Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ[1]

А. М. Кац

(Ленинград)

1. Введение. Одним из основных методов теории нелинейных колебаний является построение решений в виде рядов по степеням малого параметра ε, входящего в уравнения движения. Этот метод применим к двум типам систем: 1) к системам, которые при $\varepsilon = 0$ обращаются в линейные; 2) к системам, уравнения которых при $\varepsilon = 0$ остаются нелинейными, но имеют такой вид, что для них можно найти общее решение.

Исследования систем первого типа явились предметом многочисленных работ и имеют обширные технические применения, однако они обнаруживают лишь те свойства нелинейных колебаний, которые сохраняются при сколь угодно малой нелинейности. Исследования систем второго типа не связаны таким ограничением — это определяет их принципиальную и практическую ценность. Системы второго типа изучались в работах Л. С. Понтрягина [1], Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [2], автора [3] и И. Г. Малкина [4]. При этом в работах [3,4] рассматривались неавтономные системы, близкие к консервативным.

В работе [3] рассматривались колебания системы, уравнение движения которой имеет вид:

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon Q(t) - \varepsilon^s \beta \dot{x} \tag{1.1}$$

Работа [4] отличается большей общностью постановки задачи, строгостью и глубиной теоретических рассуждений, но полученные в ней формулы почти не использованы для анализа физических особенностей вынужденных нелинейных колебаний.

---

[1] Эта работа не была полностью закончена покойным А. М. Кацом. В настоящем ее виде она содержит девять параграфов из двенадцати параграфов, которые были указаны в сохранившемся оглавлении работы; эти девять параграфов, содержащие изложение метода решения, имелись в рукописи А. М. Каца; что же касается содержания § 10—11, посвященных примерам, то удалось обнаружить неполно изложенный пример колебаний первой степени (§ 10) и весьма краткое указание на пример колебаний второй степени (§ 11). Разработка этих материалов дана в статье Ю. М. Дроздова, публикуемой в настоящем номере журнала. Никаких записей, относящихся к § 12, не сохранилось; заключение составлено по конспекту сообщения, сделанного А. М. Кацом в мае 1953 г. Перечень литературы также не сохранился; он составлен не полностью на основании текста работы. Работу подготовили к печати Ю. М. Дроздов и А. И. Лурье.

В настоящей работе также рассматриваются неавтономные системы достаточного общего вида, близкие к консервативным. В ней показано, что в таких системах могут происходить периодические колебания различных видов, причем многие из этих видов не охватываются теорией И. Г. Малкина. Выявлены условия возбуждения разных колебаний и характер соответствующих резонансных кривых.[1]

2. Постановка задачи. Рассматриваем уравнение движения

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon, t) \tag{2.1}$$

в котором x — координата, t — время, ε — малый параметр, $F(x)$ — аналитическая функция от аргумента x, $f(x, \dot{x}, \varepsilon, t)$ — аналитическая функция от аргументов x, $\dot{x}$ и ε и периодическая функция от t с периодом T. При $\varepsilon = 0$ уравнение (2.1) переходит в уравнение свободных колебаний консервативной системы

$$\ddot{x}_0 + F(x_0) = 0 \tag{2.2}$$

Общее решение последнего уравнения

$$x_0 = x_0(t + \tau, \omega) \tag{2.3}$$

является периодическим с периодом $2\pi/\omega$ и зависит от двух параметров τ и ω, причем τ может принимать любые значения, а ω — значения в некотором интервале. Решение x_0 можеть быть найдено при помощи квадратур или различными приближенными способами. Мы будем считать его известным.

Будем искать периодическое решение уравнения (2.1), имеющее вид:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{2.4}$$

где x_0 — решение уравнения (2.2) вида (2.3) при

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.5}$$

и некотором значении τ, которое предстоит найти, $x_1, x_2, \ldots$ — периодические функции от t с периодом T.

Будем считать, что T — наименьший период решения x. Однако наименьшие периоды функций f и x_0 могуть быть и не равными T, а в целые числа раз меньшими. Если T в m раз больше наименьшего периода «возмущающей функции» f (причем имеется в виду периодичность f по явно входящему аргументу t) и в n раз больше наименьшего периода функции x_0, то будем говорить, что решение относится к виду $^m/_n$.

3. Дифференциальные уравнения для неизвестных $x_1, x_2, \ldots$ и условия существования периодического решения. Предположив, что ряд (2.4) — абсолютно и равномерно сходящийся, подставим его в выражения функций F и f. Получим

$$F(x) = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \ldots \tag{3.1}$$

$$f(x, \dot{x}, \varepsilon, t) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots$$

[1] Эта часть работы не обнаружена

где

$$
\begin{aligned}
&F_0 = F(x_0), \qquad F_{n+1} = F_0' x_{n+1} + \Phi_n(x_0,\ x_1, \ldots\ x_n) \qquad (n \geqslant 0) \\
&f_0 = f(x_0, \dot{x}_0, 0, t), \quad f_n = f_n(x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1, \ldots,\ x_n, \dot{x}_n,\ t) \qquad (n \geqslant 1)
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

через F_0' обозначена производная от F_0 по x_0. Развернутые выражения для функций F_n и f_n приведены ниже в разделе 4. Обозначим

$$
f_n - \Phi_n = g_n \tag{3.3}
$$

Подставляя выражения (3.1) в основное уравнение (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях, получим уравнение (2.2) для x_0 и бесконечную систему

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + F'(x_0)\, x_1 &= f_0(x_0,\ \dot{x}_0,\ t) \\
\ddot{x}_2 + F'(x_0)\, x_2 &= g_1(x_0,\ \dot{x}_0,\ x_1,\ \dot{x}_1,\ t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ddot{x}_{n+1} + F'(x_0)\, x_{n+1} &= g_n(x_0,\ \dot{x}_0,\ x_1,\ \dot{x}_1, \ldots,\ x_n, \dot{x}_n,\ t)
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

для остальных неизвестных. Все уравнения (3.4) — линейные, однородные с периодическими коэффициентами. Соответствующее однородное уравнение

$$
\ddot{y} + F'(x_0)\, y = 0 \tag{3.5}
$$

имеет два линейно независимых решения: периодическое решение

$$
y_1 = u = \dot{x}_0 \tag{3.6}
$$

и непериодическое решение

$$
y_2 = w = ut + v \tag{3.7}
$$

где v, как показано в работе [4], есть периодическое решение (с периодом $T = 2\pi / \omega$) линейного дифференциального уравнения

$$
\ddot{v} + F'(x_0)\ v = -2\dot{u} \tag{3.8}
$$

Если обозначить

$$
\omega(t + \tau) = z \tag{3.9}
$$

и представить x_0 как функцию от z и ω, то

$$
u = \omega \frac{\partial x_0(z, \omega)}{\partial z}, \qquad v = \omega \frac{\partial x_0(z,\ \omega)}{\partial \omega} \tag{3.10}
$$

Каждое из уравнений (3.4) имеет периодическое решение с периодом T лишь при условии, что правая часть его ортогональна к периодическому решению $\dot{x}_0$ однородного уравнения в интервале $(0,\ T)$, т. е.

$$
\int_0^T f_0 \dot{x}_0\, dt = 0, \quad \int_0^T g_1 \dot{x}_0 dt = 0, \ldots \quad \int_0^T g_m \dot{x}_0 dt = 0 \tag{3.11}
$$

При выполнении n-го условия (3.11) периодическое решение соответствующего n-го уравнения определено лишь с точностью до слагаемого вида $C_n \dot{x}_0$. Преобразуем условия (3.11) к более удобному виду. Для этого подставим выражения (2.4) и (3.1) в тождество

$$\int_0^T F(x)\dot{x}\,dt = 0 \tag{3.12}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях ε, получаем соотношения

$$\int_0^T \sum_{m=0}^{n} F_m \dot{x}_{n-m} dt = 0 \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{3.13}$$

которые могут быть переписаны так:

$$\int_0^T \left\{F_0\dot{x}_n + \sum_{m=0}^{n-1}(f_{m-1} - \ddot{x}_m)\dot{x}_{n-m} + [f_{n-1} - g_{n-1} + F_0'x_n]\dot{x}_0\right\} dt = 0 \tag{3.14}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}\int_0^T (F_0\dot{x}_n + F_0'\dot{x}_0 x_n)\,dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(F_0 x_n)\,dt = 0\\ \int_0^T \sum_{m=1}^{n-1} \ddot{x}_m \dot{x}_{n-m}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{m=1}^{n-1} (\ddot{x}_m\dot{x}_{n-m} + \dot{x}_m\ddot{x}_{n-m})\,dt = \\ = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{m=1}^{n-1} \frac{d}{dt}(\dot{x}_m\dot{x}_{n-m})\,dt = 0\end{gathered} \tag{3.15}$$

и заменяя m на $m+1$ и n на $n+1$, получаем

$$\int_0^T \left(\sum_{m=0}^{n} f_m\dot{x}_{n-m} - g_n\dot{x}_0\right) dt = 0 \tag{3.16}$$

Поэтому соотношения (3.11) эквивалентны следующим:

$$\int_0^T f_0\dot{x}_0 dt = 0, \qquad \int_0^T (f_0\dot{x}_1 + f_1\dot{x}_0)\,dt = 0, \qquad \int_0^T \sum_{m=0}^{n} f_m\dot{x}_{n-m}\,dt = 0 \tag{3.17}$$

Соотношения (3.17), которые играют существенную роль в дальнейшем изложении, выражают, что работа силы $\varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon, t)$ за период T при любом ε равна нулю. Действительно, левые части этих соотношений суть коэффиценты при различных степенях ε в левой части равенства

$$\int_0^T f(x, \dot{x}, \varepsilon, t)\dot{x}\,dt = 0 \tag{3.18}$$

4. Выражения для функций F_n и f_n и некоторые соотношения между ними. Выражения для F_n нетрудно получить, раскладывая $F(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots)$ в ряд Тейлора и собирая члены при ε^n. Таким способом получаем

$$\begin{gathered}F_1 = F'(x_0)x_1, \qquad F_2 = F'(x_0)x_2 + \frac{1}{2}F''(x_0)x_1^2\\ F_3 = F'(x_0)x_3 + F''(x_0)x_1x_2 + \frac{1}{6}F'''(x_0)x_1^3\end{gathered} \tag{4.1}$$

и вообще при $n \geqslant 2$

$$F_n = F'(x_0)\, x_n + \tfrac{1}{2} F''(x_0) \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{n-k} + \\ + \frac{1}{3!} F'''(x_0) \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k-1} x_l x_{k-l}\, x_{n-k} + \ldots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(x_0)\, x_1{}^n \tag{4.2}$$

Аналогично находим

$$f_1 = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \dot{x}_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right]_0$$

$$f_2 = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} x_2 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0{}^2} x_1{}^2 + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0 \partial \dot{x}_0} x_1 \dot{x}_1 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_0{}^2} \dot{x}_1{}^2 + \frac{\partial}{\partial x_0}\left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right]_0 x_1 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_0}\left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_0}\right] \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}\right]_0 \tag{4.3}$$

Общее выражение f_n довольно сложно, поэтому органичимся тем, что выпишем только те члены его, которые содержат x_n, $\dot{x}_n$, x_{n-1} и $\dot{x}_{n-1}$:

$$f_n(x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_n, \dot{x}_n, t) = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} x_n + \\ + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \dot{x}_n + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0{}^2} x_1 x_{n-1} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0 \partial \dot{x}_0} (x_1 \dot{x}_{n-1} + \dot{x}_1 x_{n-1}) + \\ + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_0{}^2} \dot{x}_1 \dot{x}_{n-1} + \frac{\partial}{\partial x_0}\left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right]_0 x_{n-1} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_0}\left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right]_0 \dot{x}_{n-1} + \ldots \tag{4.4}$$

В дальнейшем потребуются еще следующие соотношения, непосредственно получаемые из формул (4.1) — (4.4):

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F_0}{\partial x_0}, \qquad \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial F_n}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial F_1}{\partial x_0}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1{}^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1{}^2} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_0{}^2}$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f_0}{\partial x_0}, \qquad \frac{\partial f_n}{\partial \dot{x}_n} = \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}, \qquad \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_0}, \qquad \frac{\partial f_n}{\partial \dot{x}_{n-1}} = \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_0}$$
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1{}^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0{}^2}, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial \dot{x}_1} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0 \partial \dot{x}_0}, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial \dot{x}_1{}^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_0{}^2} \tag{4.5}$$

5. Выражения для неизвестных x_n. Неизвестные x_1, $x_2, \ldots$ последовательно определяются из линейных дифференциальных уравнений (3.4). Пользуясь способом вариации постоянных интегрирования, нетрудно получить решение n-го уравнения (3.4) в следующем виде:

$$x_n = K\left[u \int_0^t \left(\int_0^t u g_{n-1}\, dt - v g_{n-1} - D_n\right) dt + v \left(\int_0^t u g_{n-1}\, dt - D_n\right)\right] + C_n u \tag{5.1}$$

где D_n и C_n — постоянные интегрирования, K — постоянная, выражающаяся формулой

$$K = \frac{1}{u^2 - \dot{u} v + u \dot{v}} = \frac{2\pi}{\omega^2}\left(\frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{2\pi/\omega} \dot{x}_0{}^2\, dt\right)^{-1} \tag{5.2}$$

Постоянство величины $u^2 - \dot{u}v + u\dot{v} = u\dot{w} - \dot{u}w$ следует из общей теории линейных уравнений. Второе выражение для K получается из первого путем следующих преобразований:

$$\frac{1}{K} = u^2 - \dot{u}v + u\dot{v} = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}(u^2 - \dot{u}v + u\dot{v})\,dt =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}(u^2 + 2u\dot{v})\,dt = \frac{\omega^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial z}\right)^2 + 2\omega\frac{\partial x_0}{\partial z}\frac{\partial^2 x_0}{\partial\omega\,\partial z}\right]dz =$$

$$= \frac{\omega^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(\frac{\partial x_0}{\partial z}\right)^2\right]dz = \frac{\omega^2}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial x_0}{\partial z}\right)^2\omega\,dz = \frac{\omega^2}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\dot{x}_0^2 dt \qquad (5.3)$$

В дальнейшем нам потребуется знак выражения (5.3) или, что то же, знак K. Он может быть определен из следующих соображений. Обозначим через a и b наибольшее и наименьшее значения, принимаемые координатой x_0 при колебаниях. Тогда

$$\frac{d}{d\omega}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\dot{x}_0^2 dt = \frac{da}{d\omega}\frac{d}{da}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\dot{x}_0^2\,dt = 2\frac{da}{d\omega}\frac{d}{da}\int\limits_b^a\left(2\int\limits_x^a F(x)\,dx\right)^{1/2}dx =$$

$$= 2\frac{da}{d\omega}\int\limits_b^a F(a)\left(2\int\limits_x^a F(x)\,dx\right)^{-1/2}dx \qquad (5.4)$$

При этом $F(a) > 0$ и для корня нужно брать положительное значение; следовательно, определенный интеграл в (5.4) положителен и

$$\operatorname{sign} K = \operatorname{sign}\frac{d\omega}{da} \qquad (5.5)$$

Решение (5.1) является периодическим с периодом T, если выполняется соответствующее условие (3,11) и, кроме того,

$$D_n = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^t u g_{n-1}\,dt - v g_{n-1}\right)dt \qquad (5.6)$$

При выполнении этих условий решение n-го уравнения (3.4) остается периодическим при любом значении C_n. Действительное значение C_n определяется из условий периодичности (3.17) для последующих уравнений (3.4), как показано ниже в разделах 6 и 7.

Имея в виду дальнейшие приложения, удобно преобразовать формулу (5.1) следующим образом. Решение x_0 уравнения свободных колебаний (2.2) может быть представлено тригонометрическим рядом

$$x_0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos p\omega(t+\tau) = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p e^{ipz} \qquad (5.7)$$

в котором z—вещественная переменная, связанная с t формулой (3.9), A_p — известные вещественные функции от ω (некоторые из них могут равняться нулю), причем

$$A_{-p} = A_p \qquad (5.8)$$

Условимся в дальнейших формулах не указывать пределов суммирования, если эти пределы суть $-\infty$ и ∞. По формулам (3.10) находим

$$u = \dot{x}_0 = i \sum_p U_p e^{ipz}, \qquad v = \sum_p V_p e^{ipz} \tag{5.9}$$

где

$$U_p = \tfrac{1}{2}\omega p A_p, \quad U_{-p} = -U_p, \quad V_p = \tfrac{1}{2}\omega \frac{dA_p}{d\omega}, \quad V_{-p} = V_p \tag{5.10}$$

Периодическая функция g_{n-1} может быть также представлена тригонометрическим рядом в комплексной форме

$$g_{n-1} = \sum_p G_p e^{ipz} \tag{5.11}$$

Вводя в формулу (5.1) переменную z, приводим ее к виду

$$x_n = K\left[\frac{u}{\omega}\int_0^z\left(\frac{1}{\omega}\int_0^z u g_{n-1}dz - v g_{n-1} - D_n\right)dz + v\left(\frac{1}{\omega}\int_0^z u g_{n-1}\,dz - D_n\right)\right] + C_n u \tag{5.12}$$

где

$$D_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\omega}\int_0^z u g_{n-1}\,dz - v g_{n-1}\right)dz \tag{5.13}$$

Подставляя сюда выражения (5.9) и (5.11), находим последовательно

$$u g_{n-1} = i \sum_p U_p e^{ipz} \sum_m G_m e^{imz} = i \sum_r \Bigl(\sum_m U_{r-m} G_m\Bigr) e^{irz}$$

$$\frac{1}{\omega}\int_0^z u g_{n-1} dz = \Bigl[\sum_r{}' \Bigl(\frac{1}{r\omega}\sum_r U_{r-m}G_m\Bigr)\Bigr](e^{irz} - 1)$$

$$v g_{n-1} = \sum_p V_p e^{ipz} \sum_m G_m e^{imz} = \sum_r \Bigl(\sum_m V_{r-m} G_m\Bigr) e^{irz}$$

$$D_n = -\sum_r{}' \Bigl(\frac{1}{r\omega}\sum_m U_{r-m}G_m\Bigr) - \sum_m V_{-m}G_m$$

$$\frac{u}{\omega}\int_0^z\Bigl(\frac{1}{\omega}\int_0^z u g_{n-1}dz - v g_{n-1} - D_n\Bigr)dz =$$

$$= \frac{1}{\omega}\sum_p U_p e^{ipz} \sum_r{}' \frac{1}{r}\sum_m\Bigl(\frac{U_{r-m}}{r\omega} - V_{r-m}\Bigr)G_m(e^{irz} - 1) =$$

$$= \sum_q\sum_m\Bigl[\sum_r{}' \frac{(U_{q-r} - U_q)(U_{r-m} - r\omega V_{r-m})}{r^2\omega^2}\Bigr] G_m e^{iqz}$$

$$v\Bigl(\frac{1}{\omega}\int_0^z u g_{n-1}dz - D_n\Bigr) = \sum_p V_p e^{ipz}\sum_m G_m\Bigl(V_{-m} + \sum_r{}' \frac{U_{r-m}}{r\omega} e^{irz}\Bigr) =$$

$$= \sum_q\sum_m\Bigl(V_q V_{-m} + \sum_r{}' \frac{U_{r-m}V_{q-r}}{r\omega}\Bigr) G_m e^{iqz} \tag{5.14}$$

(Здесь штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по всем значениям индекса от $-\infty$ до $+\infty$, исключая нуль.)

Окончательно

$$x_n = \sum_q \Bigl(K \sum_m H_q{}^{(m)} G_m + C_n U_q\Bigr) e^{iqz} \tag{5.15}$$

где

$$H_q{}^{(m)} = V_q V_{-m} + \sum_r{}' \frac{(U_{q-r} - U_q)(U_{r-m} - r\omega V_{r-m}) + r\omega U_{r-m} V_{q-r}}{r^2\omega^2} \qquad (5.16)$$

причем

$$H_{-q}{}^{(-m)} = H_q{}^{(m)} \qquad (5.17)$$

Постоянную K при помощи формулы (5.3) можно также выразить через коэффициенты U_p и V_p, а именно

$$\frac{1}{K} = 2 \sum_{p=1}^{\infty} U_p (U_p + 2\, p\omega V_p) \qquad (5.18)$$

6. Построение периодического решения. Колебания первой степени. Левая часть первого равенства (3.17)

$$\int_0^T f_0 \dot{x}_0 dt = 0 \qquad (6.1)$$

вообще говоря, зависит от τ, и тогда это равенство может рассматриваться как уравнение с неизвестной τ. При этом могут представиться следующие случаи:

1) уравнение (6.1) не имеет вещественных корней;

2) уравнение (6.1) имеет простые вещественные корни;

3) уравнение (6.1) имеет также и кратные вещественные корни.

В первом случае уравнение (2.1) не имеет периодических решений искомого вида. Во втором и третьем случаях (как было показано для систем частного вида в работе [3] и для систем весьма общего вида в работе [4]) каждому простому корню τ соответствует периодическое решение. Двойной корень может рассматриваться как результат слияния двух простых корней при некотором особом значении какого-либо параметра системы. Обычно при изменении указанного параметра в одну сторону двойной вещественный корень переходит в два простых вещественных корня, и тогда существуют два периодических движения определенного вида. При изменении того же параметра в другую сторону двойной вещественный корень переходит в пару комплексных сопряженных корней, и тогда периодические движения данного вида становятся невозможными. Таким образом, наличие вещественного двойного (и вообще кратного) корня у уравнения (6.1) обычно характеризует границу существования периодических решений определенного вида. Исследование характера периодических решений в этом граничном случае не представляет особого интереса.

Покажем, как строится периодическое решение, соответствующее какому-либо определенному простому вещественному корню уравнения (6.1). Обозначим через x_{n1} значение x_n, вычисленное по формуле (5.15) при $C_n = 0$, а через f_{n1} — значение f_n, куда вместо x_n и $\dot{x}_n$ подставлены x_{n1} и $\dot{x}_{n1}$. Таким образом, с учетом формулы (4.4)

$$x_n = x_{n1} + C_n \dot{x}_0, \quad f_n = f_{n1} + C_n \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \ddot{x}_0 \right) \qquad (6.2)$$

Подставив эти выражения в (3.17), получим уравнение первой степени для определения C_n:

$$C_n \int_0^T \left(f_0 \ddot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \dot{x}_0{}^2 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \dot{x}_0 \ddot{x}_0 \right) dt +$$

$$+ \int_0^T \left(f_0 \dot{x}_{n1} + \sum_{m=1}^{n-1} f_m \dot{x}_{n-m} + f_{n1} \dot{x}_0 \right) dt = 0 \qquad (6.3)$$

Замечая, что

$$f_0 \ddot{x}_0 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \ddot{x}_0 \right) \dot{x}_0 = \frac{\partial}{\partial \tau} (f_0 \dot{x}_0) \qquad (6.4)$$

получаем окончательно

$$C_n = - \frac{\int\limits_0^T \left(f_0 \dot{x}_{n1} + \sum\limits_{m=1}^{n-1} f_m \dot{x}_{n-m} + f_{n1} \dot{x}_0 \right) dt}{\frac{\partial}{\partial \tau} \int\limits_0^T f_0 \dot{x}_0 dt} \qquad (6.5)$$

Если рассматриваемое значение τ есть простой корень уравнения (6.1), то знаменатель в формуле (6.5) отличен от нуля и все C_n могут быть последовательно определены, притом единственным образом. Следовательно, определяются единственным образом также и все x_n и искомое периодическое решение вида (2.4). *Колебания, рассмотренные в этом разделе, назовем колебаниями первой степени.*

7. Колебания высших степеней. Как показывают приведенные ниже примеры, возможны и представляют интерес случаи, когда при любом τ

$$\int_0^T f_0 \dot{x}_0 dt \equiv 0 \qquad (7.1)$$

Колебания, которые могут происходить в таких случаях, назовем колебаниями высших степеней. Так как при выполнении тождества (7.1)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^T f_0 \dot{x}_0 dt = 0 \qquad (7.2)$$

то первое равенство (6.3) с учетом (6.4) обращается в следующее:

$$\int_0^T (f_0 \dot{x}_{11} + f_{11} \dot{x}_0)\, dt = 0 \qquad (7.3)$$

В левую часть этого равенства входит одна неизвестная τ. Если эта часть не равна нулю тождественно при всех τ, то равенство (7.3) может рассматриваться как уравнение для определения τ. Покажем, что каждому простому корню этого уравнения соответствует одно периодическое решение вида (2.4).

Соответствующие колебания *назовем колебаниями второй степени.*

Рассмотрим второе равенство (6.3), которое принимает вид:

$$\int_0^T (f_0 \dot{x}_{21} + f_1 \dot{x}_1 + f_{21} \dot{x}_0)\, dt = 0 \qquad (7.4)$$

причем в левую часть этого равенства входит одна неизвестная C_1. Для того чтобы определить эту неизвестную, рассмотрим уравнение для определения x_{21}, совпадающее со вторым уравнением (3.4):

$$\ddot{x}_{21} + F'(x_0)\,x_{21} = -\Phi_1(x_0, x_1) + f_1(x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1, t) \tag{7.5}$$

Подставив в правую часть этого равенства

$$x_1 = x_{11} + C_1\dot{x}_0 \tag{7.6}$$

получим с учетом равенств (4.5)

$$\begin{gathered}\ddot{x}_{21} + F'(x_0)\,x_{21} = -\Phi_1(x_0, x_{11}) + f_1(x_0, \dot{x}_0, x_{11}, \dot{x}_{11}, t) - \\ - C_1\left[\frac{\partial\Phi_1(x_0, x_{11})}{\partial x_{11}}\dot{x}_0 - \frac{\partial f_1(x_0, \dot{x}_0, x_{11}, \dot{x}_{11}, t)}{\partial x_{11}}\dot{x}_0 - \frac{\partial f_1(x_0, \dot{x}_0, x_{11}, \dot{x}_{11}\, t)}{\partial \dot{x}_{11}}\ddot{x}_0\right] - \\ - \frac{C_1^2}{2}\frac{\partial^2\Phi_1(x_0, x_{11})}{\partial x_{11}^2}\dot{x}_0^2 = -\Phi_1(x_0, x_{11}) + f_1(x_0, \dot{x}_0, x_{11}, \dot{x}_{11}, t) - \\ - C_1\left[\frac{\partial F_1(x_0, x_{11})}{\partial x_0}\dot{x}_0 - \frac{\partial f_0(x_0, \dot{x}_0, t)}{\partial x_0}\dot{x}_0 - \frac{\partial f_0(x_0, \dot{x}_0, t)}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0\right] - \frac{C_1^2}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_0^2}\dot{x}_0^2\end{gathered} \tag{7.7}$$

Заметим, что в силу тождества (7.1) первое уравнение (3.4) имеет периодическое решение при любом τ, причем x_{11} может рассматриваться как функция от τ. Периодической будет и функция $\partial x_{11} / \partial\tau$ при любом значениии τ, в частности при значении τ, удовлетворяющем уравнению (7.3).

Дифференцируя уравнение (2.2) дважды по t и первое уравнение (3.4) по τ, получим

$$(\ddot{x}_0)^{\cdot\cdot} + F'(x_0)\,\ddot{x}_0 = -\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_0^2}\dot{x}_0^2 \tag{7.8}$$

$$\left(\frac{\partial x_{11}}{\partial\tau}\right)^{\cdot\cdot} + F'(x_0)\frac{\partial x_{11}}{\partial\tau} = -\frac{\partial F_1(x_0, x_{11})}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0(x_0, \dot{x}_0, t)}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0(x_0, \dot{x}_0\, t)}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0$$

Сравнивая эти равенства с (7.7), найдем, что

$$x_{21} = x_{22} + C_1\frac{\partial x_{11}}{\partial\tau} + \frac{C_1^2}{2}\ddot{x}_0 \tag{7.9}$$

где x_{22} — функция x_{21}, вычисленная при $C_1 = 0$.

Обозначим через f_{22} функцию f_2, в которой $x_1, \dot{x}_1$, x_2 и $\dot{x}_2$ заменены через x_{11}, $\dot{x}_{11}$, x_{21} и $\dot{x}_{22}$. Имеем

$$f_1 = f_{11} + C_1\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0\right)$$

$$\begin{gathered}f_{21} = f_{22} + C_1\left(\frac{\partial f_{11}}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_{11}}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial x_{11}}{\partial\tau} + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\frac{\partial^2 x_{11}}{\partial\tau\partial t}\right) + \\ + \frac{C_1^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2}\dot{x}_0^2 + 2\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0\partial\dot{x}_0}\dot{x}_0\ddot{x}_0 + \frac{\partial^2 f_0}{\partial\dot{x}_0^2}\ddot{x}_0^2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\ddot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial\dot{x}_0}\dddot{x}_0\right)\end{gathered} \tag{7.10}$$

Подставляя (7.6), (7.9) и (7.10) в равенство (7.4), получим уравнение для определения C_1 в развернутом виде:

$$\int_0^T (f_0\dot{x}_{22} + f_{11}\dot{x}_{11} + f_{22}\dot{x}_0)\,dt + a_1C_1 + \tfrac{1}{2}\,a_2C_1^2 = 0 \tag{7.11}$$

где

$$a_1 = \int_0^T \left[\frac{\partial^2 x_{11}}{\partial\tau\partial t} f_0 + f_{11}\ddot{x}_0 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0\right)x_{11} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial f_{11}}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_{11}}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial x_1}{\partial\tau} + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\frac{\partial^2 x_{11}}{\partial\tau\partial t}\right)\dot{x}_0\right]dt =$$

$$= \int_0^T \left(f_0\frac{\partial^2 x_{11}}{\partial\tau\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\dot{x}_0\dot{x}_{11} + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0\dot{x}_{11} + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_0}\dot{x}_0^2 + \frac{\partial f_{11}}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0\dot{x}_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_{11}}\frac{\partial x_1}{\partial\tau}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_{11}}{\partial \dot{x}_{11}}\frac{\partial \dot{x}_{11}}{\partial\tau} + f_{11}\ddot{x}_0\right)dt = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^T (f_0\dot{x}_{11} + f_{11}\dot{x}_0)\,dt \tag{7.12}$$

$$a_2 = \int_0^T \left[f_0\dddot{x}_0 + 2\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0\right)\ddot{x}_0 + \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2}\dot{x}_0^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0\partial \dot{x}_0}\dot{x}_0\ddot{x}_0 + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}_0^2}\ddot{x}_0^2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\ddot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\dddot{x}_0\right)\dot{x}_0\right]dt = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^T f_0\dot{x}_0\,dt = 0$$

Таким образом, получаем

$$C_1 = -\frac{\int_0^T (f_0\dot{x}_{22} + f_{11}\dot{x}_{11} + f_{22}\dot{x}_0)\,dt}{\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^T (f_0\dot{x}_{11} + f_{11}\dot{x}_0)\,dt} \tag{7.13}$$

Имея в виду, что при $n > 2$

$$x_{n1} = x_{n2} + C_{n-1}\frac{\partial x_{n-1,1}}{\partial\tau} \tag{7.14}$$

из n-го равенства (6.3)

$$\int_0^T \left(f_0\dot{x}_{n1} + \sum_{m=1}^{n-1} f_m\dot{x}_{n-m} + f_{n1}\dot{x}_0\right)dt = 0 \tag{7.15}$$

получаем

$$C_{n-1} = -\frac{\int_0^T \left(f_0\dot{x}_{n2} + f_1\dot{x}_{n-1,1} + \sum_{m=2}^{n-2} f_m\dot{x}_{n-m} + f_{n-1,1}\dot{x}_1 + f_{n2}\dot{x}_0\right)dt}{\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^T (f_0\dot{x}_{11} + f_{11}\dot{x}_0)\,dt} \tag{7.16}$$

Таким образом, для каждого τ, являющегося простым вещественным корнем уравнения (7.3), все коэффициенты C_n и, следовательно, все x_n и ряд (2.4) определяются единственным образом.

Рассмотрим еще весьма кратко колебания третьей степени. Они могут происходить, если одновременно выполняются два тождества:

$$\int_0^T f_0\dot{x}_0\,dt \equiv 0, \qquad \int_0^T (f_0\dot{x}_{11} + f_{11}\dot{x}_0)\,dt \equiv 0 \tag{7.17}$$

а уравнение

$$\int_0^T (f_0\dot{x}_{22} + f_{11}\dot{x}_{11} + f_{22}\dot{x}_0)\,dt = 0 \tag{7.18}$$

с неизвестной τ не удовлетворяется тождественно и имеет простые вещественные корни.

Каждому такому корню соответствует периодическое решение, причем коэффициенты C_n определяются по формуле, аналогичной (7.16):

$$C_{n-2} = \frac{\int\limits_0^T \left(f_0\dot{x}_{n3} + f_1\dot{x}_{n-1,2} + f_2\dot{x}_{n-2,1} + \sum\limits_{m=3}^{n-3} f_m\dot{x}_{n-m} + f_{n-2,1}\dot{x}_2 + f_{n-1,2}\,\dot{x}_1 + f_{n3}\dot{x}_0\right) dt}{\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^T (f_0\dot{x}_{21} + f_{11}\dot{x}_{11} + f_{22}\dot{x}_0)\, dt} \tag{7.19}$$

Нетрудно написать аналогичные формулы для колебаний любой степени.

Проведенные рассуждения следовало бы дополнить доказательством существования периодического решения. Без этого доказательства нельзя, строго говоря, утверждать, что ряд (2.4) сходится абсолютно и равномерно (при достаточно малых ε) и представляет собой не только формальное, но и фактическое решение уравнения (2.1).

Для колебаний первой степени такое доказательство дано в работе [4]. В работе [3] для колебаний первой степени системы частного вида (1.1) дана оценка радиуса сходимости ряда (2.4).

Распространение этих доказательств на колебания высших степеней, повидимому, возможно, но встречает большие затруднения.

8. Устойчивость колебаний первой степени. Поставим себе задачей исследовать устойчивость периодических решений уравнения (2.1) при достаточно малых ε.

Составим для уравнения (2.1) уравнение в вариациях, заменив x на $x + \xi$ и приравняв затем нулю сумму всех членов первой степени относительно ξ и его производных. Получим

$$\ddot{\xi} - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}\dot{\xi} + \left(\frac{dF}{dx} - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}\right)\xi = 0 \tag{8.1}$$

Уравнение (8.1) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами, имеющими период T. Такое уравнение всегда имеет два частных решения вида

$$\xi = e^{pt}\varphi \tag{8.2}$$

где p — постоянное число, φ — функция от t с периодом T. Величины

$$\rho = e^{pT} \tag{8.3}$$

суть корни характеристичного уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (8.1).

Как показано Ляпуновым [5], характеристичное уравнение имеет вид:

$$\rho^2 - 2A\rho + B = 0 \tag{8.4}$$

где A и B могут быть представлены в виде рядов по степеням ε, причем $A = B = 1$ при $\varepsilon = 0$:

$$A = 1 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \cdots, \qquad B = 1 + \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + \cdots \tag{8.5}$$

Будем считать для определенности, что $\varepsilon > 0$, и обозначим

$$\sqrt{\varepsilon} = \delta \tag{8.6}$$

Тогда ρ представляется рядом по степеням δ:

$$\rho = A \pm \sqrt{A^2 - B} = 1 \pm \sqrt{2\alpha_1 - \beta_1}\,\delta + \alpha_1\delta^2 \pm \cdots \tag{8.7}$$

и, следовательно, p также представится рядом по степеням δ:

$$p = p_1\delta + p_2\delta^2 + p_3\delta^3 + \cdots \tag{8.8}$$

Будем искать функцию φ также в виде ряда

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1\delta + \varphi_2\delta^2 + \varphi_3\delta^3 + \cdots \tag{8.9}$$

в котором $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — функции времени с периодом T.

Подставляя выражение (8.2) в уравнение (8.1), получаем дифференциальное уравнение для φ:

$$\ddot{\varphi} + \left(2p - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\dot{\varphi} + \left(p^2 - \varepsilon p\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial F}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}\right)\varphi = 0 \tag{8.10}$$

Подставляя сюда выражения (8.8) и (8.9) и приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях δ, получаем бесконечную систему уравнений, из которых выписываем пока первые четыре:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}_0 + F_0'\varphi_0 = 0\\
&\ddot{\varphi}_1 + F_0'\varphi_1 = -2p_1\dot{\varphi}_0\\
&\ddot{\varphi}_2 + F_0'\varphi_2 = -\left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right)\dot{\varphi}_0 - 2p_1\dot{\varphi}_1 - \left(p_1^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_0} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)\varphi_0\\
&\ddot{\varphi}_3 + F_0'\varphi_3 = -2p_3\dot{\varphi}_0 - \left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right)\dot{\varphi}_1 - 2p_1\dot{\varphi}_2 -\\
&\qquad - p_1\left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right)\varphi_0 - \left(p_1^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_0} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)\varphi_1
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Первые два уравнения имеют периодические решения

$$\varphi_0 = \dot{x}_0 = u, \quad \varphi_1 = p_1 v \tag{8.12}$$

Для того чтобы третье уравнение имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^T \left[\left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right)\dot{\varphi}_0 + 2p_1\dot{\varphi}_1 + \left(p_1^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_0} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)\varphi_0\right]\dot{x}_0\,dt = 0 \tag{8.13}$$

С учетом (8.12) получаем отсюда

$$p_1^2\int_0^T (\dot{x}_0 + 2\dot{v})\,\dot{x}_0\,dt + \int_0^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0}\dot{x}_0 - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\dot{x}_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0\right)\dot{x}_0\,dt = 0 \tag{8.14}$$

Выражения определенных интегралов, входящие в это равенство, могут быть упрощены.

Именно из (5.3) следует

$$\int_0^T (\dot{x}_0 + 2\dot{v})\,\dot{x}_0 dt = \frac{2\pi}{K\omega} \tag{8.15}$$

Далее

$$\frac{d}{dt} F_0' = F_0'' \dot{x}_0$$

$$\int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial x_0} \dot{x}_0^2 dt = \int_0^T F_0'' x_1 \dot{x}_0^2\, dt = -\int_0^T F_0' (x_1 \ddot{x}_0 + \dot{x}_1 \dot{x}_0)\, dt =$$

$$= -\int_0^T (F_0' x_1 \ddot{x}_0 - F_0 \ddot{x}_1)\, dt = -\int_0^T \ddot{x}_0 (\ddot{x}_1 + F_0' x_1)\, dt = -\int_0^T f_0 \ddot{x}_0 dt \tag{8.16}$$

$$\int_0^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0} \dot{x}_0 - \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \dot{x}_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \ddot{x}_0\right) \dot{x}_0 dt =$$

$$= -\int_0^T \left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \ddot{x}_0\right) \dot{x}_0 + f_0 \ddot{x}_0\right] dt = -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^T f_0 \dot{x}_0\, dt$$

Таким образом получаем окончательное выражение для p_1^2:

$$p_1^2 = \frac{K\omega}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^T f_0 \dot{x}_0 dt \tag{8.17}$$

Если $p_1^2 > 0$, то одно из значений p_1 положительно и рассматриваемые колебания неустойчивы.

Если же $p_1^2 < 0$, то оба значения p_1 чисто мнимы и устойчивость зависит от знака вещественной части p_2.

Для нахождения p_2 составим условие существования периодического решения у четвертого уравнения (8.11):

$$\int_0^T \Big[2p_3 \dot{\varphi}_0 + \left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right) \dot{\varphi}_1 + 2p_1 \dot{\varphi}_2 + \tag{8.18}$$

$$+ p_1 \left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right) \varphi_0 + \left(p_1^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_0} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right) \varphi_1 \Big] \dot{x}_0 dt = 0$$

Умножим второе уравнение (8.11) на φ_2, вычтем из него третье уравнение (8.11), умноженное на φ_1, и затем проинтегрируем обе части по t в пределах от 0 до T. Замечая, что

$$\int_0^T (\ddot{\varphi}_1 \varphi_2 - \ddot{\varphi}_2 \varphi_1)\, dt = \int_0^T \frac{d}{dt} (\dot{\varphi}_1 \varphi_2 - \dot{\varphi}_2 \varphi_1)\, dt = 0 \tag{8.19}$$

получим (8.20)

$$\int_0^T \left[\left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right) \dot{\varphi}_0 \varphi_1 + 2p_1 \dot{\varphi}_1 \varphi_1 + \left(p_1^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_0} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right) \varphi_0 \varphi_1 - 2p_1 \dot{\varphi}_0 \varphi_2\right] dt = 0$$

Вычитая (8.20) из (8.18) и имея в виду (8.12), получаем

$$p_1 \int_0^T \left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right)(u^2 - \dot{u}v + u\dot{v})\,dt = 0 \tag{8.21}$$

Выражение во вторых скобках под интегралом представляет собой постоянную величину. Поэтому, если $p_1 \neq 0$, то

$$p_2 = \frac{1}{2T}\int_0^T \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\,dt \tag{8.22}$$

При этом значение p_2 всегда вещественно.

Достаточными условиями устойчивости будут неравенства

$$p_1^2 < 0, \qquad p_2 < 0 \tag{8.23}$$

Если одно из этих неравенств изменяет знак, то рассматриваемые колебания неустойчивы. Если же одно неравенство обращается в равенство, то имеем сомнительный случай, требующий дальнейшего исследования.

С учетом соотношения (5.5) условия устойчивости могут быть записаны в следующем окончательном виде:

$$\frac{d\omega}{da}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^T f_0\dot{x}_0\,dt < 0, \qquad \int_0^T \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\,dt < 0 \tag{8.24}$$

В работе [4] выведены иным путем условия устойчивости колебаний первой степени для систем более общего вида. Конечно, формулы (8.24) могут быть получены из этих условий как частный случай. Еще более частный случай этих условий (для систем, описываемых уравнением (1.1) при $s = 1$) был выведен в работе [3].

Рассмотрим теперь некоторые случаи, когда одно из неравенств (8.24) обращается в равенство. Если рассматриваемое решение соответствует простому корню уравнения (6.1), то второй сомножитель в левой части первого неравенства (8.24) не равен нулю. Первый сомножитель может обращаться в нуль при некоторых особых значениях амплитуды свободных колебаний, близких к рассматриваемым вынужденным. При этих значениях происходит переход устойчивых движений в неустойчивые, и наоборот. Нет необходимости в более детальном рассмотрении таких граничных случаев.

Рассмотрим теперь случай, когда второе неравенство (8.24) обращается в равенство.

Уравнение в вариациях (8.1) при помощи подстановки

$$\xi = \zeta \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\,dt\right) \tag{8.25}$$

преобразуется к виду

$$\ddot{\zeta} + \left[\frac{dF}{dx} - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)^2\right]\zeta = 0 \tag{8.26}$$

Каждому решению уравнения (8.1) вида (8.2) соответствует решение уравнения (8.26) вида

$$\zeta = e^{qt}\,\psi \tag{8.27}$$

где q — постоянное число, связанное с p соотношением

$$p = q + \frac{\varepsilon}{2T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\,dt \tag{8.28}$$

а ψ — функция от t с периодом T; при этом q может быть представлено рядом

$$q = q_1\delta + q_2\delta^2 + q_3\delta^3 + \cdots \tag{8.29}$$

Подставляя (8.8) и (8.29) в (8.28) и имея в виду (8.6), находим

$$\begin{aligned}
&p_1 = q_1, && p_2 = q_2 + \frac{1}{2T}\int_0^T \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\,dt\\
&p_3 = q_3, && p_4 = q_4 + \frac{1}{2T}\int_0^T \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}}\,dt\\
&\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{2n-1} = q_{2n-1}, && p_{2n} = q_{2n} + \frac{1}{2T}\int_0^T \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \dot{x}}\,dt
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Известно, что если линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами не содержит члена с первой производной, то в соответствующем характеристичном уравнении вида (8.4) коэффициент $B = 1$. Следовательно, корни этого уравнения могут быть либо вещественными и взаимно обратными числами (притом положительными при достаточно малых ε), либо комплексными сопряженными, с модулями, равными единице.

Соответствующие этим корням два значения q равны по абсолютной величине и обратны по знаку, причем они могут быть либо вещественными, либо чисто мнимыми.

Если значения $p_1 = q_1$ чисто мнимые, то при достаточно малых ε значения q должны быть также чисто мнимыми, следовательно, устойчивость определяется знаком вещественной части p:

$$\operatorname{Re} p = \frac{\varepsilon}{2T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\,dt = \frac{1}{2T}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1}\int_0^T \frac{\partial f_n}{\partial \dot{x}_0}\,dt \tag{8.31}$$

Если

$$\int_0^T \frac{\partial f_n}{\partial \dot{x}_0}\,dt \begin{cases} = 0, & n = 0, 1, \ldots l-1\\ \neq 0, & n = l\end{cases} \tag{8.32}$$

то условия (8.24) могут быть заменены следующими, более общими:

$$\frac{d\omega}{da}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T f_0 \dot{x}_0\,dt < 0, \qquad \int_0^T \frac{\partial f_l}{\partial \dot{x}_0}\,dt < 0 \tag{8.33}$$

9. Устойчивость колебаний высших степеней. Для колебаний второй степени на основании формул (8.18) и (7.2)

$$p_1 = 0 \tag{9.1}$$

и, кроме того, формула (8.22) недействительна, так как в предшествующей формуле (8.21) нельзя производить сокращения на p_1.

Выпишем первые пять уравнений для функций φ_k при $p_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}_0 + F_0' \varphi_0 = 0\\
&\ddot{\varphi}_1 + F_0' \varphi_1 = 0\\
&\ddot{\varphi}_2 + F_0' \varphi_2 = -\left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right)\dot{\varphi}_0 - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)\varphi_0\\
&\ddot{\varphi}_3 + F_0' \varphi_3 = -2 p_3 \dot{\varphi}_0\\
&\ddot{\varphi}_4 + F_0' \varphi_4 = -\left(2p_4 - \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_0}\right)\dot{\varphi}_0 - \left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right)\dot{\varphi}_2 -\\
&\qquad -\left(p_2^2 - p_2\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} + \frac{\partial F_2}{\partial x_0} - \frac{\partial f_1}{\partial x_0}\right)\varphi_0 - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)\varphi_2
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Первые четыре уравнения имеют периодические решения:

$$\varphi_0 = \dot{x}_0 = u, \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = p_2 v + \frac{\partial x_1}{\partial \tau}, \qquad \varphi_3 = p_3 v \tag{9.3}$$

Заметим, что при написании последних двух уравнений (9.2) мы уже воспользовались тем, что $\varphi_1 = 0$.

Для нахождения p_2 составим условие существования периодического решения у пятого уравнения (9.2):

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Big[\left(2p_4 - \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_0}\right)\dot{\varphi}_0 + \left(2p_2 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\right)\dot{\varphi}_2 + \left(p_2^2 - p_2\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} + \frac{\partial F_2}{\partial x_0} - \frac{\partial f_1}{\partial x_0}\right)\varphi_0 +\\
+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)\varphi_2\Big]\dot{x}_0\,dt = 0
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Член, содержащий p_4, обращается в нуль при интегрировании, и уравнение (9.4) принимает вид:

$$b_0 p_2^2 + b_1 p_2 + b_2 = 0 \tag{9.5}$$

где

$$b_0 = \int_0^T (\dot{x}_0 + 2\dot{v})\,\dot{x}_0\,dt = \frac{2\pi}{K\omega} \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^T \left(2\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\dot{v} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0} v + \frac{\partial F_1}{\partial x_0} v - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\dot{x}_0\right)\dot{x}_0\,dt\\
b_2 &= \int_0^T \Big(-\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial F_2}{\partial x_0}\dot{x}_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_0}\dot{x}_0 +\\
&\qquad + \frac{\partial F_1}{\partial x_0}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} - \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\Big)\dot{x}_0\,dt
\end{aligned} \tag{9.7}$$

Вычитая из уравнения [ср. второе уравнение (7.8)]

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right)^{\cdot\cdot} + F_0{}' \frac{\partial x_1}{\partial \tau} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0 \tag{9.8}$$

умноженного на v, уравнение (3.8)

$$\ddot{v} + F_0{}' v = -2\ddot{x}_0 \tag{9.9}$$

умноженное на $\partial x_1 / \partial \tau$, и интегрируя затем обе части по t от 0 до T, получаем

$$\int_0^T \left(-\frac{\partial F_1}{\partial x_0} v\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_0} v\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} v\ddot{x}_0 + 2\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \tau}\ddot{x}_0\right) dt = 0 \tag{9.10}$$

Складывая это равенство с первым равенством (9.7), получаем

$$b_1 = -\int_0^T \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}(\dot{x}_0{}^2 - \dot{x}_0\dot{v} + \ddot{x}_0 v)\, dt = -\frac{2\pi}{K\omega}\int_0^T \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\, dt \tag{9.11}$$

Далее

$$\int_0^T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial F_1}{\partial x_0}\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right)\dot{x}_0\, dt = \int_0^T \left[F_0''\dot{x}_0 x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}(F_0'' x_1^2)\right]\dot{x}_0\, dt =$$

$$= \int_0^T (F_0''\dot{x}_0^2 x_2 - \frac{1}{2}F_0'' x_1^2 \ddot{x}_0)\, dt + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T F_0'' x_1^2 \dot{x}_0\, dt \tag{9.12}$$

Вычитая из первого уравнения

$$(\ddot{x}_0)^{\cdot\cdot} + F_0'\ddot{x}_0 = -F_0''\dot{x}_0^2 \tag{9.13}$$

умноженного на x_2, второе уравнение (3.4)

$$\ddot{x}_2 + F_0' x_2 = -\frac{1}{2}F_0'' x_1^2 + f_1 \tag{9.14}$$

умноженное на $\ddot{x}_0$, и интегрируя по t от 0 до T, получим

$$\int_0^T \left(-F_0''\dot{x}_0^2 x_2 + \frac{1}{2}F_0'' x_1^2 \ddot{x}_0 - f_1\ddot{x}_0\right) dt = 0 \tag{9.15}$$

Второй член выражения (9.12) равен

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T F_0'' x_1^2 \dot{x}_0\, dt = -\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T F_0' x_1 \dot{x}_1\, dt =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T (f_0 - \ddot{x}_1)\dot{x}_1\, dt = -\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T f_0 \dot{x}_1\, dt \tag{9.16}$$

и, следовательно,

$$\int_0^T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial F_1}{\partial x_0}\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right)\dot{x}_0\, dt = -\int_0^T (f_1\ddot{x}_0 + f_0\dot{x}_1)\, dt \tag{9.17}$$

Замечая еще, что на основании формул (4.5)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f_1}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_0}\dot{x}_0 + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_0}\ddot{x}_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \tau} = \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \end{aligned} \tag{9.18}$$

находим, что

$$\begin{aligned} b_2 &= -\int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau}\dot{x}_0 + f_1\ddot{x}_0\right) dt - \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T f_0\dot{x}_1\, dt = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T (f_0\dot{x}_1 + f_1\dot{x}_0)\, dt \end{aligned} \tag{9.19}$$

Рассматриваемые колебания устойчивы, если вещественные части обоих значений p_2 отрицательны. Для этого должно быть

$$\frac{b_1}{b_0} > 0, \qquad \frac{b_2}{b_0} > 0 \tag{9.20}$$

В окончательном виде условия устойчивости напишутся так:

$$\frac{d\omega}{da}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T (f_0\dot{x}_1 + f_1\dot{x}_0)\, dt < 0, \qquad \int_0^T \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0}\, dt < 0 \tag{9.21}$$

Если первое неравенство (9.21) имеет место, а второе обращается в равенство, то значения p_2 чисто мнимые. Из рассуждений, приведенных в конце предыдущего раздела, следует, что в этом случае условия (9.21) заменяются следующими:

$$\frac{d\omega}{da}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T (f_0\dot{x}_1 + f_1\dot{x}_0)\, dt < 0, \qquad \int_0^T \frac{\partial f_l}{\partial \dot{x}_0}\, dt < 0 \tag{9.22}$$

где попрежнему выбор функции f_l определяется условиями (8.32).

Сопоставление формул (8.24), (8.33), (9.21), (9.22), а также не приведенных здесь формул для некоторых случаев колебаний третьей степени приводит к выводу, что необходимые и достаточные условия устойчивости колебаний любой степени при достаточно малых ε должны иметь следующий вид:

$$\frac{d\omega}{da}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^T f\dot{x}\, dt\right) < 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^l}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\, dt\right) < 0 \tag{9.23}$$

где для k и l должны быть взяты значения, при которых соответствующие пределы отличны от нуля. Конечно, первое условие (9.23) требует еще строгого доказательства.

Заключение[1]. Приводимая ниже таблица дает сравнительную сводку результатов исследований колебаний неавтономной системы, близкой к консервативной.

---

[1] См. сноску на стр. 13.

Уравнения колебаний			I	II	III
Колебания первой степени	Построение решения		+	+	+
	Сходимость		+	+	—
	Устойчивость		+	+	+
	Примеры	основные	+	+	+*
		субгармонические	+	—	+
Колебания высших степеней	Построение решения		+	—	+
	Сходимость		—	—	—
	Устойчивость		—	—	+
	Примеры	субгармонические	—	—	+*
		ультрагармонические	—	—	+

* См. работу Ю. М, Дроздова, публикуемую в настоящем выпуске журнала (стр. 33—40).

В первом столбце указаны результаты, полученные автором в его кандидатской диссертации (1938 г.) для уравнения

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon Q(t) - \varepsilon^s \beta \dot{x} \tag{I}$$

во втором — И. Г. Малкиным в монографии [4] для уравнений

$$\dot{x} = -\lambda y + X(x, y) + \varepsilon f(x, y, \varepsilon, t)$$

$$\dot{y} = +\lambda x + Y(x, y) + \varepsilon F(x, y, \varepsilon, t) \tag{II}$$

в третьем — автором в настоящей работе для уравнения

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon, t) \tag{III}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым, ЖЭТФ, т. IV, стр. 883—885, 1934.
2. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Méthodes approchées de la mécanique non linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques. Изд. ВУАН, Киев, 1935.
3. Кац А. М. Вынужденные нелинейные колебания. Кандидатская диссертация. Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина, 1938.
4. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1949.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.