Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ЗАМЕЧАНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

В. М. Старжинский
(Москва)

В заметке доказывается, что исследование устойчивости тривиального решения системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами может быть сведено к исследованию устойчивости тривиального решения двучленного уравнения с неотрицательным периодическим коэффициентом. Таким образом, в указанном случае можно применить метод анализа устойчивости, предложенный Ляпуновым в мемуаре [1].

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\, x_1 + p_{12}(t)\, x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)\, x_1 + p_{22}(t)\, x_2 \tag{1}$$

где $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1,2)$ — действительные кусочно-непрерывные периодические функции действительного переменного t с периодом $\omega > 0$.

Ортогональным преобразованием с периодическими коэффициентами система (1) может быть приведена к виду, когда функции на побочной диагонали матрицы $\mathrm{P}(t)$ коэффициентов разных знаков и нижние грани их абсолютных величин сколь-угодно велики. Запишем систему (1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{P}(t)\; x, \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{P}(t) = \| p_{ij}(t) \|_1^2 \right)$$

и выполним подстановку [1]

$$y = \left(\mathrm{E}\cos\frac{k\pi}{\omega}t + \mathrm{J}\sin\frac{k\pi}{\omega}t\right)x, \qquad \left(y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{E} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \ \mathrm{J} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \right)$$

(k — натуральное число). В новых переменных система уравнений принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{Q}(t)\, y \tag{2}$$

$$\mathrm{Q}(t) = \| q_{ij}(t) \|_1^2 = \frac{k\pi}{\omega}\mathrm{J} + \left(\mathrm{E}\cos\frac{k\pi}{\omega}t + \mathrm{J}\sin\frac{k\pi}{\omega}t\right)\mathrm{P}(t)\left(\mathrm{E}\cos\frac{k\pi}{\omega}t - \mathrm{J}\sin\frac{k\pi}{\omega}t\right)$$

Матрица-функция Q периодическая с периодом ω и при достаточно большом k имеем $q_{12}(t) > 0$ и $q_{21}(t) < 0$, причем $\inf q_{12}(t)$ и $\inf|q_{21}(t)|$ сколь угодно велики, а $q_{11}(t)$ и $q_{22}(t)$ остаются ограниченными. Устойчивость тривиального решения системы (2) равносильна устойчивости тривиального решения системы (1).

Приведем систему (2) к одному уравнению, например относительно y_1, предполагая, что функции q_{11} и q_{12} обладают кусочно-непрерывными производными. Будем иметь уравнение

$$\ddot{y}_1 - \left(q_{11} + q_{22} + \frac{1}{q_{12}}\dot{q}_{12}\right)\dot{y}_1 + \left(q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21} - \dot{q}_{11} + \frac{1}{q_{12}}q_{11}\dot{q}_{12}\right)y_1 = 0 \tag{3}$$

Известная подстановка

$$y_1 = z\exp\left[\frac{1}{2}\int\left(q_{11} + q_{22} + \frac{1}{q_{12}}\dot{q}_{12}\right)dt\right]$$

---

[1] Эту подстановку сообщил автору В. А. Якубович.

приводит уравнение (3) к двучленному

$$\ddot{z} + p(t)z = 0 \tag{4}$$

где

$$p(t) = -q_{12}q_{21} + \frac{1}{4}\left[-(q_{11}-q_{22})^2 - 2\dot{q}_{11} + 2\dot{q}_{22} + 2\frac{q_{11}-q_{22}}{q_{12}}\dot{q}_{12} + \frac{2}{q_{12}}\ddot{q}_{12} - 3\left(\frac{\dot{q}_{12}}{q_{12}}\right)^2\right]$$

(предполагается, что производные $\dot{q}_{22}$ и $\ddot{q}_{12}$ кусочно-непрерывны).

При достаточно большом k выражение в квадратной скобке будет порядка $k\|\mathrm{P}\|$, где $\|\mathrm{P}\|$ — норма матрицы $\mathrm{P}(t)$; знак $p(t)$ определяется положительной величиной $-q_{12}q_{21}$, нижняя грань которой порядка k^2, что и доказывает сформулированное вначале предложение. При использовании для анализа устойчивости метода Ляпунова[1] следует учитывать возможный сдвиг границ для характеристичной постоянной A Ляпунова уравнения (4). Именно, поскольку характеристичные числа решений уравнений (3) и (4) связаны равенством

$$\chi\{y_1\} = \chi\{z\} - \frac{1}{2}(q_{11}+q_{22})_{\text{ср}}$$

то при $(q_{11}+q_{22})_{\text{ср}} > 0$ тривиальное решение уравнения (3) (а следовательно, и исходной системы) неустойчиво, а при $(q_{11}+q_{22})_{\text{ср}} \leqslant 0$ устойчиво, если

$$|A| < \operatorname{ch}\frac{1}{2}\omega(q_{11}+q_{22})_{\text{ср}}$$

и неустойчиво, если знак неравенства будет обратным.

Здесь принято обозначение

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)\,dt$$

Легко видеть, что

$$q_{11}(t) + q_{22}(t) \equiv p_{11}(t) + p_{22}(t)$$

В заключение заметим следующее.

1. В частности, можно применить анализ устойчивости по методу Ляпунова [1] и для двучленного уравнения со знакопеременным периодическим коэффициентом исходя из представления уравнения в виде системы (1).

2. Если исходная система (1) канонического вида, то устойчивость тривиального решения уравнения (4) равносильна устойчивости тривиального решения исходной системы. Для анализа устойчивости можно применить как метод Ляпунова [1], так и любой из критериев, относящихся к уравнению (4).

3. В последнее время были предложены различные распространения метода Ляпунова [1] на более общие случаи линейных систем и уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, чем двучленное уравнение с неотрицательным периодическим коэффициентом (см. [2]). Сравнение этих способов с предлагаемым здесь способом непосредственного применения метода Ляпунова [1] в общем виде представляется нам весьма затруднительным. Повидимому, лишь на отдельных характерных примерах можно оценить достоинства различных указанных способов.

Поступила 4 X 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. Зап. Академии Наук по физ-мат. отд., сер. 8, т. XIII, № 2, 1902.

2. Старжинский В. М. Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.