Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. М. Смирнов

(Ленинград)

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = b\,(T - \theta), \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = -a\,(T - \theta) \tag{1}$$

при условиях

$$T\,|_{y=0} = 1, \qquad \theta\,|_{x=0} = 0 \tag{2}$$

где $T(x, y)$ и $\theta(x, y)$ безразмерные температуры двух потоков жидкости, текущих соответственно в направлении оси y' и оси x'; a и b постоянные, зависящие от площади обтекаемой поверхности нагрева и от коэффициентов теплопроводности и теплоемкости, x и y безразмерные переменные.

Задача (1), (2) была решена Нуссельтом[1,2]. Мы дадим более простой способ решения этой задачи, используя работу Н. П. Еругина [3].

Исключая $\theta(x, y)$ из системы (1), получим для $T(x, y)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y} + a\frac{\partial T}{\partial x} + b\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

при условиях

$$T\,|_{x=0} = e^{-ay}, \qquad T\,|_{y=0} = 1 \tag{4}$$

Полагая

$$T(x, y) = e^{-ay-bx}u, \qquad \xi = ax, \qquad \eta = by \tag{5}$$

получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = u \tag{6}$$

$$u\,|_{\xi=0} = 1, \qquad u\,|_{\eta=0} = \exp\frac{b\xi}{a} \tag{7}$$

Для решения задачи (6), (7) воспользуемся общим решением уравнения (6), полученным в работе [3].

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi \psi_1(t)\,J_0\left(2i\sqrt{\eta(\xi - t)}\right)dt + \int_0^\eta \psi_2(t)\,J_0\left(2i\sqrt{\xi(\eta - t)}\right)dt + u(0, 0)\,J_0\left(2i\sqrt{\xi\eta}\right) \tag{8}$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ произвольные функции.

Принимая во внимание условия (7), легко получаем, что

$$\psi_1(t) = \frac{b}{a}\exp\frac{bt}{a}, \qquad \psi_2(t) = 0$$

Подставляя найденные функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ в общее решение (8), будем иметь

$$u(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} \frac{b}{a} J_0(2i\sqrt{\eta(\xi - t)}) \exp \frac{bt}{a} dt + J_0(2i\sqrt{\xi\eta})$$

или, в силу (5),

$$T(x, y) = e^{-ay-bx} \left[b\int_0^x e^{bt} J_0(2i\sqrt{aby(x-t)})\, dt + J_0(2i\sqrt{abxy}) \right] \tag{9}$$

Из второго уравнения системы (1) легко находится функция

$$\theta(x, y) = -ie^{-ay=bx} \left[b^2 \int_0^x e^{bt} J_1(2i\sqrt{aby(x-t)}) \frac{(x-t)\,dt}{\sqrt{aby(x-t)}} + \frac{bxJ_1(2i\sqrt{abxy})}{\sqrt{abxy}} \right] \tag{10}$$

Функции $T(x, y)$ и $\theta(x, y)$, определяемые формулами (9) и (10), являются решением задачи (1) — (2).

Поступила 19 V 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Nußelt W. Der Wärmeübergang im Kreuzstrom. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 55, № 48, 1911.
2. Nußelt W. Eine neue Formel für den Wärmedurchgang im Kreuzstrom. Technische Mechanik und Thermodynamik. Bd. 1, № 12, 1930.
3. Еругин Н. П. Функционально-инвариантные решения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Ученые записки ЛГУ, серия математических наук, вып. 16, 1949.