right)$$

Системы уравнений первого порядка (3.7) могут быть сведены к одному уравнению второго порядка. Исключая B или A, получим

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}=Aa, \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial\varphi^2}=Bb \tag{3.8}$$

причем коэффициенты a и b определяются таким образом:

$$a=P^2-\frac{dP}{d\lambda}, \qquad b=P^2+\frac{dP}{d\lambda}$$

Теперь проведем преобразование уравнений характеристик, когда $|h|>1$, а dY/dX, dV/dU и $d\varphi/dt$ — мнимые величины.

Примем для этого функции M и μ таким образом:

$$M=\sqrt{\frac{h-1}{h+1}}\exp\left(-\int\frac{d\ln t}{h}\right), \qquad d\mu=-\frac{\sqrt{h^2-1}}{2h}d\ln t$$

Они позволяют переписать уравнения характеристик в следующем виде:

$$\eta=i\mu-\varphi=\text{const}, \qquad dX+iMdY=0, \qquad dV-iMdU=0 \tag{3.9}$$

$$\xi=i\mu+\varphi=\text{const}, \qquad dX-iMdY=0, \qquad dV+iMdU=0 \tag{3.10}$$

Отсюда легко найти каноническую систему уравнений для координат:

$$\frac{\partial X}{\partial\xi}+iM\frac{\partial Y}{\partial\xi}=0, \qquad \frac{\partial X}{\partial\eta}-iM\frac{\partial Y}{\partial\eta}=0 \tag{3.11}$$

и для скоростей

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - iM\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} + iM\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \tag{3.12}$$

Переходя в этих уравнениях от переменных ξ и η к переменным μ и φ по таким формулам:

$$+2\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \varphi} - i\frac{\partial X}{\partial \mu}\,, \qquad -2\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{\partial X}{\partial \varphi} + i\frac{\partial X}{\partial \mu}\,, \ldots$$

и затем разделяя действительную и мнимую части, получим каноническую систему уравнений для координат:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -M\frac{\partial Y}{\partial \mu}\,, \qquad \frac{\partial X}{\partial \mu} = M\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \tag{3.13}$$

и для скоростей

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = M\frac{\partial U}{\partial \mu}\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial \mu} = -M\frac{\partial U}{\partial \varphi} \tag{3.14}$$

При плоском напряженном состоянии в частном случае $\tau = k$ имеют место прежние соотношения:

$$s = \frac{3kh}{\sqrt{1+3h^2}}\,, \qquad t = \frac{k}{\sqrt{1+3h^2}}$$

Функции M и μ имеют вид $(\varkappa = \operatorname{sign} h)$:

$$M = \sqrt{\frac{h-1}{h+1}}\exp\left[\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}\,h)\right]\,, \qquad \mu = \varkappa \operatorname{ar\,th}\left[\left(\frac{|h|-1}{|h|+1}\right)^{3/2}\right]$$

причем последняя найдена лишь с точностью до постоянной. Исключая h, будем иметь

$$M^{\varkappa} = \left(\operatorname{th}|\mu|\right)^{1/3}\exp\left[\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\,\frac{1+(\operatorname{th}\mu)^{2/3}}{1-(\operatorname{th}\mu)^{2/3}}\right)\right]$$

Под arc tg, как обычно, подразумевается его главное значение, лежащее между $-{}^1/_2\pi$ и $+{}^1/_2\pi$.

Обратимся теперь опять к уравнениям для координат (3.13) или для скоростей (3.14) и покажем другой путь их преобразования. Ограничимся, например, уравнениями для координат. Примем новые переменные

$$A = \frac{X}{\sqrt{M}} = \bar{x}\sqrt{\frac{t}{k}}\left(\frac{h+1}{h-1}\right)^{1/4}, \qquad B = Y\sqrt{M} = \bar{y}\sqrt{\frac{t}{k}}\left(\frac{h-1}{h+1}\right)^{1/4}$$

которые позволяют представить уравнение (3.13) в такой форме:

$$\frac{\partial A}{\partial \mu} + \frac{\partial B}{\partial \varphi} = -QA, \qquad \frac{\partial B}{\partial \mu} - \frac{\partial A}{\partial \varphi} = QB \tag{3.15}$$

причем коэффициент Q дается так:

$$Q = \frac{1}{2}\frac{d\ln M}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{h^2-1}}\frac{dh}{d\mu}\right)$$

Система уравнений первого порядка (3.15) может быть приведена к одному уравнению второго порядка.

Исключая B или A, будем иметь

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} = Aa\,, \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \varphi^2} = Bb \tag{3.16}$$

причем коэффициенты a и b таковы:

$$a = Q^2 - \frac{dQ}{d\mu}\,, \qquad b = Q^2 + \frac{dQ}{d\mu}$$

Предыдущее исследование может быть проведено также в иной форме путем применения различных подстановок.

Удобно, например, ввести [3] функцию ω на основании равенства

$$h = \frac{\operatorname{ctg}\omega}{\sqrt{3}}$$

имея в виду, что интервалы $^1/_6\pi < \omega < {}^5/_6\pi$ соответствуют $|h| < 1$, а интервалы $0 \leqslant \omega < {}^1/_6\pi$ и $^5/_6\pi < \omega \leqslant \pi$ отвечают $|h| > 1$.

Можно также применять функцию ψ при помощи равенств $h = -\cos 2\psi$ или $h = \mp \operatorname{ch} 2\psi$ в зависимости от того, будет ли $|h| < 1$ или $|h| > 1$.

Эти функции дают возможность преобразовать коэффициенты соответствующих уравнений к простому виду.

§ 4. Решение уравнений в форме тригонометрических рядов. Изложим теперь метод интегрирования рассмотренных выше уравнений, который основан на применении тригонометрических рядов, аналогичных рядам С. А. Чаплыгина в теории плоского течения газа. Все рассуждения проведены применительно к уравнениям для координат, так как уравнения для скоростей совершенно аналогичны.

Сначала остановимся на уравнениях гиперболического типа (3.7) и (3.8), соответствующих $|h| < 1$, и будем искать частные решения этих уравнений для различных целых значений n в виде функций

$$A = A_n(\lambda)\cos(n\varphi + \gamma_n)\,, \qquad B = B_n(\lambda)\sin(n\varphi + \gamma_n) \tag{4.1}$$

в которых γ_n суть постоянные величины, а коэффициенты A_n и B_n зависят только от λ. Внося функции (4.1) в уравнения (3.7), получим

$$\frac{dA_n}{d\lambda} + PA_n = -nB_n\,, \qquad \frac{dB_n}{d\lambda} - PB_n = nA_n \tag{4.2}$$

а подставляя те же функции в уравнения (3.8), будем иметь

$$\frac{d^2A_n}{d\lambda^2} = A_n(a - n^2)\,, \qquad \frac{d^2B_n}{d\lambda^2} = B_n(b - n^2) \tag{4.3}$$

Теперь нетрудно построить решение с периодом 2π в форме тригонометрических рядов:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda)\cos(n\varphi + \gamma_n)\,, \qquad B = B_0\sqrt{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\lambda)\sin(n\varphi + \gamma_n) \tag{4.4}$$

Заметим, что члены обоих рядов удовлетворяют уравнениям (3.7) и (3.8) при любом n. Отсюда нетрудно получить различные частные решения уравнений пластичности.

Предыдущие уравнения при плоском деформированном состоянии в случае $\tau = k$ уже были получены нами ранее [3].

Теперь обратимся к уравнениям эллиптического типа (3.15) и (3.16), отвечающим $|h| > 1$, и будем, как и ранее, искать частные решения этих уравнений в виде функций

$$A = A_n(\mu)\cos(n\varphi + \gamma_n), \qquad B = B_n(\mu)\sin(n\varphi + \gamma_n) \tag{4.5}$$

в которых γ_n суть постоянные величины, а коэффициенты A_n и B_n зависят только от μ. Внося функции (4.5) в уравнение (3.15), найдем

$$\frac{dA_n}{d\mu} + QA_n = -nB_n, \qquad \frac{dB_n}{d\mu} - QB_n = -nA_n \tag{4.6}$$

а подставляя их в уравнения (3.16), будем иметь

$$\frac{d^2A_n}{d\mu^2} = A_n(a + n^2), \qquad \frac{d^2B_n}{d\mu^2} = B_n(b + n^2) \tag{4.7}$$

Теперь легко построить решение с периодом 2π в форме

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{M}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mu)\cos(n\varphi + \gamma_n), \qquad B = B_0\sqrt{M} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\mu)\sin(n\varphi + \gamma_n) \tag{4.8}$$

Замечая, что члены обоих рядов удовлетворяют уравнениям (3.15) и (3.16), легко найти различные частные решения уравнений пластичности.

В заключение отметим, что трудность решения исследованных выше уравнений (3.8) и (4.3) или (3.16) и (4.7) зависит от вида их коэффициентов. Поэтому вопрос о том, каким условиям (1.5) соответствуют наиболее простые виды функций: $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ или $a(\mu)$ и $b(\mu)$, имеет существенное значение. Решение этого вопроса для функций $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, входящих в уравнения (3.8) и (4.3), сводится к интеграции уравнений

$$\frac{dh}{d\lambda} = 2\sqrt{1-h^2}\,(1 - P\sqrt{1-h^2}), \qquad \frac{d\ln t}{d\lambda} = -\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}, \qquad \frac{dt}{ds} = -h \tag{4.9}$$

а для функций $a(\mu)$ и $b(\mu)$, входящих в уравнения (3.16) и (4.7),— к интеграции уравнений

$$\frac{dh}{d\mu} = 2\sqrt{h^2-1}\,(Q\sqrt{h^2-1} - 1), \qquad \frac{d\ln t}{d\mu} = -\frac{2h}{\sqrt{h^2-1}}, \qquad \frac{dt}{ds} = -h \tag{4.10}$$

Приведенные уравнения (4.9) и (4.10) могут быть преобразованы к простым видам. Покажем это, например, применительно к уравнениям (4.9), так как уравнения (4.10) совершенно аналогичны.

Если задана функция $a(\lambda)$, то следует ввести новые переменные

$$\alpha_1 = -P, \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}$$

которые удовлетворяют уравнениям Риккати

$$\frac{d\alpha_1}{d\lambda} + \alpha_1^2 = a, \qquad \frac{d\alpha_2}{d\lambda} + \alpha_2^2 = a - 1 \tag{4.11}$$

После определения α_1 и α_2 нетрудно из уравнений

$$d\ln t = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)d\lambda, \qquad ds = t\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)d\lambda, \qquad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \tag{4.12}$$

найти функции $s = s(\lambda)$ и $t = t(\lambda)$, дающие условие (1.5) в параметрической форме.

Если же известна функция $b(\lambda)$, то нужно принять новые переменные

$$\beta_1 = P, \qquad \beta_2 = \beta_1 - \sqrt{\frac{1+h}{1-h}}$$

которые также удовлетворяют уравнениям Риккати

$$\frac{d\beta_1}{d\lambda} + \beta_1^2 = b, \qquad \frac{d\beta_2}{d\lambda} + \beta_2^2 = b - 1 \tag{4.13}$$

После получения β_1 и β_2 легко из уравнений

$$d\ln t = \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)d\lambda, \quad -ds = t\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)d\lambda, \quad \beta = \beta_2 - \beta_1 \tag{4.14}$$

определить функции $s = s(\lambda)$ и $t = t(\lambda)$, дающие условие (1.5) в параметрической форме. Отметим, что при замене b, β и $-s$ на a, α и $+s$ уравнения (4.13) и (4.14) переходят в уравнения (4.11) и (4.12).

Приведем примеры функций $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, которым соответствуют наиболее простые виды уравнений (3.8).

Одним примером могут служить $a = \text{const}$ или $b = \text{const}$, когда одно из уравнений (3.8) приводится к телеграфному виду.

Если $a = \text{const}$, то искомые функции α_1 и α_2 определяются в конечной форме. Первое и второе уравнения Риккати (4.11) имеют такие решения:

для $a = +c^2$

$$\alpha_1 = c\,\mathrm{cth}\,[c(\lambda - \lambda_1)], \qquad \alpha_2 = \begin{cases} \sqrt{1-c^2}\,\mathrm{ctg}\,[\sqrt{1-c^2}(\lambda - \lambda_2)] & (c < 1) \\ \sqrt{c^2-1}\,\mathrm{cth}\,[\sqrt{c^2-1}(\lambda - \lambda_2)] & (c > 1) \end{cases}$$

для $a = -c^2$

$$\alpha_1 = c\,\mathrm{ctg}\,[c(\lambda - \lambda_1)], \qquad \alpha_2 = \sqrt{c^2+1}\,\mathrm{ctg}\,[\sqrt{c^2+1}(\lambda - \lambda_2)]$$

содержащие произвольные постоянные λ_1, λ_2 и параметр $c > 0$.

При $c \to 0$ и $c \to 1$ получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{1}{\lambda - \lambda_2}$$

а при $|\lambda_1| \to \infty$ и $|\lambda_2| \to \infty$ будем иметь

$$\alpha_1 = \pm c \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \pm\sqrt{c^2 - 1}$$

Если же $b = \text{const}$, то функции β_1 и β_2 выражаются формулами, следующими из предыдущих в результате замены a и α на b и β.

Вносят α_1 и α_2 в (4.12) или β_1 и β_2 в (4.14), а затем находя интегралы, получим классы функций $s = s(\lambda)$ и $t = t(\lambda)$, определяющих условие (1.5) в параметрической форме.

В простейшем частном случае, когда

$$-\alpha_1 = \frac{1}{\sin 2\psi_0}, \qquad \alpha_2 = \mathrm{ctg}\,2\psi_0, \qquad c = \frac{1}{\sin 2\psi_0}$$

уравнения (4.12) принимают вид:

$$d\ln t = 2\,\mathrm{ctg}\,2\psi_0\,d\lambda, \qquad ds = \frac{2t}{\sin 2\psi_0}\,d\lambda$$

Решая эти уравнения, получим $t = k\exp(2\lambda\,\mathrm{ctg}\,2\psi_0)$, а вместе с тем и условие пластичности

$$t = k + s\cos 2\psi_0$$

содержащее постоянные ψ_0 и k, которое было предложено еще К. Кулоном.

Другим примером могут служить $a = n(n-1)\lambda^{-2}$ или $b = n(n-1)\lambda^{-2}$, причем n — целое число, когда одно из уравнений (3.8) сводится к интегрируемому виду.

Если $a = n(n-1)\lambda^{-2}$, то функции α_1 и α_2 также определяются в конечной форме. Первое уравнение Риккати (4.11) имеет решение

$$\alpha_1 = \frac{n(\lambda/\lambda_1)^{2n-1} + n - 1}{\lambda[(\lambda/\lambda_1)^{2n-1} - 1]}$$

содержащее произвольную постоянную λ_1, а второе уравнение Риккати (4.11) при помощи подстановки

$$\alpha_2 = \frac{w}{\lambda^{2n}} + \frac{n}{\lambda}, \qquad z = \lambda^{1-2n}$$

принимает такой вид:

$$(1-2n)\frac{dw}{dz} + w^2 = -z^N, \qquad N = \frac{4n}{1-2n}$$

и будет иметь решение в квадратурах, также содержащее произвольную постоянную λ_2. При $n = 0$ и $n = 1$ найдем

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda - \lambda_1}, \qquad \alpha_2 = \operatorname{ctg}(\lambda - \lambda_2)$$

а при $|\lambda_1| \to \infty$ будем иметь

$$\alpha_1 = \frac{1-n}{\lambda}$$

Если же $b = n(n-1)\lambda^{-2}$, то функции β_1 и β_2 даются формулами, следующими из предыдущих после замены a и α на b и β.

Подставляя α_1 и α_2 в (4.12) или β_1 и β_2 в (4.14) и находя интегралы, определим классы функций $s = s(\lambda)$ и $t = t(\lambda)$, дающих условие (1.5) в параметрической форме.

В простейшем частном случае, когда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \operatorname{ctg}\lambda$ уравнения (4.12) напишутся так:

$$d\ln t = 2\operatorname{ctg}2\lambda\, d\lambda, \qquad ds = \frac{2t}{\sin 2\lambda}\, d\lambda$$

Решая эти уравнения, найдем $t = k\sin 2\lambda$, а вслед затем и условие пластичности

$$t = k\sin\left(\frac{s - s_0}{k}\right)$$

содержащее постоянные s_0 и k, которое уже было рассмотрено нами ранее[3].

Приведенные примеры определяют достаточно широкие классы условий пластичности (1.5), которые могут быть использованы при решении различных задач.

Поступила 29 VII 1954 Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 8, 1928.
2. Drucker D. and Prager W. Soil mechanics and plastic analyses or limit design. Quarterly of applied mathematics, vol. X, № 2, 1952.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. второе. Гостехиздат, 1950.