

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ  
(ПРИМЕРЫ)**

**Ю. М. Дроздов**

(Ленинград)

В предшествующей статье этого выпуска журнала в посмертно опубликованной работе А. М. Каца [1] изложен метод исследования вынужденных колебаний. На основании этой работы ниже рассматриваются три примера. Автор настоящей статьи пользовался указаниями покойного А. М. Каца и прочел его черновые записки, в которых содержится исследование и начало решения одной задачи о колебаниях первой степени. Ниже применяются понятия вида решения и степени колебаний, которые введены в работе А. М. Каца; сохранены также обозначения этой работы.

**1. Введение.** Рассмотрим задачи, в которых нелинейная функция  $F(x)$  в уравнении (2.1) работы [1] является нечетной, т. е.

$$F(-x) = -F(x) \tag{1.1}$$

В этом случае тригонометрический ряд для порождающего решения

$$x_0(z) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos pz \tag{1.2}$$

содержит  $A_p$  только с нечетными индексами.

Видоизменим формулы (5.11), (5.15) и (5.16) работы [1], вводя коэффициенты тригонометрических рядов; для  $n = 1$  найдем

$$f_0 = g_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos mz + b_m \sin mz) \tag{1.3}$$

$$x_1 = K \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (H_q^{(m)} + H_q^{(-m)}) a_m \cos qz + K \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (H_q^{(m)} - H_q^{(-m)}) b_m \sin qz - C_1 \omega \sum_{q=1}^{\infty} q A_q \sin qz \tag{1.4}$$

$$H_q^{(m)} = V_q V_m + \sum_r \frac{1}{r^2 \omega^2} [(U_{r-q} + U_q)(r\omega V_{r-m} - U_{r-m}) + r\omega U_{r-m} V_{r-q}] \tag{1.5}$$

Формула (5.18) работы [1] может быть записана в виде

$$\frac{1}{K} = \frac{\omega^2}{2} \frac{d}{d\omega} \omega \sum_p p^2 A_p^2 \tag{1.6}$$

При обозначении  $\omega\tau = \theta$  формула (6.5) работы [1] даст

$$C_1 = - \left( \int_0^{2\pi} (f_0 \dot{x}_{1,1} + f_{1,1} \dot{x}_0) dz \right) \left( \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} f_0 \dot{x}_0 dz \right)^{-1} \tag{1.7}$$

Согласно (5.10) работы [1] введем обозначения

$$U_1 = \frac{1}{2} \omega A_1, \quad U_3 = \frac{3}{2} \omega A_3, \quad V_1 = \frac{1}{2} \omega \frac{dA_1}{d\omega} = \frac{1}{2} A_1', \quad (1.8)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \omega \frac{dA_3}{d\omega} = \frac{1}{2} A_3' \quad (\text{и т. д.})$$

**2. Пример колебаний первой степени. Решение вида  $(3/1)$ .** Рассмотрим систему с нелинейной восстанавливающей силой и линейным трением, находящуюся под воздействием гармонической возмущающей силы, и остановим свое внимание на таких колебаниях, частоты которых в целое число раз меньше частоты возбуждения.

Ищем решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon (P \cos m\omega t - \beta \dot{x}) \quad (2.1)$$

близкое к решению (1.2). Здесь  $P$  и  $\beta$  — постоянные положительные числа,  $m$  — целое число,  $A_1, A_3 \dots$  — известные функции от  $\omega$ , причем  $A_1 \neq 0$ . Таким образом, согласно определению, данному в п. 2 работы [1], мы ищем решение вида  $(m/1)$ . Подставляя

$$f_0 = P \cos m(z - \theta) - \beta \dot{x}_0 \quad (2.2)$$

в уравнение (6.1) работы [1], найдем

$$\pi P m A_m \sin m\theta + \pi \beta \omega \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 = 0 \quad (2.3)$$

Отсюда

$$\sin m\theta = - \frac{\beta \omega}{P m A_m} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 \quad (2.4)$$

Это уравнение относительно  $\theta$  имеет вещественные корни, если

$$\frac{P}{\beta} > \left| \frac{\omega}{m A_m} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 \right| \quad (2.5)$$

Правая часть неравенства (2.5) для данной системы при заданном  $m$  зависит только от  $\omega$ . Таким образом, (2.5) позволяет определить те области частот  $\omega$ , в которых возможны колебания рассматриваемого вида. Если при некотором значении  $\omega$  неравенство (2.5) удовлетворено, то в интервале  $0 < \theta < 2\pi$  уравнение (2.4) имеет  $2m$  корней:

$$\theta_{2k-1} = \theta_1 + \frac{\pi}{m} (2k - 2), \quad \theta_{2k} = -\theta_1 + \frac{\pi}{m} (2k - 1) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (2.6)$$

где  $\theta_1$  — наименьший из корней. При этом двум значениям  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответствуют два существенно различных решения  $x(t)$ , тогда как остальным значениям  $\theta$  соответствуют такие же решения, сдвинутые на один или несколько периодов возбуждения. На основании первого неравенства (8.24) работы [1] устойчивы те из движений, для которых

$$\frac{d\omega}{d\alpha} \cos m\theta > 0 \quad (2.7)$$

т. е. либо при всех  $\theta_{2k-1}$ , либо при всех  $\theta_{2k}$ , так как

$$\cos m \theta_{2k} = -\cos m \theta_{2k-1} \quad (2.8)$$

Заметим, что благодаря условию (1.1) из уравнения (2.3) можно находить  $\theta$  только при нечетных  $m$  и, следовательно, рассматриваемые колебания первой степени возможны только при нечетных  $m$ .

Разберем подробнее случай  $m=3$  и жесткой нелинейной характеристики, т. е.

$$\frac{dF}{dx} > 0 \quad \text{при всех } x \quad (2.9)$$

Следствием последнего условия будет  $da/d\omega < 0$  и, как показывают вычисления, обычно

$$A_1 \gg A_3 > 0 \quad (2.10)$$

Уравнение (2.4) и условие устойчивости (2.7) принимают вид:

$$\sin 3\theta = -\frac{\beta\omega}{3PA_3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^2 A_{2n-1}^2, \quad \cos 3\theta > 0 \quad (2.11)$$

По формуле (1.5), подставляя (1.8), найдем приближенные выражения нескольких коэффициентов  $H_q^{(m)}$ , удерживая только  $A_1$  и  $A_1'$

$$\begin{aligned} H_1^{(3)} + H_1^{(-3)} &= H_3^{(1)} - H_3^{(-1)} = \frac{1}{16} A_1^2, & H_3^{(3)} &= -\frac{1}{8} A_1 (A_1' + \frac{5}{8} A_1) \\ H_1^{(3)} - H_1^{(-3)} &= \frac{3}{8} A_1 (A_1' + \frac{5}{12} A_1), & H_3^{(-3)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Согласно (1.3) находим

$$\begin{aligned} a_3 &= P \cos 3\theta, & a_n &= 0 \\ b_3 &= P \sin 3\theta + 3\beta\omega A_3, & b_n &= n\beta\omega A_n \quad (n \neq m) \end{aligned} \quad (2.13)$$

В формулу (1.7) подставим  $x_{11}$  по формулам (1.4) и (2.13), положив  $C_1 = 0$ ,  $f_{1,1} = -\beta\dot{x}_0$ ; знаменатель выражения (1.7) получим, беря производную по  $\theta$  от выражения (2.3). Подставляя (2.12) и опуская  $A_3$  при сложении с  $A_1$ , находим приближенно

$$C_1 = -\frac{1}{9\pi\omega PA_3 \cos 3\theta} \int_0^{2\pi} (f_0 \dot{x}_{11} - \beta\dot{x}_0^2) dz \approx \frac{K\beta A_1}{9A_3} (H_3^{(1)} - H_3^{(-1)}) = \frac{K\beta A_1^3}{144 A_3} \quad (2.14)$$

Затем по (1.4), подставляя (2.12) (2.13) и (2.14), найдем  $x_1$ ; складывая это выражение с  $x_0$ , получим два приближения искомого решения:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon x_1 = (A_1 + \varepsilon \frac{1}{16} K A_1^2 h_3 \cos 3\theta) \cos(\omega t + \theta) - \\ &\quad - \varepsilon \frac{K\beta\omega A_1^3}{8A_3} (A_1' + \frac{13}{36} A_1) \sin(\omega t + \theta) + \\ &\quad + [A_3 - \varepsilon \frac{1}{8} K A_1 (A_1' + \frac{5}{8} A_1) h_3 \cos 3\theta] \cos 3(\omega t + \theta) + \\ &\quad + \varepsilon \frac{K\beta\omega A_1^3}{24 A_3} (A_1' + \frac{5}{8} A_1) \sin 3(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $K$  определяется формулой (1.6).

Построим решение для частной задачи, когда  $F = x + x^3$ . Вначале найдем решение уравнения свободных колебаний

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0 \quad (2.16)$$

Полагаем

$$x = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t \quad (2.17)$$

Подставив (2.17) в (2.16) и собирая коэффициенты при  $\cos \omega t$  и при  $\cos 3\omega t$ , получим систему уравнений, из которой находятся  $A_1$  и  $A_3$ :

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2) A_1 + \frac{3}{4} (A_1^3 + A_1^2 A_3 + 2A_1 A_3^2) &= 0 \\ (1 - 9\omega^2) A_3 + \frac{1}{4} (A_1^3 + 6A_1^2 A_3 + 3A_3^3) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Предполагая, что  $A_3 \ll A_1$ , подставим

$$A_1 = A + \gamma A \quad (\gamma \ll 1) \quad (2.19)$$

в систему (2.18) и сохраним только линейные относительно  $\gamma$  и  $A_3$  слагаемые:

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2)(1 + \gamma) + \\ + \frac{3}{4} A^2 (1 + 3\gamma) + \frac{3}{4} A A_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$(1 - 9\omega^2) A_3 + \frac{1}{4} A^3 + \frac{3}{4} A^2 \gamma + \frac{3}{2} A^2 A_3 = 0$$

При  $\gamma = A_3 = 0$  из системы (2.20) находим первое приближение:

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\omega^2 - 1} \quad (2.21)$$

подставляя это выражение в уравнения (2.20), находим

$$\gamma = -\frac{\omega^2 - 1}{3(15\omega^2 + 1)} \quad A_3 = -2\gamma A \quad (2.22)$$

Функции  $A_1$  и  $A_3$ , а также  $A_1'$  по (1.8) изображены на фиг. 1.

Подставляя полученные выражения  $A_1$  и  $A_3$  в правую часть неравенства (2.5), получим функцию от  $\omega$ , изображенную на фиг. 2. Колебания вида  $\sqrt[3]{1}$  возможны только при

$$\frac{P}{\beta} > 23,4, \quad \omega > 1 \quad (2.23)$$

Если (2.23) выполнены, то для любого фиксированного значения  $P/\beta$  область существования решения  $x(t)$  ограничена двумя значениями  $\omega$ , как это видно из фиг. 2. Область существования решения  $x(t)$  расположена выше кривой на фиг. 2. Подставив выражения (2.19), (2.21) и (2.22) в (2.15), получим решение  $x(t)$ .

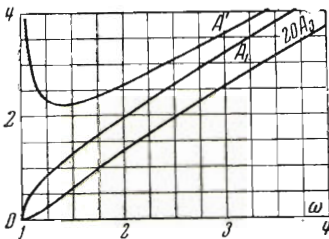
Для числового примера

$$\ddot{x} + x + x^3 = 40 \cos 3\omega t - 0.2 \dot{x} \quad (2.24)$$

вычислено решение (2.15) для ряда значений  $\omega$ . На фиг. 3 изображены величины коэффициентов этого решения, записанного в форме

$$x = X_1 \cos(\omega t + \xi_1) + X_3 \cos(3\omega t + \xi_3) \quad (2.25)$$

Штриховыми линиями показаны коэффициенты  $A_1$  и  $A_3$  в выражении первого приближения  $x_0$ .

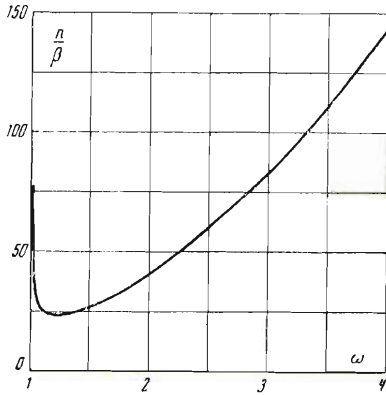


Фиг. 1

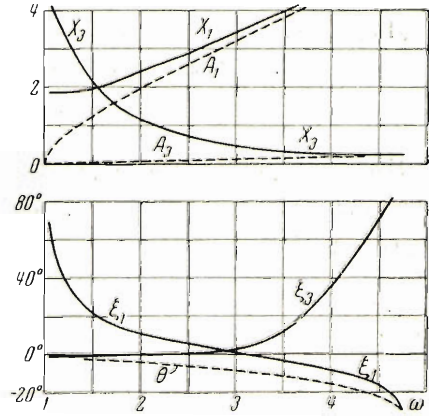
3. Пример колебаний второй степени. Решение вида  $(2/1)$ . Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon P \cos 2\omega t - \varepsilon^2 \beta \dot{x} \quad (3.1)$$

найдем решение, близкое к (1.2) при  $A_1 \neq 0$ . В этом уравнении  $P$  и  $\beta$  —



Фиг. 2



Фиг. 3

положительные постоянные числа,  $F(-x) = -F(x)$ ,  $dF/dx > 0$ . Ряд (1.2) будет содержать только нечетные гармоники.

Подставляя выражения

$$f_0 = P \cos 2(z - \theta), \quad \dot{x}_0 = -\omega (A_1 \sin z + 3A_3 \sin 3z + \dots) \quad (3.2)$$

в формулу (6.4) работы [1], найдем, что это уравнение удовлетворяется тождественно при любых  $\theta$ . Отсюда следует, что рассматриваемые колебания будут степени выше первой. Покажем, что это будут колебания второй степени, и выведем формулу для  $\theta$ . В данной задаче согласно (1.3)

$$a_2 = P \cos 2\theta, \quad b_2 = P \sin 2\theta, \quad a_k = b_k = 0, \quad (k \neq 2) \quad (3.3)$$

$$f_{11} = f_1 = -\beta \dot{x}_0 = \beta \omega (A_1 \sin z + 3A_3 \sin 3z + \dots)$$

Составляем уравнение (7.3) работы [1]:

$$\int_0^{2\pi} f_0 \dot{x}_{11} dz + \int_0^{2\pi} f_{11} \dot{x}_0 dz = 0 \quad (3.4)$$

В первый интеграл уравнения (3.4) подставим только те слагаемые выражения  $x_{11}$  по формуле (1.4), которые содержат множители  $\cos 2z$  и  $\sin 2z$ ; остальные слагаемые дадут нули после интегрирования. Подставляя выражения (3.2) и (3.3) в (3.4), получаем

$$\int_0^{2\pi} (a_2 \cos 2z + b_2 \sin 2z) K 2\omega [- (H_2^{(2)} + H_2^{(-2)}) a_2 \sin 2z +$$

$$+ (H_2^{(2)} - H_2^{(-2)}) b_2 \cos 2z] dz - \beta \omega^2 \int_0^{2\pi} \dot{x}_0^2 dz = 0$$

или

$$- 2\pi K P^2 H_2^{(-2)} \sin 4\theta - \pi \beta \omega^2 (A_1^2 + 9A_3^2 + \dots) = 0 \quad (3.5)$$

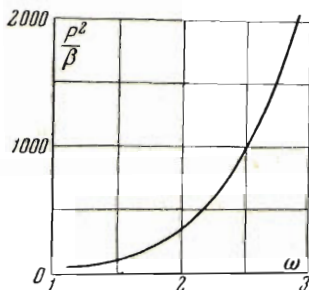
По формулам (1.5) и (1.6) находим приближенные выражения:

$$H_2^{(-2)} \approx \frac{2}{\omega^2} (U_1 U_3 + \omega U_3 V_1 - \omega U_1 V_3) = \frac{1}{2} (3A_1 A_3 + 3A_2 A_1' - A_1 A_3') \\ \frac{1}{K} = \frac{\omega^2}{2} (A_1^2 + 2A_1 A_1') \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получаем

$$\sin 4\theta = -\frac{\beta}{P^2} \frac{\omega^3 A_1^3 (2A_1' + A_1)}{2(3A_1 A_3 + 3A_2 A_1' - A_1 A_3')} \quad (3.7)$$

Выясним устойчивость решения  $x(t)$ , которое можно строить, найдя  $\theta$  из (3.7). Согласно (3.2) и (3.3) функция  $f_0$  не зависит от  $\dot{x}_0$  и второе условие (9.22) работы <sup>[1]</sup> выполняется по подстановке в него  $f_1$ . Учитывая, что согласно (3.2) и (3.3)



Фиг. 4

$$\int_0^{2\pi} f_0 \ddot{x}_0 dz = 0, \quad f_1 = f_{11}$$

выпишем первое уравнение (9.22) работы <sup>[1]</sup>:

$$\frac{d\omega}{da} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} (f_0 \dot{x}_{11} + C_1 f_0 \ddot{x}_0 + f_1 \dot{x}_0) dz = \\ = \frac{d\omega}{da} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} (f_0 \dot{x}_{11} + f_{11} \dot{x}_0) dz \quad (3.8)$$

Производная  $d\omega/da$  положительна при условии  $dF/dx > 0$ , интеграл в (3.8) совпадает с выражением (3.4), поэтому знак выражения (3.8) совпадает со знаком производной по  $\theta$  от левой части уравнения (3.5) и условие устойчивости принимает вид:

$$KH_2^{(-2)} \cos 4\theta > 0 \quad (3.9)$$

Рассмотрим частную задачу при  $F = x + x^3$ . Уравнение (3.1), формула (3.7) и условие (3.9) по подстановке (3.6) и приближенных выражений (2.19), (2.21), (2.22) принимают вид:

$$\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon P \cos 2\omega t - \varepsilon^2 \beta x \quad (3.10)$$

$$\sin 4\theta = -\frac{\beta}{P^2} B_0(\omega), \quad B_0 \approx \frac{3\omega^5 (3\omega^2 - 1)}{\omega^2 - 0.97}, \quad \cos 4\theta > 0 \quad (3.11)$$

Таким образом, показана возможность существования колебаний второй степени, вида  $(2/1)$ , описываемых уравнением (3.1).

Для частного случая  $F = x + x^3$  на фиг. 4 изображена кривая  $B_0(\omega)$ , построенная по (3.11). Область существования решения расположена выше кривой на фиг. 4; при фиксированном  $P^2/\beta$  из этого графика находится максимальная частота  $\omega_m$ . Величина  $4\theta$  согласно (3.11) заключена в интервале  $-\frac{1}{2}\pi < 4\theta < 0$ . Для любого значения  $\omega$  в интервале  $1 < \omega < \omega_m$  первое приближение решения  $x(t)$  вычисляется по (1.2), (2.19), (2.21), (2.22), а величина  $\theta$  — по формуле (3.11) или из фиг. 4.

4. Пример колебаний второй степени. Решение вида  $(1/1)$  нелинейного уравнения с периодическим коэффициентом. Для уравнения

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon x P \cos \omega t - \varepsilon^2 \beta x, \quad (\dot{F}(-x) = -F(x), \frac{dF}{dx} > 0) \quad (4.1)$$

найдем решение, близкое к (1.2) при  $A_1 \neq 0$ . В силу условий (4.1) ряд (1.2) будет содержать только нечетные гармоники и будет выполняться неравенство (2.10). В данной задаче

$$x_0 = A_1 \cos z + A_3 \cos 3z + \dots, \quad \dot{x}_{11} = x_{11} P \cos(z - \theta) - \beta \dot{x}_0 \\ f_0 = x_0 P \cos(z - \theta) \approx \frac{1}{2} P A_1 (\cos \theta + \cos \theta \cos 2z + \sin \theta \sin 2z + \dots) \quad (4.2)$$

Уравнение (6.1) работы [1] удовлетворяется тождественно. Действительно, подставив в него (4.2), имеем

$$P \omega \int_0^T x_0 \cos \omega t \dot{x}_0 dt = \frac{1}{2} P \omega x_0^2 \cos \omega t \Big|_0^T + \frac{1}{2} P \omega^2 \int_0^T x_0^2 \sin \omega t dt \equiv 0$$

так как

$$x_0^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (c_{2k} \cos 2k \omega t + s_{2k} \sin 2k \omega t)$$

Таким образом, степень рассматриваемых колебаний выше первой. Составим уравнение (7.3) работы [1], подставляя в него (4.2):

$$\int_0^T (x_0 \dot{x}_{11} P \cos \omega t + x_{11} \dot{x}_0 P \cos \omega t - \beta \dot{x}_0^2) dt = \quad (4.3) \\ = x_0 x_{11} P \cos \omega t \Big|_0^T + P \omega \int_0^T x_0 x_{11} \sin \omega t dt - \beta \int_0^T \dot{x}_0^2 dt = 0$$

или

$$P \int_0^{2\pi} x_0(z) x_{11}(z) \sin(z - \theta) dz - \beta \pi \omega \sum_{p=1}^{\infty} p^2 A_p^2 = 0 \quad (4.4)$$

В дальнейших выкладках опустим  $A_3, A_5, \dots$  на основании (2.10). Ряд Фурье для  $x_0 \sin(z - \theta)$  имеет вид:

$$x_0(z) \sin(z - \theta) \approx \frac{1}{2} A_1 (-\sin \theta - \sin \theta \cos 2z + \cos \theta \sin 2z + \dots) \quad (4.5)$$

поэтому в (4.4) достаточно подставить только четные гармоники и постоянную составляющую функции  $x_{11}$ . По формуле (1.5) находим

$$H_0^{(0)} \approx A_1 A_1' - \frac{1}{2} A_1^2, \quad H_0^{(2)} = H_2^{(0)} \approx \frac{1}{4} A_1^2, \quad H_2^{(-2)} \approx 0 \quad (4.6)$$

Подставив (1.4), (4.2) и (4.5), а затем (4.6) в (4.4), находим

$$\frac{1}{2} P A_1 K \int_0^{2\pi} (-\sin \theta - \sin \theta \cos 2z + \dots) [H_2 a_0^{(0)} + H_0^{(2)} 2a_2 + \\ + H_2^{(0)} 2a_0 + H_2^{(2)} a_2) \cos 2z + H_2^{(2)} d_2 \sin 2z + \dots] dz - \beta \omega \pi \sum_{p=1}^{\infty} p^2 A_p^2 = 0$$

или

$$\frac{1}{8} P^2 K A_1^3 \pi (-4A_1' + A_1) \sin 2\theta - \beta \omega \pi \sum_{p=1}^{\infty} p^2 A_p^2 = 0 \quad (4.7)$$

Отсюда, опуская  $A_3, A_5, \dots$  и подставляя  $K$  по формуле (3.6), находим

$$\sin 2\theta = -\frac{\beta}{P^2} \frac{4\omega^3(A_1 + 2A_1')}{4A_1' - A_1} \quad (4.8)$$

Проверим устойчивость рассматриваемых в данном пункте колебаний Согласно (4.3) функция  $f_0$  не зависит от  $\dot{x}_0$ , а

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_0} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_0} [x_{11} P \cos(z - \theta) + C_1 \dot{x}_0 P \cos(z - \theta) - \beta \dot{x}_0] = C_1 P \cos(z - \theta) - \beta$$

Поэтому второе условие (9.22) работы [1] выполняется:

$$\int_0^T \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_0} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} [C_1 P \cos(z - \theta) - \beta] dz = -\beta \frac{2\pi}{\omega} < 0 \quad (4.9)$$

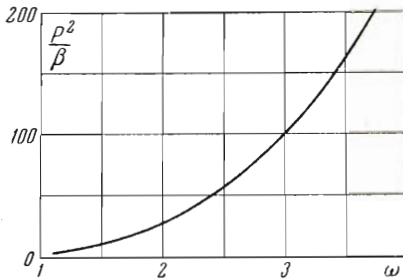
Затем согласно (4.2) находим

$$\int_0^{2\pi} (j_0 \dot{x}_1 + f_1 \dot{x}_0) dz = \int_0^{2\pi} (f_0 \dot{x}_{11} + f_{11} \dot{x}_0) dz + \int_0^{2\pi} [(C_1 f_0 \ddot{x}_0 + C_1 \dot{x}_0^2 P \cos(z - \theta))] dz$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (x_0 \ddot{x}_0 + \dot{x}_0^2) P \cos(z - \theta) dz &= P \omega \int_0^{2\pi} \cos(z - \theta) \frac{d}{dz} (x_0 \dot{x}_0) dz = \\ &= P \omega x_0 \dot{x}_0 \cos(z - \theta) \Big|_0^{2\pi} + P \omega \int_0^{2\pi} x_0 \dot{x}_0 \sin(z - \theta) dz = 0 \end{aligned}$$

так как ряды для  $\dot{x}_0$  и  $x_0$  содержат только нечетные гармоники. Поэтому



Фиг. 5

$$\int_0^{2\pi} (f_0 \dot{x}_1 + f_1 \dot{x}_0) dz = \int_0^{2\pi} (f_0 \dot{x}_{11} + f_{11} \dot{x}_0) dz$$

и в первое условие (9.22) работы [1] следует подставить производную по  $\theta$  от выражения (7.3) работы [1] или от равносильного ему выражения (4.7). Получаем условие устойчивости

$$K A_1^3 (4A_1' - A_1) \cos 2\theta > 0 \quad (4.10)$$

Для частного случая  $E = x + x^3$ , подставляя в (4.8) и (4.10) выражение (3.6) и (2.21), находим

$$\sin 2\theta = \frac{\beta}{P^2} B_0(\omega), \quad B_0(\omega) \approx \frac{4\omega^3(3\omega^2 - 1)}{3\omega^2 + 1}, \quad \cos 2\theta > 0 \quad (4.11)$$

График функции  $B_0(\omega)$  изображен на фиг. 5. В системе, описываемой уравнением (4.1), возможны колебания второй степени и решение вида  $(1/1)$  можно построить. Для  $F = x + x^3$  при заданной частоте  $\omega$  минимальное значение  $P^2/\beta$  находится из фиг. 5. Для заданного  $P^2/\beta$  эта кривая определяет максимальную частоту  $\omega$ , при которой возможны колебания вида  $(1/1)$ .

Поступила 18 X 1954

Ленинградский политехнический институт

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Кац. Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близкие к консервативным. Статья в этом выпуске, стр. 13.