Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПОЛОЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАЯТНИКОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, ПРИ ЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ВОКРУГ ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

Г. Брадистилов
(София)

В работе [1] автора для системы n последовательно соединенных физических маятников, которые вращаются вокруг параллельных осей, доказано существование n семейств периодических движений. В настоящей работе рассматривается плоское периодическое движение системы трех последовательно соединенных математических маятников около положения устойчивого равновесия после начального момента.

§ 1. Уравнения движения. Согласно работе [1] [формула (1)] декартовы координаты концов маятников

$$x_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \sin \varphi_k, \qquad y_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \cos \varphi_k \qquad (\nu=1,\,2,\,3) \tag{1.1}$$

где a_1, a_2, a_3 — длины маятников, а φ_1, φ_2, φ_3 — углы, которые они образуют с осью ординат, направленной вниз (положение устойчивого равновесия). Уравнения движения системы трех маятников с массами m_1, m_2 и m_3, согласно формулы (6b) работы [1], имеет вид:

$$\begin{gathered} M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k \left[\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\,\varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k)\,\varphi_k'^2\right] + \\ + \sum_{k=\nu+1}^{3} M_k a_k \left[\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\,\varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k)\,\varphi_k'^2\right] = -M_\nu g \sin\varphi_\nu \end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$M_\nu = \sum_{k=\nu}^{3} m_k \qquad \left(\sum_{k=n+1}^{n} = 0, \ \sum_{k=1}^{0} = 0\right)$$

Если в (1.2) положить $\varphi = \lambda\psi$, то получим

$$\begin{gathered} M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k \left[\cos\lambda(\psi_\nu - \psi_k)\,\psi_k'' + \lambda \sin\lambda(\psi_\nu - \psi_k)\,\psi_k'^2\right] + \\ + \sum_{k=\nu+1}^{3} M_k a_k \left[\cos\lambda(\psi_\nu - \psi_k)\,\psi_k'' + \lambda\sin\lambda(\psi_\nu - \psi_k)\,\psi_k'^2\right] = \\ = -gM_\nu\psi_\nu + \lambda g M_\nu \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n-3}}{(2n-1)!}\,\psi_\nu^{2n-1} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Эта система при $\lambda = 0$ обращается в линейную

$$M_\nu \sum_{k=1}^{\nu} a_k \psi_k'' + \sum_{k=\nu+1}^{3} M_k a_k \psi_k'' = -g M_\nu \psi_\nu \qquad (\nu = 1,\,2,\,3) \tag{1.4}$$

характеристическое уравнение которой таково:

$$\begin{vmatrix} M_1(\rho^2 a_1+g) & M_2\rho^2 a_2 & M_3\rho^2 a_3 \\ M_2\rho^2 a_1 & M_2(\rho^2 a_2+g) & M_3\rho^2 a_3 \\ M_3\rho^2 a_1 & M_3\rho^2 a_2 & M_3(\rho^2 a_3+g) \end{vmatrix}=0 \tag{1.5}$$

Если положить $\rho^2=g/u$ и развернуть определитель, то характеристическое уравнение принимает вид:

$$\begin{gathered} f(u)\equiv M_1M_2(a_1+u)(a_2+u)(a_3+u)-M_1M_3a_2a_3(a_1+u)-M_2^2a_1a_2(a_3+u)- \\ -M_2M_3a_1a_3(a_2+u)+2M_2M_3a_1a_2a_3=0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Все корни этого уравнения u_k отрицательны. Отсюда следует, что все корни уравнения (1.5) мнимые. Общий интеграл системы (1.3) имеет вид:

$$\psi_\nu=\sum_{k=1}^{3}L_{\nu k}(C_k\cos\rho_k t+D_k\sin\rho_k t) \qquad (\nu=1,2,3)$$

где $\rho_k i$ $(k=1, 2, 3)$ — корни уравнения (1.5), которые, как увидим ниже, различны; величины $L_{\nu\mu}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &M_1(a_1+u_k)L_{1k}+M_2a_2L_{2k}+M_3a_3L_{3k}=0\\ &M_2a_1L_{1k}+M_2(a_2+u_k)L_{2k}+M_3a_3L_{3k}=0\\ &a_1L_{1k}+a_2L_{2k}+(a_3+u_k)L_{3k}=0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

определитель которой $\Delta=\|L_{\nu\mu}\|\neq 0.$

Согласно цитированной работе в достаточно малой окрестности устойчивого равновесия, т. е. для достаточно малых λ, каждому корню характеристического уравнения (1.5), например $\rho_1 i$, при начальном условии

$$\psi_\nu(0)=0, \qquad \psi_\nu'(0)=L_{\nu 1}\rho_1+\sum_{k=2}^{3}L_{\nu k}\rho_k\alpha_k \qquad (\nu=1,2,3) \tag{1.8}$$

соответствует один интеграл системы (1.3), который является периодической функцией с периодом $2(\pi+\delta)/\rho_1$, если δ, α_2, α_3 удовлетворяют системе уравнений

$$-L_{\nu 1}\delta+\sum_{k=1}^{3}L_{\nu k}\alpha_k\sin\frac{\pi\rho_k}{\rho_1}+f_\nu=0 \qquad (\nu=1,2,3)$$

Здесь f_ν представляет собой степенной ряд по λ, α_2, α_3, и δ, причем члены этого ряда содержат λ в степени не ниже второй; ρ_k $(k=2, 3)$, не кратное ρ_1.

§ 2. О расположении корней характеристического уравнения. Для определенности будем предполагать, что $a_1>a_2>a_3$; исследование при других соотношениях длин маятников проводится аналогично.

Из выражений (согласно 1.6)

$$\begin{aligned} f(-a_1)&=-M_2^2a_1a_2(a_3-a_1)-M_2M_3a_1a_3(a_2-a_1)+2M_2M_3a_1a_2a_3\\ f(-a_2)&=-M_1M_3a_2a_3(a_1-a_2)-M_2^2a_1a_2(a_3-a_2)+2M_2M_3a_1a_2a_3\\ f(-a_3)&=-M_1M_3a_2a_3(a_1-a_3)-M_2M_3a_1a_3(a_2-a_3)+2M_2M_3a_1a_2a_3 \end{aligned}$$

ясно, что $f(-a_1)>0$, а $f(-a_2)\gtreqless 0$ в зависимости от подбора m_1, т. е. $f(-a_2)<0$ при достаточно большом m_1, а $f(-a_2)>0$ при достаточно малом m_1 и при фиксированных m_2 и m_3; значение $f(-a_3)$ обязательно отрицательно, если $f(-a_2)<0$; однако, если $f(-a_2) > 0$, то $f(-a_3)$ может быть положительным или отрицательным в зависимости от соотношений трех масс. С другой стороны, из зависимости

$$u_1 + u_2 + u_3 = -(a_1 + a_2 + a_3)$$

следует, что $f[-(a_1 + a_2 + a_3)] < 0$. Следовательно, при $f(-a_2) < 0$ корни характеристического уравнения располагаются следующим образом:

$$-(a_1 + a_2 + a_3) < u_3 < -a_1 < u_2 < -a_2 < -a_3 < u_1 < 0$$

При $f(-a_2) > 0$ имеем два случая:

$$-(a_1 + a_2 + a_3) < u_3 < -a_1 < -a_2 < u_2 < -a_3 < u_1 < 0$$

$$-(a_1 + a_2 + a_3) < u_3 < -a_1 < -a_2 < -a_3 < u_2 < u_1 < 0$$

в зависимости от того, будет ли $f(-a_3)$ меньше или больше нуля. Здесь рассмотрим случай, когда $f(-a_2) < 0$. Остальные два случая исследуются аналогичным путем.

§ 3. Движение трех маятников вокруг положения устойчивого равновесия после начального момента. При периодических движениях вертикальные компоненты начальных скоростей отдельных масс маятников равны нулю, а горизонтальные компоненты равны

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k\varphi_k'(0) = \lambda \sum_{k=1}^{\nu} a_k\psi_k'(0) \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

Чтобы определить положение системы математических маятников относительно положения устойчивого равновесия после начального момента, исследуем отношения горизонтальных компонент и отношения угловых скоростей $\varphi_1'(0)$, $\varphi_2'(0)$ и $\varphi_3'(0)$ при $\lambda \to 0$.

Согласно (1.8), чтобы найти начальные угловые скорости $\varphi_k'(0)$, необходимо определить коэффициенты $L_{\mu k}$ уравнений (1.7). Для этих коэффициентов получаем пропорцию

$$L_{1k} : L_{2k} : L_{3k} = \begin{vmatrix} M_2(a_2 + u_k) & M_3a_3 \\ a_2 & a_3 + u_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_3a_3 & M_2a_1 \\ a_3 + u_k & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M_2a_1 & M_2(a_2 + u_k) \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

Принимая во внимание, что коэффициент пропорциональности может быть включен в параметр λ, получаем

$$L_{1k} = M_2u_k^2 + M_2(a_2 + a_3)u_k + m_2a_2a_3 = \tau(u_k)$$

$$L_{2k} = -a_1(m_2a_3 + M_2u_k) = -a_1\omega(u_k)$$

$$L_{3k} = -M_2a_1u_k$$

Так как α_2 и α_3 вместе с λ стремятся к нулю, то начальные угловые скорости для $\rho_k i$ будут следующие:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(0) &= \lambda\psi_1'(0) = \lambda[M_2u_k^2 + M_2(a_2 + a_3)u_k + m_2a_2a_3]\rho_k + O(\lambda) \\ \varphi_2'(0) &= \lambda\psi_2'(0) = -\lambda a_1[m_2a_3 + M_2u_k]\rho_k + O(\lambda) \qquad (k = 1, 2, 3) \\ \varphi_3'(0) &= \lambda\psi_3'(0) = -\lambda M_2a_1u_k\rho_k + O(\lambda) \qquad \left(\rho_k = \sqrt{\frac{g}{-u_k}}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Принимая во внимание, что $|u_1| < |u_2| < |u_3|$, получаем, что $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$. Отсюда следует, что ρ_2 и ρ_3 не могут быть кратными ρ_1. Это показывает, что существует семейство периодических решений с приблизительным периодом $2\pi / \rho_1$. Вообще существует второе семейство периодических движений с приблизительным периодом $2\pi / \rho_2$, которое представляет более медленное (среднее) колебание, чем первое. Наконец, вообще существует третье семейство периодических решений с приблизительным периодом $2\pi / \rho_3$, которое представляет самое медленное колебание рассмотренной системы маятников. Однако, когда отношения ρ_1 / ρ_2 и когда ρ_1 / ρ_3 или ρ_2 / ρ_3 — числа целые, то нельзя быть уверенным в существовании указанных соответственно средних и медленных колебаний.

а) *Семейство периодических движений, зависящее от* u_1 *(быстрое колебание)*. Принимая во внимание формулы (3.2), получаем, что соотношения углов φ_1°, φ_2° и φ_3°, которые три маятника при $\lambda \to 0$ и после начального момента образуют с положительным направлением оси y, будут следующие:

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_2'(0)} = \frac{\tau(u_1)}{-a_1 \omega(u_1)}, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi_2'(0)}{\varphi_3'(0)} = \frac{\omega(u_1)}{M_2 u_1} \tag{3.3}$$

Чтобы найти знаки этих отношений, покажем, что

$$\omega(u_1) = m_2 a_3 + M_2 u_1$$

$$\tau(u_1) = M_2 u_1^2 + M_2 (a_2 + a_3) u_1 + m_2 a_2 a_3$$

положительные. Для этой цели покажем сначала, что корень u_1 находится между α и 0, где α — правый корень уравнения $\tau(u) = 0$, т. е.

$$\alpha = -\frac{a_2 + a_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right)^2 - \frac{m_2}{M_2} a_2 a_3}$$

Действительно, (1.6) при $u = \alpha$, принимая во внимание тождество

$$M_2 \alpha^2 + M_2 (a_2 + a_3) \alpha + m_2 a_2 a_3 \equiv 0$$

имеет следующее выражение:

$$f(\alpha) = -M_2 a_1 [a_2 a_3 m_2 + (M_2 a_2 + M_3 a_3) \alpha] = M_2 a_1 \alpha (M_2 \alpha + m_2 a_3)$$

Выражение

$$M_2 \alpha + m_2 a_3 = -M_2 \frac{a_2 + a_3}{2} + m_2 a_3 + M_2 \sqrt{\left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right)^2 - \frac{m_2}{M_2} a_2 a_3}$$

положительно, так как

$$M_2 \sqrt{\left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right)^2 - \frac{m_2}{M_2} a_2 a_3} > M_2 \frac{a_2 + a_3}{2} - m_2 a_3$$

Последнее неравенство проверяется возведением в квадрат, в результате чего имеем $0 > -m_2 m_3 a_3^2$. Отсюда следует, что $f(\alpha) < 0$.

Итак, корень u_1 находится между α и 0, что показывает, что выражение $\tau(u_1)$ непременно положительно, так как α — правый корень уравнения $\tau(u) = 0$.

Чтобы установить теперь, что первое выражение $\omega(u_1)$ положительно, достаточно показать, что $-(m_2 / M_2) a_3 < \alpha$. Отсюда на основании полученного выше результата следует, что $-(m_2 / M_3) a_3 < u_1$.

Действительно, $\tau(u)$ при $u = -(m_2 / M_2) a_3$ имеет отрицательное значение:

$$\tau\left(-\frac{m_2}{M_2} a_3\right) = -\frac{m_2 m_3}{M_2} a_3^2$$

Это доказывает наше утверждение, что $-(m_2 / M_2) a_3 < \alpha$.

Следовательно, так как $\omega(u_1)$ и $\tau(u_1)$ положительны, от (2.3) приходим к заключению, что

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} < 0, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} < 0$$

Чтобы определить теперь положение масс m_1, m_2 и m_3 трех маятников относительно положения устойчивого равновесия после начального момента, достаточно исследовать отношение горизонтальных компонент скоростей s_1°, s_2° и s_3° при $\lambda \to 0$. Согласно (3.2) эти отношения следующие:

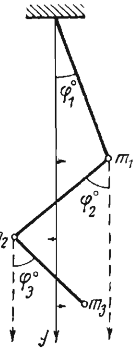
$$\frac{s_1^\circ}{s_2^\circ} = \lim \frac{a_1\varphi'(0)}{a_1\varphi_1'(0) + a_2\varphi_2'(0)} = \frac{\tau(u_1)}{M_2 u_1 (a_3 + u_1)}$$

$$\frac{s_2^\circ}{s_3^\circ} = \lim \frac{a_1\varphi_1'(0) + a_2\varphi_2'(0)}{a_1\varphi_1'(0) + a_2\varphi_2'(0) + a_3\varphi_3'(0)} = \frac{a_3 + u_1}{u_1}$$

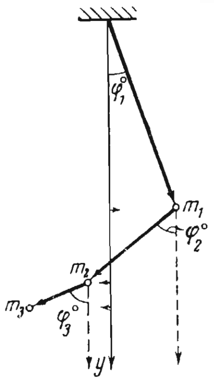
Правые части показывают, что оба отношения s_1° / s_2° и s_2° / s_3° отрицательны. Итак, быстрое периодическое колебание характеризуют

$$\omega(u_1) > 0, \qquad \tau(u_1) > 0, \qquad \frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} < 0, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} < 0; \qquad \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ} < 0, \qquad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ} < 0$$

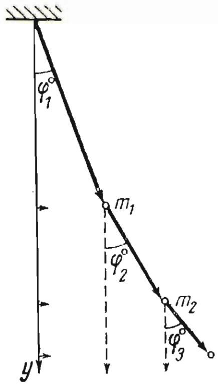
В этом случае (фиг. 1) быстрого колебания массы трех маятников не могут находиться по одну сторону от положения равновесия; массы последних двух маятников будут всегда находиться по разным сторонам от положения равновесия



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

б) *Семейство периодических движений, зависящих от* u_2 (*среднее колебание*). Здесь для отношений углов φ_1°, φ_2°, φ_3° и для отношений начальных скоростей s_1°, s_2° и s_3° имеем следующие выражения:

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} = \frac{\tau(u_2)}{-a_1\,\omega(u_2)}, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} = \frac{\omega(u_2)}{M_2 u_2}; \qquad \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ} = \frac{\tau(u_2)}{M_2 u_2 (a_3 + u_2)}, \qquad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ} = \frac{a_3 + u_2}{u_2}$$

Так как u_2 находится между $-a_1$ и $-a_2$, то ясно, что $\omega(u_2) < 0$ и, следовательно, всегда $\varphi_2^\circ / \varphi_3^\circ > 0$ и $s_2^\circ / s_3^\circ > 0$.

С другой стороны, принимая во внимание, что характеристическое уравнение можно написать в виде

$$M_1(a_1 + u)\,\tau(u) - M_2 a_1 a_2 \omega(u) - M_2 m_3 a_1 a_3 u = 0 \tag{3.4}$$

то, замещая u корнем u_2, приходим к заключению, что $\tau(u_2)$ отрицательно, так как второй и третий члены уравнения положительны. Следовательно, здесь имеем случай, показанный на фиг. 2:

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} < 0, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} > 0, \qquad |\varphi_2^\circ| < |\varphi_3^\circ|; \qquad \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ} < 0, \qquad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ} > 0$$

В этом случае при среднем периодическом колебании массы два последних маятника двигаются всегда с одной стороны положения устойчивого равновесия.

в) *Семейство периодических движений, зависящих от* u_3 (*медленное колебание*). Здесь имеем

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ}=\frac{\tau(u_3)}{-a_1\omega(u_3)},\qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ}=\frac{\omega(u_3)}{M_2u_3},\qquad \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ}=\frac{\tau(u_3)}{M_2u_3(a_2+u_3)},\qquad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ}=\frac{a_3+u_3}{u_3}$$

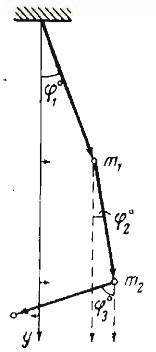
Подставим u_3 в (3.4) вместо u. Так как $u_3<-a_1$ и $\omega(u_3)<0$, то для того чтобы u_3 было корнем характеристического уравнения, нужно, чтобы $\tau(u_3)>0$.

Это показывает, что здесь имеем также только один случай, показанный на фиг. 3:

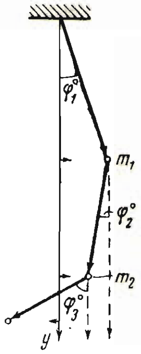
$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ}>0,\quad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ}>0,\quad |\varphi_2^\circ|<|\varphi_3^\circ|;\ \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ}>0,\quad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ}>0$$

В этом случае при медленном периодическом колебании три массы начинают движение с одной стороны положения равновесия.

Два остальных случая, которые характеризуются неравенством $f(-a_2)>0$, рассматриваются тем же способом, и для быстрого, среднего и медленного колебаний дают те же конфигурации, с одним исключением, когда u_2 находится между $-a_3$ и 0. В этом случае расположение трех маятников после начального момента и при $\lambda\to 0$ дано на фиг. 4 или соответственно на фиг. 5 в зависимости от того, будет ли $f[-(m_2/M_3)a_3]\gtreqless 0$, т. е. будут ли массы m_1 или m_2 достаточно малы.



Фиг. 4



Фиг. 5

Поступило 10 VI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Bradistilov. G. Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene. Math. Annalen, Bd. 116, S. 181—203.