Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ВОПРОСУ О ВЫЯВЛЕНИИ ОПТИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Б. А. Вертгейм и Г. А. Остроумов
(Молотов)

Оптический метод выявления неоднородностей (Schlierenmethode) заслуженно получил большое распространение. Однако громадные успехи этого метода в области оптики световой, рентгеновской, электронномикроскопической, ультраакустической— волновой и корпускулярной — в применении к исследованию образцов разного рода все-таки не выходят за рамки «плоской задачи», за пределы исследования двумерного случая. В какой мере можно применить этот метод в условиях трехмерной задачи?

Проблема сводится к измерению показателя преломления в разных точках в толще образца с применением просвечивания его в разных направлениях без нарушения его целости. Представим себе образец в форме точного прямоугольного параллелепипеда, отнесенного к осям x, y, z, направленным вдоль его ребер. Пусть показатель преломления n для определенного рода лучей («длина волны» которых мала по сравнению с размерами образца) будет плавной, медленно меняющейся функцией координат. Ввиду этого этот сорт лучей не только не испытывает в нашем образце полного (внутреннего) отражения, но и не получает заметного искривления пути. Заметим, что показатель преломления может быть комплексным: действительная и мнимая части его соответствуют тогда подлинному показателю преломления и показателю поглощения лучей.

Допустим, что мы произвели трехкратное поочередное просвечивание образца в направлениях, параллельных осям координат, и этим способом определили «оптическую толщину» образца в каждом из этих трех направлений (в виде функций от остальных двух координат). Возникает вопрос, можно ли по этим данным определить показатель преломления как функцию трех координат? Иными словами, может ли такое трехкратное просвечивание стать равноценным измерению показателя преломления *в толще* рассматриваемого образца? Математически говоря, с какой степенью точности можно определить однозначную непрерывную функцию трех переменных

$$n = f(x, y, z)$$

по уравнениям

$$\int_0^X f(x, y, z)\,dx = \Phi_1(y, z)$$
$$\int_0^Y f(x, y, z)\,dy = \Phi_2(z, x) \qquad (1)$$
$$\int_0^Z f(x, y, z)\,dz = \Phi_3(x, y)$$

Здесь X, Y, Z — размеры параллелепипеда, а Φ_1, Φ_2, Φ_3 — результаты измерения оптической толщины образца путем трех просвечиваний. Надо иметь в виду, что известные функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 связаны тремя соотношениями — следствиями теоремы о перемене порядка интегрирования —

$$\int_0^Y \Phi_1(y, z)\,dy = \int_0^X \Phi_2(z, x)\,dx \quad \text{и т. д.} \tag{2}$$

Это обстоятельство математически налагает ограничения на функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 (они не могут быть совершенно произвольными), а физически оно может послужить для оценки точности произведенных измерений.

Сразу видно, что уравнения (1) не дают возможности всегда однозначно определить функцию f. Например, при

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$$

имеются, в частности, такие ненулевые решения:

$$f = \sin\left(2\pi m\frac{x}{X} + \varphi_1\right)\sin\left(2\pi p\,\frac{y}{Y} + \varphi_2\right)\sin\left(2\pi q\,\frac{z}{Z} + \varphi_3\right) \quad (m,\ p,\ q = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

Однако уравнения (1) позволяют однозначно решить следующую задачу.

Задача 1. Среди всех многочленов от x, y, z второй степени найти многочлен, наименее уклоняющийся (в среднем) от неизвестной функции f. Иначе говоря, определить коэффициенты этого многочлена так, чтобы интеграл

$$J = \int_0^X\int_0^Y\int_0^Z [f(x, y, z) - (a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6xy + a_7y^2 + a_8xz + a_9yz + a_{10}z^2)]^2\,dx\,dy\,dz \tag{4}$$

принимал наименьшее значение.

Все десять коэффициентов, как это легко видеть при элементарном рассмотрении вопроса, определяются из системы десяти линейных уравнений:

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 10)$$

Например,

$$\frac{\partial J}{\partial a_9} = 2\int_0^X\int_0^Y\int_0^Z [f(x,\ y,\ z) - (a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + \ldots + a_9yz + a_{10}z^2)]\,yz\,dx\,dy\,dz = 0$$

Так как

$$\int_0^X\int_0^Y\int_0^Z yzf(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^Y\int_0^Z yz\left\{\int_0^X f(x,\ y,\ z)\,dx\right\}dy\,dz$$

то

$$\frac{1}{4}XY^2Z^2a_1 + \frac{1}{8}X^2Y^2Z^2a_2 + \ldots + \frac{1}{8}XY^2Z^4a_{10} = \int_0^Y\int_0^Z yz\Phi_1(y,\ z)\,dy\,dz \quad \text{и т. д.} \tag{5}$$

Система этих десяти уравнений относительно $a_1, \ldots, a_{10}$ всегда имеет единственное решение, так как определитель системы не равен нулю вследствие линейной независимости системы таких функций: 1, x, y, z, x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2 (так называемый определитель Грамма [1]). К этой системе приводятся коэффициенты в левых частях (5).

Решить однозначно соответствующую проблему для многочленов третьей степени по уравнениям (1) уже невозможно, так как по ним нельзя вычислить такой интеграл:

$$\int_0^X\int_0^Y\int_0^Z xyzf(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

который войдет в левую часть уравнений типа (5).

Для решения задачи в этом случае надо знать хотя бы один из так называемых моментов первой степени, например,

$$\int_0^X xf(x, y, z)\,dx \equiv \Phi_4(y, z)$$

Тогда

$$\int_0^X\int_0^Y\int_0^Z xyzf(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^Y\int_0^Z yz\Phi_4(y, z)\,dy\,dz \tag{6}$$

Знание всех трех моментов первой степени позволило бы таким приемом решить задачу с точностью до многочленов пятой степени и т. д. Однако экспериментальное измерение моментов встречает большие трудности.

Если известно, что искомая функция f обладает определенного вида симметрией, тогда интеграл (6) может быть вычислен и, следовательно, задача допустила бы решение с точностью до многочленов более высокой степени, чем вторая. Например, если известно, что f симметрична относительно средней плоскости $^1/_2\,X$:

$$f(x, y, z) \equiv f(X - x, y, z)$$

то

$$\int_0^X \left(x - \frac{1}{2}X\right) f(x, y, z)\,dx = 0$$

В этом случае

$$\Phi_4(y, z) \equiv \int_0^X xf(x, y, z)\,dx = \frac{1}{2}X\int_0^X f(x, y, z)\,dx = \frac{1}{2}X\Phi_1(y, z)$$

В тесной связи с рассмотренной задачей 1 стоит другая задача.

Задача 2. Считая функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 в уравнениях (1) многочленами от x, y, z степени N, найти функцию f, удовлетворяющую уравнениям (1), тоже в виде многочлена степени N.

Можно непосредственно проверить, что для $N = 1$ и $N = 2$ эта вторая задача имеет единственное решение. Однако при $N = 3$ (как в первой задаче) решение не единственное. Например, функция

$$f_1(x, y, z) = \left(x - \frac{1}{2}X\right)\left(y - \frac{1}{2}Y\right)\left(z - \frac{1}{2}Z\right)$$

не равна нулю, а удовлетворяет однородным уравнениям:

$$\Phi_1 = \int_0^X f_1 dx = 0, \qquad \Phi_2 = \int_0^Y f_1 dy = 0, \qquad \Phi_3 = \int_0^Z f_1 dz = 0$$

При $N = 4$ к этой функции добавятся еще три:

$$f_2 = \left(x^2 - \frac{1}{3}X^2\right)\left(y - \frac{1}{2}Y\right)\left(z - \frac{1}{2}Z\right)$$

$$f_3 = \left(x - \frac{1}{2}X\right)\left(y^2 - \frac{1}{3}Y^2\right)\left(z - \frac{1}{2}Z\right)$$

$$f_4 = \left(x - \frac{1}{2}X\right)\left(y - \frac{1}{2}Y\right)\left(z^2 - \frac{1}{3}Z^2\right)$$

Эти функции соответствуют как раз тем интегралам, которые остаются неопределенными при $N = 3$ и $N = 4$ в задаче 1.

Аналогичным путем можно строго показать для любого N, что степень произвола в решении обеих задач при $N \geqslant 3$ одна и та же.

Такова та невысокая степень точности, с которой по уравнениям (1) принципиально можно определить $n = f(x, y, z)$ в толще образца в трехмерной задаче.

Предполагая непрерывность всех производных от f вплоть до третьего порядка включительно, можно доказать, что если разрезать исследуемый параллелепипед на восемь частей, разделив каждое ребро надвое, и в пределах каждой части измерить аналогичным приемом показатель преломления путем двадцати четырех просвечиваний, то погрешность в определении n, получаемая от замены $f(x, y, z)$ на указанный выше многочлен второй степени, уменьшается в $2^3 = 8$ раз. С целью повышения точности можно искусственно создавать условия симметрии, о которых говорилось выше. Но так как при этом нарушается непрерывность уже первых производных от f, то точность решения может и не увеличиться, хотя задача и будет решена для многочленов более высокой степени, чем вторая.

Этот вывод ставит разумные границы для попыток определения экспериментальным путем в толще образца плавно меняющегося показателя преломления и особенно ярко подчеркивает большую доступность и эффективность оптического метода для плоской задачи.

Приведенные соображения не относятся к случаям резко изменяющихся оптических свойств образца, когда дело обстоит совсем по-другому. Например, в медицинской рентгенодиагностике местоположение четко очерченной пули определяется с исчерпывающей точностью всего двумя просвечиваниями.

Поступила 3 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций, стр. 317. ГИТТЛ, 1949.