Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ВИДОИЗМЕНЕНИИ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Е. В. Вороновская

(Ленинград)

Метод приближенного интегрирования Чаплыгина[1] при своей большой теоретической ценности мало используется практически даже для уравнений первого порядка.

Метод интересен прежде всего исключительной быстротой сходимости приближений $y_n(x)$ к искомому интегралу $y(x)$; однако вычисления настолько громоздки и так быстро усложняются в процессе итерации, что практически представление интеграла в аналитической форме затруднительно даже при $n = 2$.

Предлагаемая заметка ставит себе задачу, сохраняя основные идеи метода Чаплыгина, выбрать линейчатую поверхность так, чтобы увеличилась быстрота сходимости интегральных приближений, и чтобы можно было за счет полученной добавочной точности упростить окончательные квадратуры, достигнув приемлемого для инженера приближения при $n = 1$.

§ 1. Погрешности при замене линейными уравнениями. Прежде всего напомним постановку задачи, данную Чаплыгиным, и его дифференциальные неравенства.

Ищется интеграл уравнения вида

$$y' = F(x, y) \tag{1.1}$$

удовлетворяющий начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Задано, что $\partial^2 F / \partial y^2$ непрерывна и знакопостоянна; это обеспечивает существование и единственность искомого интеграла.

Положим, известны два «начальных» приближения $a(x)$ и $b(x)$, также проходящие через точку (x_0, y_0), причем

$$a(x) < y(x) < b(x)$$

Метод основывается на следующих неравенствах Чаплыгина. Пусть $u(x)$ удовлетворяет условию $u(x_0) = y_0$, тогда при $x_0 < x$ справедливы следующие соотношения:

$$u(x) < y(x), \qquad \text{если} \quad u' - F(x, u) < 0 \tag{1.2}$$

$$y(x) < u(x), \qquad \text{если} \quad u' - F(x, u) > 0 \tag{1.3}$$

при $x < x_0$ неравенства переставляются.

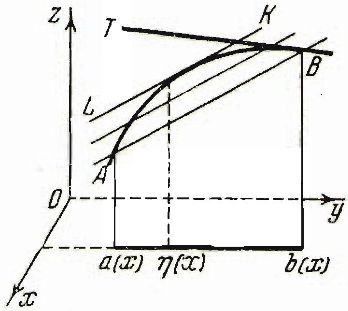
Из этих неравенств вытекает следующее следствие. Если найдены любые две поверхности $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, удовлетворяющие условиям $\varphi(x, y) < F(x, y) < \psi(x, y)$, и два приближения $u_0(x) < y(x) < v_0(x)$ с теми же начальными условиями, и если $\varphi(x, u_0) = F(x, u_0)$ и $\psi(x, v_0) = F(x, v_0)$, то $u_1(x)$ и $v_1(x)$ — интегралы уравнений $u'(x) = \varphi(x, u)$ и $v'(x) = \psi(x, v)$, удовлетворяющие тем же начальным условиям, дают

$$u_0(x) < u_1(x) < y(x) < v_1(x) < v(x)$$

т. е. являются следующими приближениями для $y(x)$.

Основная идея Чаплыгина состоит в получении этих следующих приближений заменой поверхности $z = F(x, y)$ двумя линейчатыми поверхностями вида

$$z = \varphi(x) y + \psi(x)$$



Фиг. 1

следовательно, уравнения (1.1) — линейными уравнениями вида

$$y' = \varphi(x) y + \psi(x)$$

с оценкой погрешности этой замены.

В качестве таких поверхностей Чаплыгин выбирает две линейчатые поверхности: поверхность, образованную движением (фиг. 1) касательной в некоторой точке B, и поверхность, образованную движением хорды AB (движение параллельно плоскости yOz). На фиг. 1 изображено сечение поверхности $z = F(x, y)$ при $\partial^2 F / \partial y^2 < 0$ плоскостью $x = \text{const}$.

Вместо того чтобы исследовать погрешности от такой замены на самой поверхности и на интегральных кривых, мы найдем эти погрешности в случае замены $F(x, y)$ любой линейчатой поверхностью вида

$$z = \varphi(x) y + \psi(x)$$

над площадкой $a(x) \leqslant y \leqslant b(x)$ и $x_0 \leqslant x \leqslant l$.

Обозначим δ погрешность на поверхности и ρ — погрешность для интеграла; тогда уравнение (1.1) запишется

$$y' = \varphi(x) y + \psi(x) + \delta \tag{1.4}$$

Положим $y = w + \rho$, где w — интеграл линейного уравнения. Имеем

$$w' = \varphi(x) w + \psi(x) \qquad \rho' = \varphi(x) \rho + \delta \tag{1.5}$$

два линейных уравнения с начальными условиями $w(x_0) = y_0$, $\rho(x_0) = 0$.

Их соответственные интегралы даются формулами

$$\rho = \int_{x_0}^{x} \delta \left(\exp \int_{t}^{x} \varphi(\alpha)\, d\alpha \right) dx, \qquad w = y_0 \exp \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} \psi(t) \left(\exp \int_{t}^{x} \varphi(\alpha)\, d\alpha \right) dt \tag{1.6}$$

Желательно получить возможно малое ρ. Его величина зависит от выбора величин δ и φ. Рассмотрим прежде всего влияние δ.

§ 2. Чебышевская линейчатая поверхность наилучшего приближения. Величина δ представляет собой остаточный член линейной интерполяции и дается формулой

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x, \eta)}{\partial y^2} (y - y_1)(y - y_2) \tag{2.1}$$

где y_1 и y_2 — узлы интерполяции и η — некоторое среднее значение для y.

Заметим, что в общем случае любой линейчатой поверхности чаплыгинские неравенства уже не выполняются, и интеграл первого из уравнений (1.5) может пересекать искомую кривую $y(x)$.

Так как сама эта кривая может как угодно отклоняться между крайними кривыми $a(x)$ и $b(x)$, то, желая гарантировать $\delta_{\min}$ при всех возможных расположениях $y(x)$, надо выбрать равномерно наилучшее приближение.

Так как величина $\partial^2 F / \partial y^2$ по условию знакопостоянна, то $\delta_{\min}$ получится для линейчатой поверхности, образованной движением секущей, средней между хордой AB и параллельной ей касательной LK (фиг. 1), так как для нее максимум модуля отклонения достигается три раза с чередующимися знаками.

Обозначив в этом случае $\delta = E$ и $\rho = \omega$, получим

$$|E| < \frac{1}{16} \max_{[a,b]} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| [b(x) - a(x)]^2 \tag{2.2}$$

В случае, если взята поверхность, образованная касательной, погрешность δ оценится формулой

$$|\delta| < \frac{1}{2} \max_{[a,b]} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| [b(x) - a(x)]^2 \tag{2.3}$$

Положим в (1.5) для секущей $\varphi = \varphi_1$, а для касательной $\varphi = \varphi_2$.

Переходя к интегральным кривым, получим согласно (1.6)

$$\begin{gathered} |\omega| < \frac{1}{16} \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| \int_{x_0}^{x} [b(x) - a(x)]^2 \left(\exp \int_t^x \varphi_1(\alpha)\, d\alpha \right) dt \\ |\rho| < \frac{1}{2} \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| \int_{x_0}^{x} [b(x) - a(x)]^2 \left(\exp \int_t^x \varphi_2(\alpha)\, d\alpha \right) dt \end{gathered} \tag{2.4}$$

Полагая в обоих случаях $\exp \int_t^x \varphi(\alpha)\, d\alpha < k$, имеем

$$|\omega| < \frac{1}{16} k \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| \int_{x_0}^{x} \rho_0^2\, dt, \quad |\rho| < \frac{1}{2} k \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| \int_{x_0}^{x} \rho_0^2\, dt \tag{2.5}$$

где $\rho_0 = b(x) - a(x)$. О характере множителя k и о различии его в каждом из двух случаев будет сказано ниже.

При повторении процесса приближения при помощи касательной получим во второй формуле (2.5), заменив ρ на ρ_1:

$$|\rho_2| < \frac{1}{2} k \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| \int_{x_0}^{x} \rho_1^2\, dt$$

и вообще

$$|\rho_n| < \frac{1}{2} k \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| \int_{x_0}^{x} \rho_{n-1}^2\, dt \tag{2.6}$$

Н. Н. Лузин [2] при помощи этой формулы оценил быстроту сходимости интегральных приближений по касательным и получил

$$|\rho_n| < c q^{2^n} \qquad \left(q = \frac{k}{2} \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| l \rho^*, \qquad c = \left(k \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| l \right)^{-1} \right. \tag{2.7}$$

Здесь l — наибольшая длина интервала $(x_0, x_0 + l)$, на котором желательно приближенно вычислить $y(x)$, а ρ^* — верхняя граница ρ_0.

Несомненно, оценку Лузина можно было бы значительно усилить. Однако легко проверить, что при любой оценке вида $|\rho_n| < \varphi(n)$, сделанной при помощи приближения по касательной, в случае последовательных приближений при помощи чебышевской секущей получим

$$|\omega_n| < \frac{2}{2^{2^{n+1}}} \varphi(n) \tag{2.8}$$

Действительно, найдя $|\omega_1|$ по неравенству (2.5) и w_1 по формуле (1.5), заменим исходные приближения $a(x)$ и $b(x)$ на $a_1(x) = w_1 - |\omega_1|$, $b_1(x) = w_1 + |\omega_1|$ и повторим процесс; получим

$$|\omega_2| < \frac{1}{16} k \max \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right| \int_{x_0}^{x} |2\omega_1|^2\, dt \qquad \text{и т. д.}$$

Сравнивая с любой оценкой того же номера для случая касательной, и, обозначив δ^*, ω^* верхние границы, будем иметь

$$|\omega_1|^* = \frac{1}{8}\delta^*, \qquad |\omega_2|^* = \frac{1}{128}\delta_2^*, \qquad |\omega_3|^* = \frac{1}{2^{15}}\delta_3^*$$

и вообще формулу (2.8). Рассмотрим теперь влияние множителей

$$k_1 = \exp\int_t^x \varphi_1(\alpha)\,d\alpha, \qquad k_2 = \exp\int_t^x \varphi_2(\alpha)\,d\alpha$$

оцененных одним и тем же числом k. Функции φ_2 и φ_1 суть значения $\partial F(x, y)\,/\,\partial y$; в обоих случаях это угловые коэффициенты (фиг. 1) касательной BT и хорды AB.

Покажем что всегда $k_1 > k_2$.

Действительно, при $\partial^2 F\,/\,\partial y^2 > 0$ производная $\partial F\,/\,\partial y$ возрастает в промежутке $a(x) \leqslant y \leqslant b(x)$; в этом случае касательная лежит под кривой и должна проводиться в точке $a(x)$ и, следовательно, $k_2 < k_1$; если же $\partial^2 F\,/\,\partial y^2 < 0$, то производная $\partial F\,/\,\partial y$ убывает, касательная проводится в точке $b(x)$ и опять $k_2 < k_1$.

Однако легко убедиться, что $k_1\,/\,k_2 \to 1$ при возрастании n; имеем

$$\frac{k_1}{k_2} = \exp\int_t^x \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\alpha, \eta) - \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha, b)\right] d\alpha$$

Здесь подинтегральная функция равномерно стремится к нулю, когда по любому закону

$$|\eta_n(x) - b_n(x)| \to 0$$

Остается заметить, что и начальные значения этого отношения тоже очень близки к единице, что будет видно из приведенных примеров. Наконец, заметим еще следующее: наиболее затруднительно вычисление функции $\eta(x)$ и составление $\psi(x)$ для чебышевской секущей. Однако можно обойти эти вычисления, конечно, при условии некоторой потери точности (см. ниже пример 4). Действительно, для хорды AB и для чебышевской средней хорды имеем соответственно уравнения вида

$$w' = \varphi(x)\,w + \psi_1(x), \qquad w' = \varphi(x)\,w + \psi_2(x)$$

где в обоих случаях

$$\varphi(x) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta) = \frac{F(x, b) - F(x, a)}{b - a}$$

При этом если для определенности положить $\partial^2 F\,/\,\partial y^2 < 0$, то

$$\psi_2(x) = \psi_1(x) + |E|, \qquad \psi_1(x) = F(x, a) - a\,\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial y}$$

Таким образом,

$$\psi_2(x) \approx \psi_1(x) + \frac{1}{16}\max\left|\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right| [b(x) - a(x)]^2 \tag{2.9}$$

§ 3. Вычислительная схема для случая $n = 1$ и примеры. Согласно изложенному, имеем в случае $n = 1$ следующие формулы:

$$|\omega(x)| < \frac{k^*}{16}\max\left|\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right| \int_{x_0}^x [b(t) - a(t)]^2\,dt \tag{3.1}$$

$$w(x) = y_0 \exp\int_{x_0}^x \frac{\partial F}{\partial y}(t, \eta)\,dt + \int_{x_0}^x \psi(t)\exp\left(\int_t^x \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha, \eta)\,d\alpha\right) dt \tag{3.2}$$

Здесь $w(x)$ — интеграл линейного уравнения

$$w' = \frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta)\,w + \psi(x)$$

где ψ находится из уравнения чебышевской хорды и имеет вид:

$$\psi(x) = \frac{F(x, a) + F(x, \eta)}{2} - \frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta)\frac{a + \eta}{2} \tag{3.3}$$

Функция $\eta(x)$ находится точно или приближенно из уравнения

$$\frac{F(x, b) - F(x, a)}{b - a} = \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial y}$$

Начальные значения $a(x)$ и $b(x)$ удобно находить в виде $y_0 + Mx^m$, пользуясь неравенствами Чаплыгина. Для упрощения выкладок примем $\partial F / \partial y < 0$, тогда $k^* = 1$, а длину интервала $l = 1$.

1°. Рассмотрим уравнения типа Риккати $y' = Py^2 + Qy + R$. Эти уравнения всегда могут быть приведены к каноническому виду $y' = -y^2 + L(x)$. Здесь имеем

$$\eta(x) = \frac{1}{2}[a(x) + b(x)], \qquad |\omega_1(x)| < \frac{1}{8}\int_{x_0}^{x}[b(t) - a(t)]^2\, dt$$

$$\psi(x) = L(x) + \frac{1}{8}(a^2 + 6ab + b^2)$$

$$w_1(x) = y_0 \exp\left(-2\int_{x_0}^{x}\eta\, dt\right) + \int_{x_0}^{x}\psi(t)\exp\left(-2\int_{t}^{x}\eta\, d\alpha\right) dt$$

Пример 1 (Чаплыгин)

$$y' = -y^2 + 1 + x, \qquad y(0) = 1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y < 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2 < 0$$

Начальные приближения вида $1 + Mx^2$ получаются такие:

$$1 + \frac{1}{5}x^2 \leqslant y(x) \leqslant 1 + \frac{1}{2}x^2, \qquad \eta(x) = \frac{1}{2}(a + b) = 1 + \frac{7}{20}x^2$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \exp\left[0.3\,\frac{x^3}{3}\right]_t^x < e^{0,1} \approx 1.10 \qquad |\omega(x)| < \frac{1}{8}\int_0^1 0.09t^4\, dt < 0.0023$$

$$w_1(x) = 1 + \exp\left[-\left(2x + \frac{7}{30}x^3\right)\right]\int_0^x\left(t + \frac{80}{800}t^4\right)\exp\left(2t + \frac{7}{30}t^3\right) dt$$

Оставшуюся квадратуру можно взять, разложив подинтегральную функцию в ряд. При сохранении членов степени не выше седьмой окончательная погрешность меньше 0.005.

Пример 2

$$y' = -y^2 + Ax^{\alpha}, \qquad y(0) = 0 \qquad (\alpha > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$$

положив, в частности, $y' = -y^2 + 2x^{11/2}$, находим

$$\frac{1}{4}x^{13/2} \leqslant y(x) \leqslant \frac{4}{13}x^{13/2}, \qquad \eta(x) = \frac{29}{104}x^{13/2}$$

$$|\omega(x)| < \frac{1}{8}\int_0^1\left(\frac{3}{52}\right)^2 t^{13}\, dt < 0.00003$$

$$\psi(x) = 2x^{11/2} + cx^{13} \qquad \left(c = \frac{745}{13^2 64}\right)$$

$$w(x) = \exp\left(-ax^{15/2}\right)\int_0^x\left(2t^{11/2} + ct^{13}\right)\exp\left(at^{15/2}\right) dt \qquad \left(a = \frac{29}{300}\right)$$

Так как скобка под интегралом меньше 3, то достаточно разложить

$$e^{at^{15/2}} = 1 + \frac{at^{15/2}}{1!} + \frac{a^2 t^{15}}{2!} + \frac{a^3 t^{45/2}}{3!}$$

получим $y(x)$ с точностью $6 \cdot 10^{-5}$.

2° Рассмотрим уравнения более общего типа: $y' = f_1(y) + f_2(x)$, где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ разлагаются в ряд Тейлора.

Пример 3. (Чаплыгин)

$$y' = -y^3 + x^2, \quad y(0) = 0$$

$$\frac{3}{10} x^3 \leqslant y(x) \leqslant \frac{1}{3} x^3, \qquad \eta = \sqrt{\frac{271}{2700}}\, x^3$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \exp \int\limits_t^x 0{,}03\alpha^6\, d\alpha < 1.01, \qquad |\omega| < \frac{6}{16} \int\limits_0^1 \frac{1}{900} t^6\, dt < 0.00006$$

$$w(x) = \exp\left(-\frac{271\, x^7}{27000}\right) \int\limits_0^x (t^2 + 0.08\, t^9) \exp \frac{271\, t^7}{27000}\, dt$$

Упрощая квадратуру, получим

$$y(x) \approx \exp\left(-\frac{271\, x^7}{27000}\right) \int\limits_0^x (t^2 + 0.08 t^9)\left(1 + \frac{271}{27000}\, t^7\right) dt$$

с точностью до $12 \cdot 10^{-5}$.

Пример 4

$$y' = -\ln(1 + y) + x, \qquad y(0) = 0$$

$$\frac{2}{5} x^2 \leqslant y(x) \leqslant \frac{1}{2} x^2, \qquad |\omega| < \frac{1}{16} \int\limits_0^1 0.01\, x^4\, dx < 0.00013$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta) = \frac{10}{x^2}\left[\ln\left(1 + \frac{2}{5}\, x^2\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2}\, x^2\right)\right]$$

Функцию $\psi(x)$ вычисляем по формуле (2.9)

$$\psi(x) = 4 \ln\left(1 + \frac{1}{2}\, x^2\right) - 5 \ln\left(1 + \frac{2}{5}\, x^2\right) + x + \frac{x^4}{1600}$$

с точностью до 0.0006,

$$w(x) = \exp\left\{-20\left[\sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1}{2}}\, x - \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2}{5}}\, x\right]\right\} \left(\frac{1 + {}^1/_2 x^2}{1 + {}^2/_5 x^2}\right)^{+10/x} \times$$

$$\times \int\limits_0^x \left[4 \ln\left(1 + \frac{1}{2}\, t^2\right) - 5 \ln\left(1 + \frac{2}{5}\, t^2\right) + t + \frac{t^4}{1600}\right] \exp\left\{20\left[\sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1}{2}}\, t - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2}{5}}\, t\right]\right\} \left(\frac{1 + {}^1/_2 t^2}{1 + {}^2/_5 t^2}\right)^{-10/t} dt$$

с точностью до 0.0007.

Обычно замена точного значения $\psi(x)$ значением этой функции для хорды AB с поправочным слагаемым ведет к потере точности на один разряд, но упрощает вычисления.

Поступила 4 VIII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. 1950
2. Лузин Н. Н. О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина. Тр. ЦАГИ, вып. 141, 1932.