Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. В. Румянцев

(Москва)

А. Пуанкаре установил уравнения движения механических систем в групповых переменных [1] и применил их к исследованию движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, совершающей так называемое «простое» движение [2].

Интересная мысль Пуанкаре о возможности применения групп С. Ли в динамике была развита Н. Г. Четаевым на случай зависимых переменных, когда группа возможных перемещений интранзитивна [3—5]. Н. Г. Четаев установил также канонические уравнения движения механических систем в групповых переменных.

В работе предлагается вывод уравнений Пуанкаре и Четаева движения твердого тела, имеющего полость произвольной формы, частично (со свободной поверхностью) или целиком заполненную однородной несжимаемой идеальной жидкостью [6].

1. Введем в рассмотрение две системы прямоугольных осей координат: неподвижную $O_1x_1'x_2'x_3'$ и подвижную $Ox_1x_2x_3$, неизменным образом связанную с твердым телом, оси которой направим по главным осям инерции для некоторой точки O твердого тела. Пусть тело имеет полость произвольной формы, частично (со свободной поверхностью) или целиком заполненную однородной несжимаемой идеальной жидкостью, которую будем рассматривать состоящей из счетного множества частиц.

Выведем уравнения Пуанкаре, отнесенные к подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Положение в пространстве свободного твердого тела можно определить тремя независимыми координатами x_{0i}' $(i=1,2,3)$ точки O и девятью косинусами a_{ij} $(i,j=1,2,3)$ углов между осями систем координат $O_1x_1'x_2'x'_3$ и $Ox_1x_2x_3$, связанными шестью уравнениями:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{2j}a_{3j}=0,\qquad \sum_{j=1}^{3} a_{3j}a_{1j}=0,\qquad \sum_{j=1}^{3} a_{1j}a_{2j}=0;\qquad \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2=1 \qquad (i=1,2,3)$$

Производные по времени от функций a_{ij} определяются уравнениями Пуассона [7]:

$$\frac{da_{i1}}{dt}=ra_{i2}-qa_{i3},\qquad \frac{da_{i2}}{dt}=pa_{i3}-ra_{i1},\qquad \frac{da_{i3}}{dt}=qa_{i1}-pa_{i2}\qquad (i=1,2,3) \tag{1.1}$$

где p, q, r обозначают проекции на оси x_1, x_2, x_3 вектора мгновенной угловой скорости тела.

Положение любой частицы жидкости можно определить ее относительными координатами $x_{i\nu}$ $(i=1, 2, 3;\ \nu=1, 2, \ldots)$. Следовательно, положение в пространстве рассматриваемой механической системы вполне определяется переменными

$$x_{0i}',\quad a_{ij},\quad x_{i\nu}\qquad (i, j=1, 2, 3;\ \nu=1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

Возможные перемещения системы можно определить [6] величинами

$$\omega_i=\delta l_i,\qquad \omega_{3+i}=\delta\theta_i,\qquad \omega_{i\nu}=\delta x_{i\nu}\qquad (i=1, 2, 3;\ \nu=1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

где δl_i, $\delta\theta_i$ $(i=1, 2, 3)$ обозначают, соответственно, проекции на подвижные оси x_1, x_2, x_3 векторов бесконечно-малых смещения начала O системы координат $Ox_1x_2x_3$ и поворота ее около мгновенного положения последней, а $\delta x_{i\nu}$ $(i=1, 2, 3,\ \nu=1, 2, \ldots)$ обозначают бесконечно-малые изменения относительных координат частиц жидкости.

Первые шесть из величин (1.3) являются независимыми, а остальные, будучи не зависимыми от первых шести, связаны условием несжимаемости

$$\frac{\partial\omega_{1\nu}}{\partial x_{1\nu}}+\frac{\partial\omega_{2\nu}}{\partial x_{2\nu}}+\frac{\partial\omega_{3\nu}}{\partial x_{3\nu}}=0\qquad (\nu=1, 2\ldots) \tag{1.4}$$

внутри области τ, занятой жидкостью, и условиями: на стенках полости σ

$$l\omega_{1\nu}+m\omega_{2\nu}+n\omega_{3\nu}=0\qquad (\nu=1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

где l, m, n — косинусы углов между нормалью к σ и осями x_1, x_2, x_3, на свободной поверхности S_c условием постоянства гидродинамического давления $\tilde{p}$

$$\tilde{p}=p_0 \tag{1.6}$$

Величины (1.3) будем называть параметрами возможных перемещений; число их равно числу степеней свободы системы.

Действительное движение системы можно охарактеризовать проекциями на подвижные оси вектора $\mathbf{v}_0$ скорости начала O, вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости вращения системы координат $Ox_1x_2x_3$ и вектора $\mathbf{u}$ относительной скорости частиц жидкости, т. е. величинами

$$\eta_1=v_{01},\quad \eta_2=v_{02},\quad \eta_3=v_{03},\quad \eta_4=p,\quad \eta_5=q,\quad \eta_6=r$$
$$\eta_{1\nu}=u_{1\nu},\quad \eta_{2\nu}=u_{2\nu},\quad \eta_{3\nu}=u_{3\nu}\quad (\nu=1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

Величины (1.7) будем называть параметрами действительных перемещений системы.

Рассмотрим какую-нибудь функцию f от переменных (1.2) и найдем ее изменение на возможном перемещении системы

$$\delta f=\sum_{\alpha=1}^{6}\omega_\alpha X_\alpha f+\sum_{\nu}\sum_{i=1}^{3}\omega_{i\nu}X_{i\nu}f$$

где

$$X_1=a_{11}\frac{\partial}{\partial x_{01}'}+a_{21}\frac{\partial}{\partial x_{02}'}+a_{31}\frac{\partial}{\partial x_{03}'} \tag{1.8}$$

$$X_2=a_{12}\frac{\partial}{\partial x_{01}'}+a_{22}\frac{\partial}{\partial x_{02}'}+a_{32}\frac{\partial}{\partial x_{03}'},\qquad X_3=a_{13}\frac{\partial}{\partial x_{01}'}+a_{23}\frac{\partial}{\partial x_{02}'}+a_{33}\frac{\partial}{\partial x_{03}'}$$

$$X_4=\sum_{i=1}^{3}\left(a_{i3}\frac{\partial}{\partial a_{i2}}-a_{i2}\frac{\partial}{\partial a_{i3}}\right),\qquad X_5=\sum_{i=1}^{3}\left(a_{i1}\frac{\partial}{\partial a_{i3}}-a_{i3}\frac{\partial}{\partial a_{i1}}\right)$$

$$X_6=\sum_{i=1}^{3}\left(a_{i2}\frac{\partial}{\partial a_{i1}}-a_{i1}\frac{\partial}{\partial a_{i2}}\right),\qquad X_{1\nu}=\frac{\partial}{\partial x_{1\nu}},\qquad X_{2\nu}=\frac{\partial}{\partial x_{2\nu}},\qquad X_{3\nu}=\frac{\partial}{\partial x_{3\nu}}$$

$$(\nu=1,2,\ldots)$$

суть операторы, характеризующие группу возможных перемещений системы.

Записывая структурные уравнения группы возможных перемещений

$$(X_\alpha X_\beta)\equiv X_\alpha X_\beta-X_\beta X_\alpha=\sum_i c_{\alpha\beta i}X_i$$

мы видим, что группу можно определить [8] ее структурными постоянными $c_{\alpha\beta i}$. Если $(X_\delta X_\gamma)=0$, то операторы X_δ и X_γ перестановочны друг с другом.

Обращаясь к операторам (1.8), легко видеть, что операторы X_i, $X_{i\nu}$ $(i=1,2,3;\ \nu=1,2,\ldots)$ перестановочны друг с другом. Перестановочными будут и операторы X_1 и X_4, X_2 и X_5, X_3 и X_6, а также операторы $X_{1\nu}$, $X_{2\nu}$, $X_{3\nu}$ с любым из операторов X_4, X_5, X_6, тогда как

$$\begin{array}{lll}(X_2X_4)=-X_3, & (X_1X_5)=\ \ X_3, & (X_4X_5)=\ \ X_6\\ (X_2X_6)=\ \ X_1, & (X_3X_4)=\ \ X_2, & (X_4X_6)=-X_5\\ (X_1X_6)=-X_2, & (X_3X_5)=-X_1, & (X_5X_6)\ \ =X_4\end{array}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{array}{l}c_{261}=c_{153}=c_{342}=c_{456}=c_{564}=c_{423}=c_{612}=c_{531}=c_{645}=\ \ 1\\ c_{621}=c_{513}=c_{432}=c_{546}=c_{654}=c_{423}=c_{162}=c_{351}=c_{465}=-1\end{array}\tag{1.9}$$

а все другие $c_{\alpha\beta\gamma}=0$.

Известно, что для голономной системы вариации параметров η_i действительного перемещения связаны с параметрами ω_i возможных перемещений уравнениями [5]:

$$\delta\eta_i=\frac{d\omega_i}{dt}-\sum_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta i}\omega_\alpha\eta_\beta\tag{1.10}$$

Имея в виду равенства (1.9), очевидно, что для $\delta\eta_{i\nu}$ уравнения (1.10) принимают вид:

$$\delta\eta_{i\nu}=\frac{d\omega_{i\nu}}{dt}\qquad (i=1,2,3;\ \nu=1,2,\ldots)$$

Предположим, что на рассматриваемую механическую систему действуют внешние силы, обладающие силовой функцией U, а также силы, не обладающие силовой функцией; проекции на подвижные оси главного вектора и главного момента (относительно точки O) последних обозначим через Q_α $(\alpha=1,2,\ldots,6)$ соответственно. Проекции на те же оси x_1, x_2, x_3 вектора массовой силы, действующей на жидкость и отнесенной к единице массы жидкости, обозначим через F_i $(i=1,2,3)$.

Уравнения Пуанкаре получим из принципа наименьшего действия Остроградского — Гамильтона, который, учитывая, что параметры возможных перемещений $\omega_{i\nu}$ $(i=1,2,3,\ \nu=1,2,\ldots)$ связаны условием несжимаемости (1.4) внутри области, занятой жидкостью, и условиями (1.5) и (1.6) на ее границе, запишем в виде [6]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L-\sum_\nu\sum_{i=1}^{3}\omega_{i\nu}X_{i\nu}\lambda_\nu+\sum_{\alpha=1}^{6}Q_\alpha\omega_\alpha+\sum_\nu\sum_{i=1}^{3}m_\nu\omega_{i\nu}F_i\right]dt=0 \qquad (1.11)$$

где λ_ν — множители Лагранжа, которые можно интерпретировать как давление, испытываемое равномерно со всех сторон частицей жидкости [9], m_ν — масса частицы, L — функция Лагранжа, равная

$$\begin{aligned} L=T+U=\tfrac{1}{2}\,M(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)+M_1[\eta_4(x_2^0\eta_3-x_3^0\eta_2)+\\ +\eta_5(x_3^0\eta_1-x_1^0\eta_3)+\eta_6(x_1^0\eta_2-x_2^0\eta_1)]+\tfrac{1}{2}(A\eta_4^2+B\eta_5^2+C\eta_6^3)+\\ +\sum_\nu m_\nu[\eta_1(\eta_{1\nu}+\eta_5x_{3\nu}-\eta_6x_{2\nu})+\eta_2(\eta_{2\nu}+\eta_6x_{1\nu}-\eta_4x_{3\nu})+\eta_3(\eta_{3\nu}+\\ +\eta_4x_{2\nu}-\eta_5x_{1\nu})+\eta_{1\nu}(\eta_5x_{3\nu}-\eta_6x_{2\nu})+\eta_{2\nu}(\eta_6x_{1\nu}-\eta_4x_{3\nu})+\eta_{3\nu}(\eta_4x_{2\nu}-\\ -\eta_5x_{1\nu})]+\tfrac{1}{2}\sum_\nu m_\nu[(\eta_5x_{3\nu}-\eta_6x_{2\nu})^2+(\eta_6x_{1\nu}-\eta_4x_{3\nu})^2+(\eta_\nu x_{2\nu}-\eta_5x_{1\nu})^2]+\\ +\tfrac{1}{2}\sum_\nu m_\nu(\eta_{1\nu}^2+\eta_{2\nu}^2+\eta_{3\nu}^2)+U \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Здесь M — масса системы, M_1 — масса твердого тела, A, B, C — главные моменты инерции твердого тела для точки O, x_1^0, x_2^0, x_3^0 — координаты центра инерции тела. Заменяя в (1.11) δL по формуле:

$$\delta L=\sum_{\alpha=1}^{6}\frac{\partial L}{\partial\eta_\alpha}\delta\eta_\alpha+\sum_\nu\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial\eta_{i\nu}}\delta\eta_{i\nu}+\sum_{\alpha=1}^{6}\omega_\alpha X_\alpha L+\sum_\nu\sum_{i=1}^{3}\omega_{i\nu}X_{i\nu}L$$

используя формулы (1.10) и интегрируя по частям соответствующие члены, перепишем уравнение (1.11) в виде:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{i=1}^{6}\omega_i\Big[-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\eta_i}\Big)-\sum_{\alpha\beta}c_{i\alpha\beta}\eta_\alpha\frac{\partial L}{\partial\eta_\beta}+X_iL+Q_i\Big]+\\ +\sum_\nu\sum_{i=1}^{3}\Big[-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\eta_{i\nu}}\Big)+X_{i\nu}(L-\lambda_\nu)+m_\nu F_i\Big]\omega_{i\nu}\Big\}dt+\\ +\Big[\sum_{\alpha=1}^{6}\frac{\partial L}{\partial\eta_\alpha}\omega_\alpha+\sum_\nu\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial\eta_{i\nu}}\omega_{i\nu}\Big]_{t_0}^{t_1}=0 \end{aligned}$$

Так как в принципе Гамильтона концы закреплены, то

$$\omega_\alpha=0\ \ (\alpha=1,2,\ldots,6),\quad \omega_{i\nu}=0\ \ (i=1,2,3;\ \nu=1,2,\ldots)\ \text{ при } t=t_0,\ t=t_1$$

вследствие чего внеинтегральный член обращается в нуль.

Отсюда получаем следующие уравнения Пуанкаре движения твердого тела, имеющего полость, частично или полностью наполненную идеальной жидкостью:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta_i}\right)=\sum_{\alpha,\,\beta} c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_\beta}+X_i L+Q_i \qquad (i=1,2,\ldots,6) \tag{1.13}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{i\nu}}\right)=m_\nu F_i+X_{i\nu}(L-\lambda_\nu) \qquad (i=1,2,3;\ \nu=1,2,\ldots) \tag{1.14}$$

к которым следует присоединить уравнения несжимаемости

$$\frac{\partial \eta_{1\nu}}{\partial x_{1\nu}}+\frac{\partial \eta_{2\nu}}{\partial x_{2\nu}}+\frac{\partial \eta_{3\nu}}{\partial x_{3\nu}}=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

Легко проверить, учитывая равенства (1.9), что уравнения (1.13) совпадают с уравнениями (24) и (25) статьи [6]. Уравнения (1.14) суть уравнения движения частиц жидкости.

2. Для некоторых случаев представляет интерес вывод уравнений движения системы, отнесенных к неподвижной системе координат.

Наряду с системами координат $O_1x_1'x_2'x_3'$ и $Ox_1x_2x_3$ введем в рассмотрение также систему координат $Ox_1''x_2''x_3''$, оси которой все время параллельны осям неподвижной системы координат $O_1x_1'x_2'x_3'$. Тогда положение в пространстве любой частицы тела или жидкости можно определить ее координатами x_i'' в этой системе координат и координатами x_{0i}' начала O:

$$x_i'=x_{0i}'+x_i'' \qquad (i=1,2,3)$$

За параметры возможных перемещений системы примем величины

$$\omega_i=\delta x_{0i}', \qquad \omega_{3+i}=\delta\varphi_i, \qquad \omega_{i\nu}=\delta' x_{i\nu}'' \qquad (i=1,2,3;\ \nu=1,2,\ldots) \tag{2.1}$$

где $\delta x_{0i}'$ $(i=1,2,3)$ обозначают проекции на оси x_1'', x_2'', x_3'' вектора бесконечно-малого смещения точки O, $\delta\varphi_i$ — бесконечно-малые углы поворота твердого тела вокруг этих же осей,

$$\delta' x_{i\nu}''=a_{i1}\delta x_{1\nu}+a_{i2}\delta x_{2\nu}+a_{i3}\delta x_{3\nu} \qquad (i=1,2,3;\ \nu=1,2,\ldots)$$

бесконечно-малые изменения координат частиц жидкости относительно твердого тела.

Рассматривая какую-нибудь функцию f от переменных x_{0i}', x_i'' $(i=1,2,3)$, найдем ее изменение на возможном перемещении системы

$$\delta f=\sum_{\alpha=1}^{6}\omega_\alpha X_\alpha f+\sum_{\nu}\sum_{i=1}^{3}\omega_{i\nu}X_{i\nu}f \tag{2.2}$$

где введены следующие обозначения для операторов:

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_{0i}'}, \qquad X_{i\nu}=\frac{\partial}{\partial x_{i\nu}''} \qquad (i=1,2,3;\ \nu=1,2,\ldots)$$

$$X_4=\sum\left(x_2''\frac{\partial}{\partial x_3''}-x_3''\frac{\partial}{\partial x_2''}\right), \qquad X_5=\sum\left(x_3''\frac{\partial}{\partial x_1''}-x_1''\frac{\partial}{\partial x_3''}\right) \tag{2.3}$$

$$X_6=\sum\left(x_1''\frac{\partial}{\partial x_2''}-x_2''\frac{\partial}{\partial x_1''}\right)$$

Суммирование здесь распространяется на все точки тела и жидкости.

Легко видеть, что операторы X_i, $X_{i\nu}$ $(i=1, 2, 3;\ \nu=1, 2, \ldots)$ перестановочны друг с другом, как и операторы X_i $(i=1, 2, 3)$ с операторами X_j $(j=4, 5, 6)$, тогда как

$$
\begin{array}{lll}
(X_4, X_5) = -X_6 & (X_{1\nu}, X_5) = -X_{3\nu}, & (X_{2\nu}, X_6) = -X_{1\nu} \\
(X_5, X_6) = -X_4 & (X_{1\nu}, X_6) = X_{2\nu} & (X_{3\nu}, X_4) = -X_{2\nu} \\
(X_4, X_6) = X_5 & (X_{2\nu}, X_4) = X_{3\nu} & (X_{3\nu}, X_5) = X_{1\nu}
\end{array}
\tag{2.4}
$$

Из равенств (2.4) следует, что структурные постоянные, определяющие группу (2.3), суть следующие:

$$
\begin{gathered}
c_{465} = c_{654} = c_{546} = 1, \quad c_{456} = c_{564} = c_{645} = -1 \\
c^{\nu\ \nu}_{243} = c^{\nu\ \nu}_{351} = c^{\nu\ \nu}_{162} = c^{\ \nu\nu}_{432} = c^{\ \nu\nu}_{513} = c^{\ \nu\nu}_{621} = 1 \\
c^{\ \nu\nu}_{423} = c^{\ \nu\nu}_{531} = c^{\ \nu\nu}_{612} = c^{\nu\ \nu}_{342} = c^{\nu\ \nu}_{153} = c^{\nu\ \nu}_{261} = -1
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

а все другие $c_{\alpha\beta\gamma} = c^{\nu\ \nu}_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

За параметры действительных перемещений примем величины

$$
\begin{array}{lll}
\eta_i = v_i, & \eta_{i\nu} = u_{i\nu} & (i = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \ldots) \\
\eta_4 = p_1, & \eta_5 = q_1 & \eta_6 = r_1
\end{array}
\tag{2.6}
$$

представляющие собой, соответственно, проекции на оси x_1'', x_2'', x_3'' векторов $\mathbf{v}_0$ — скорости точки O, $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенной угловой скорости тела, $\mathbf{u}_\nu$ — скорости частицы жидкости относительно твердого тела.

С учетом (2.6) функцию Лагранжа L представим в виде

$$
\begin{aligned}
L = T + U = {} & \tfrac{1}{2} M (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + M_1 [\eta_4 (x_2^{\circ\prime\prime}\eta_3 - x_3^{\circ\prime\prime}\eta_2) + \\
& + \eta_5 (x_3^{\circ\prime\prime}\eta_1 - x_1^{\circ\prime\prime}\eta_3) + \eta_6 (x_1^{\circ\prime\prime}\eta_2 - x_2^{\circ\prime\prime}\eta_1)] + \tfrac{1}{2} (I_1\eta_4^2 + I_2\eta_5^2 + I_3\eta_6^2 - \\
& - 2I_{23}\eta_5\eta_6 - 2I_{13}\eta_6\eta_4 - 2I_{12}\eta_5\eta_4) + \tfrac{1}{2} \sum_\nu m_\nu (\eta_{1\nu}^2 + \eta_{2\nu}^2 + \eta_{3\nu}^2) + \\
& + \sum_\nu m_\nu [\eta_{1\nu} (\eta_1 + \eta_5 x_{3\nu}'' - \eta_6 x_{2\nu}'') + \eta_{2\nu} (\eta_2 + \eta_6 x_{1\nu}'' - \eta_4 x_{3\nu}'') + \eta_{3\nu} (\eta_3 + \\
& + \eta_4 x_{2\nu}'' - \eta_5 x_{1\nu}'')] + \sum_\nu m_\nu [\eta_1 (\eta_5 x_{3\nu}'' - \eta_6 x_{2\nu}'') + \eta_2 (\eta_6 x_{1\nu}'' - \eta_4 x_{3\nu}'') + \\
& + \eta_3 (\eta_4 x_{2\nu}'' - \eta_5 x_{1\nu}'')] + \tfrac{1}{2} \sum_\nu m_\nu [(\eta_6 x_{3\nu}'' - \eta_5 x_{2\nu}'')^2 + (\eta_6 x_{1\nu}'' - \eta_4 x_{3\nu}'')^2 + \\
& + (\eta_4 x_{2\nu}'' - \eta_5 x_{1\nu}'')^2] + U
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Здесь I_1, I_2, I_3, I_{23}, I_{13}, I_{12} обозначают, соответственно, моменты инерции и произведения инерции твердого тела по отношению к осям x_1'', x_2'', x_3'', $x_1^{\circ\prime\prime}$, $x_2^{\circ\prime\prime}$, $x_3^{\circ\prime\prime}$ — координаты центра инерции тела в системе координат $Ox_1''\ x_2''\ x_3''$.

Обозначим через Q_α' $(\alpha = 1, 2, \ldots, 6)$ проекции на оси x_1'', x_2'', x_3'' главного вектора и главного момента (относительно точки O) неконсервативных внешних сил, действующих на систему, через F_i' $(i = 1, 2, 3)$ — проекции на те же оси вектора массовой силы, действующей на жидкость и отнесенной к единице массы жидкости.

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в п°. 1. Из принципа Остроградского — Гамильтона с учетом уравнений (1.10) для $\delta\eta_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, 6)$ и уравнений

$$\delta\eta_{i\nu} = \frac{d\omega_{i\nu}}{dt} - \sum_{\alpha\beta}(c^{\nu}_{\alpha\beta i}{}^{\nu}\omega_{\alpha\nu}\eta_\beta + c^{\nu\nu}_{\alpha\beta i}\omega_\alpha\eta_{\beta\nu}) \qquad (i = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2 \ldots)$$

для $\delta\eta_{i\nu}$, принимая во внимание равенства (2.5), получаем следующие уравнения Пуанкаре движения твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, отнесенные к неподвижной системе координат:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\eta_i}\right) = \sum_{\alpha\beta}\left(c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha\frac{\partial L}{\partial\eta_\beta} + \sum_\nu c^{\nu}_{\alpha i}{}^{\nu}_{\beta}\eta_{\alpha\nu}\frac{\partial L}{\partial\eta_{\beta\nu}}\right) + X_iL + Q_i' \quad (i=1, 2, \ldots, 6) \qquad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\eta_{i\nu}}\right) = \sum_{\alpha\beta} c^{\nu\nu}_{\alpha i\beta}\eta_\alpha\frac{\partial L}{\partial\eta_{\beta\nu}} + X_{i\nu}(L - \lambda_\nu) + m_\nu F_i' \quad (i = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \ldots) \qquad (\ .9)$$

к которым следует присоединить уравнения несжимаемости.

3. Выведем уравнения движения твердого тела и жидкости в его полости в форме канонических уравнений Н. Г. Четаева [5], относя их к подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, неизменным образом связанной с телом.

Вместо переменных Пуанкаре η_i и $\eta_{j\nu}$ введем новые переменные, определяемые уравнениями

$$y_i = \frac{\partial L}{\partial\eta_i} \quad (i = 1, \ldots, 6), \qquad y_{j\nu} = \frac{\partial L}{\partial\eta_{j\nu}} \quad (j = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \ldots) \qquad (3.1)$$

Механический смысл новых переменных очевиден: y_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ обозначают проекции количества движения системы на подвижные оси x_1, x_2, x_3, y_β $(\beta = 4, 5, 6)$ — проекции момента количеств движения системы относительно начала O системы координат $Ox_1x_2x_3$ на оси последней, $y_{j\nu}$ $(j = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \ldots)$ — проекции на те же оси количества движения ν-й частицы жидкости.

Уравнения (3.1) можно разрешить относительно переменных η_i, $\eta_{j\nu}$, т. е. выразить эти переменные через новые переменные y_i, $y_{j\nu}$. Такое разрешение всегда возможно, так как кинетическая энергия T системы — определенно положительная квадратичная функция переменных η_i, $\eta_{j\nu}$, дискриминант которой, так же как и его главные диагональные миноры, отличен от нуля.

Выполним это разрешение, считая для простоты выкладок, что начало O системы координат $Ox_1x_2x_3$ совмещено с центром тяжести тела, т. е. $x_1^\circ = x_2^\circ = x_3^\circ = 0$. Из уравнений (3.1) получаем:

$$\begin{aligned}
\eta_{1\nu} &= \frac{1}{m_\nu}y_{1\nu} - \eta_1 - \eta_5x_{3\nu} + \eta_6x_{2\nu}\\
\eta_{2\nu} &= \frac{1}{m_\nu}y_{2\nu} - \eta_2 - \eta_6x_{1\nu} + \eta_4x_{3\nu}\\
\eta_{3\nu} &= \frac{1}{m_\nu}y_{3\nu} - \eta_3 - \eta_4x_{2\nu} + \eta_5x_{1\nu}
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в первые шесть уравнений (3.1), будем иметь уравнения:

$$y_i = M_1\eta_i + \sum_\nu y_{i\nu} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$y_4 = A\eta_4 + \sum_\nu (x_{2\nu}y_{3\nu} - x_{3\nu}y_{2\nu})$$

$$y_5 = B\eta_5 + \sum_\nu (x_{3\nu}y_{1\nu} - x_{1\nu}y_{3\nu})$$

$$y_6 = C\eta_6 + \sum_\nu (x_{1\nu}y_{2\nu} - x_{2\nu}y_{1\nu})$$

разрешая которые относительно η_α $(\alpha = 1, \ldots, 6)$, получаем:

$$\begin{aligned} \eta_i &= \frac{1}{M_1}\Big[y_i - \sum_\nu y_{i\nu}\Big] \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \eta_4 &= \frac{1}{A}\Big[y_4 - \sum_\nu (x_{2\nu}y_{3\nu} - x_{3\nu}y_{2\nu})\Big] \\ \eta_5 &= \frac{1}{B}\Big[y_5 - \sum_\nu (x_{3\nu}y_{1\nu} - x_{1\nu}y_{3\nu})\Big] \\ \eta_6 &= \frac{1}{C}\Big[y_6 - \sum_\nu (x_{1\nu}y_{2\nu} - x_{2\nu}y_{1\nu})\Big] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в (3.2), мы закончим разрешение уравнений (3.1):

$$\begin{aligned} \eta_{1\nu} = \frac{1}{m_\nu} y_{1\nu} - \frac{1}{M_1}\Big(y_1 - \sum_\nu y_{1\nu}\Big) - \frac{1}{B}\Big[y_5 - \sum_\nu (x_{3\nu}y_{1\nu} - x_{1\nu}y_{3\nu})\Big] x_{3\nu} + {} \\ + \frac{1}{C}\Big[y_6 - \sum_\nu (x_{1\nu}y_{2\nu} - x_{2\nu}y_{1\nu})\Big] x_{2\nu} \\ \eta_{2\nu} = \frac{1}{m_\nu} y_{2\nu} - \frac{1}{M_1}\Big(y_2 - \sum_\nu y_{2\nu}\Big) - \frac{1}{C}\Big[y_6 - \sum_\nu (x_{1\nu}y_{2\nu} - x_{2\nu}y_{1\nu})\Big] x_{1\nu} + {} \\ + \frac{1}{A}\Big[y_4 - \sum_\nu (x_{2\nu}y_{3\nu} - x_{3\nu}y_{2\nu})\Big] x_{3\nu} \\ \eta_{3\nu} = \frac{1}{m_\nu} y_{3\nu} - \frac{1}{M_1}\Big(y_3 - \sum_\nu y_{3\nu}\Big) - \frac{1}{A}\Big[y_4 - \sum_\nu (x_{2\nu}y_{3\nu} - x_{3\nu}y_{2\nu})\Big] x_{2\nu} + {} \\ + \frac{1}{B}\Big[y_5 - \sum_\nu (x_{3\nu}y_{1\nu} - x_{1\nu}y_{3\nu})\Big] x_{1\nu} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Заменяя в формуле (1.12) (где следует положить $x_1^\circ = x_2^\circ = x_3^\circ = 0$) η_i $(i = 1, \ldots, 6)$ и $\eta_{j\nu}$ $(j = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \ldots)$ их выражениями (3.3) и (3.4), найдем выражение для функции L в переменных y_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ и $y_{j\nu}$ $(j = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2M_1}\Big[\Big(y_1 - \sum_\nu y_{1\nu}\Big)^2 + \Big(y_2 - \sum_\nu y_{2\nu}\Big)^2 + \Big(y_3 - \sum_\nu y_{3\nu}\Big)^2\Big] + {} \\ + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{A}\Big(y_4 - \sum_\nu (x_{2\nu}y_{3\nu} - x_{3\nu}y_{2\nu})\Big)^2 + \frac{1}{B}\Big(y_5 - \sum_\nu (x_{3\nu}y_{1\nu} - x_{1\nu}y_{3\nu})\Big)^2 + {} \\ + \frac{1}{C}\Big(y_6 - \sum_\nu (x_{1\nu}y_{2\nu} - x_{2\nu}y_{1\nu})\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu \frac{1}{m_\nu}(y_{1\nu}^2 + y_{2\nu}^2 + y_{3\nu}^2) + U \end{aligned} \tag{3.5}$$

Построим теперь функцию Гамильтона H, определяемую равенством:

$$H = \sum_{\alpha=1}^{6} y_\alpha \eta_\alpha + \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{3} y_{i\nu} \eta_{i\nu} - L \tag{3.6}$$

в правой части которого функции η_α $(\alpha = 1, \ldots, 6)$, $\eta_{i\nu}$ $(i = 1, 2, 3,\ \nu = 1, 2, \ldots)$ следует заменить их выражениями по формулам (3.3) и (3.4).

Нетрудно видеть, что функция H представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий системы, т. е. полную механическую энергию. В самом деле, кинетическая энергия системы есть однородная квадратичная функция скоростей η_α, $\eta_{i\nu}$, вследствие чего, учитывая равенства (3.1), по теореме Эйлера об однородных функциях будем иметь:

$$\sum_{\alpha=1}^{6} y_\alpha \eta_\alpha + \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{3} y_{i\nu} \eta_{i\nu} = 2T$$

так что

$$H = T - U = \frac{1}{2M_1} \left[\left(y_1 - \sum_{\nu} y_{1\nu}\right)^2 + \left(y_2 - \sum_{\nu} y_{2\nu}\right)^2 + \left(y_3 - \sum_{\nu} y_{3\nu}\right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \left(y_4 - \sum_{\nu} (x_{2\nu} y_{3\nu} - x_{3\nu} y_{2\nu})\right)^2 + \frac{1}{B} \left(y_5 - \sum_{\nu} (x_{3\nu} y_{1\nu} - x_{1\nu} y_{3\nu})\right)^2 + \right. \tag{3.7}$$

$$\left. + \frac{1}{C} \left(y_6 - \sum_{\nu} (x_{1\nu} y_{2\nu} - x_{2\nu} y_{1\nu})\right)^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_\nu \left(y_{1\nu}^2 + y_{2\nu}^2 + y_{3\nu}^2\right) - U$$

Из принципа Гамильтона (1.11) с учетом (3.6) непосредственно следует, что для действительного движения нашей системы

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \left[\sum_{\alpha=1}^{6} y_\alpha \eta_\alpha + \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{3} y_{i\nu} \eta_{i\nu} - H \right] - \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{3} \omega_{i\nu} X_{i\nu} \lambda_\nu + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{6} Q_\alpha \omega_\alpha + \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{3} m_\nu \omega_{i\nu} F_i \right\} dt = 0$$

Варьируя под знаком интеграла, заменяя $\delta\eta_\alpha$, $\delta\eta_{i\nu}$ $(\alpha = 1, \ldots, 6;$ $i = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \ldots)$ по формулам (1.10) с учетом (1.9) и интегрируя по частям соответствующие члены, получаем:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{6} \left(\eta_\alpha - \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\right) \delta y_\alpha + \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{3} \left(\eta_{i\nu} - \frac{\partial H}{\partial y_{i\nu}}\right) \delta y_{i\nu} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{6} \left(-\frac{dy_i}{dt} + \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha i \beta} \eta_\alpha y_\beta - X_i H + Q_i \right) \omega_i -$$

$$\left. - \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dy_{i\nu}}{dt} + X_{i\nu} (H + \lambda_\nu) - m_\nu F_i \right) \omega_{i\nu} \right\} dt +$$

$$+ \left(\sum_{\alpha=1}^{6} y_\alpha \omega_\alpha + \sum_{\nu} \sum_{i=1}^{3} y_{i\nu} \omega_{i\nu} \right)_{t^0}^{t_1} = 0$$

Так как в принципе Гамильтона концы предполагаются закрепленными, то

$$\omega_\alpha = 0, \quad \omega_{i\nu} = 0 \qquad \text{при } t = t_0, \ t = t_1 \quad (\alpha = 1, \ldots, 6; \ i = 1, 2, 3; \nu=1, 2\ldots),$$

вследствие чего внеинтегральный член обращается в нуль. Отсюда получаем следующие канонические уравнения Н. Г. Четаева движения нашей системы:

$$\begin{gathered}\frac{dy_i}{dt} = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha y_\beta - X_i H + Q_i, \qquad \eta_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)\\ \frac{dy_{i\nu}}{dt} = - X_{i\nu}(H + \lambda_\nu) + m_\nu F_i, \qquad \eta_{i\nu} = \frac{\partial H}{\partial y_{i\nu}} \qquad (i = 1, 2, 3; \ \ \nu = 1, 2, \ldots)\end{gathered} \tag{3.8}$$

к которым следует присоединить уравнения несжимаемости

$$\frac{\partial y_{1\nu}}{\partial x_{1\nu}} + \frac{\partial y_{2\nu}}{\partial x_{2\nu}} + \frac{\partial y_{3\nu}}{\partial x_{3\nu}} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Поступила 23 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique. Comptes Rendus, t. 132, 1901.
2. Poincaré H. Sur la précéssion des corps déformables. Bulletin Astronomique, t. XXVII, 1910.
3. Четаев Н. Г. Sur les équations de Poincaré, Comptes Rendus, t. 185, 1927.
4. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре, ДАН СССР. сер. А., № 7, стр. 103, 1928.
5. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре, ПММ, т. V, в. 2, стр, 253, 1941.
6. Румянцев В. В. Уравнения движения твердого тела, имеющего полости, неполностью наполненные жидкостью, ПММ, т. XVIII, в. 6, 1954.
7. Суслов Г. К. Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.
8. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 1, Гостехиздат, 1949.
9. Лагранж Ж. Аналитическая механика, т. I, Гостехиздат. 1950.