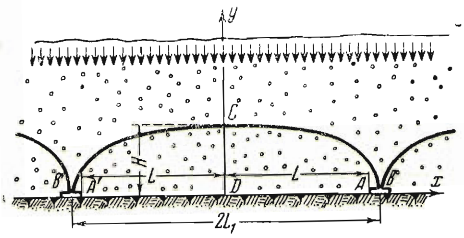
Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ФОРМЕ БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД МЕЖДУ ДВУМЯ ДРЕНАМИ НА ВОДОУПОРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИНФИЛЬТРАЦИИ

В. А. Васильев

(Ташкент)

Рассматривается плоская задача о форме бугра грунтовых вод, стекающих в дрены на водоупоре, при наличии инфильтрации, в точной гидромеханической постановке. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений явилась вспомогательным средством для отыскания решения, но самое решение получилось в элементарной форме.



Фиг. 1

Ось x направим по водоупору и на расстоянии $2L_1$ друг от друга разместим горизонтальные дренажные щели длиной

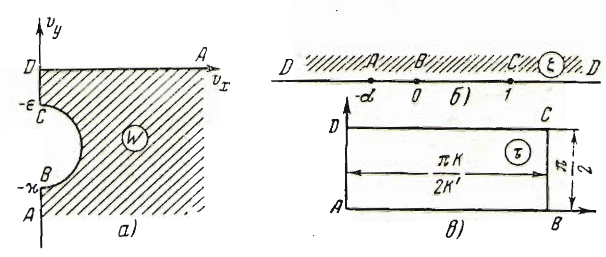
$$l = L_1 - L$$

Предполагая, что дрены питаются за счет инфильтрации, интенсивность которой обозначим через ε, определим форму депрессионной кривой грунтового потока.

Схема задачи изображена на фиг. 1. Ось y — линию симметрии — принимаем за линию тока и рассматриваем правую половину области движения $CDAB$. Полагаем $\psi = 0$ вдоль CD и водоупора DA и $\varphi = 0$ вдоль контура дрены AB. На кривой депрессии CB должны выполняться условия

$$\varphi + \varkappa y = 0, \quad \psi - \varepsilon x = 0$$

где $\varkappa$ — коэффициент фильтрации.



Фиг. 2

Функция, конформно отображающая область годографа скорости (фиг. 2, *а*) на верхнюю полуплоскость ζ (фиг. 2, *б*), имеет вид:

$$W = \frac{G}{Z} = i\sqrt{\varepsilon\varkappa}\,\mathrm{cth}\left\{\frac{\pi}{2K'}F\left(\arcsin\sqrt{\frac{\zeta+\alpha}{\alpha}},\ \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)\right\} \qquad \left(G = \frac{d\omega}{d\zeta},\ Z = \frac{dz}{d\zeta}\right) \tag{1}$$

где K' — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле $k' = 1/\sqrt{\alpha+1}$, $F(\arcsin\sqrt{(\zeta+\alpha)/\alpha},\ \sqrt{\alpha/(\alpha+1)})$ — эллиптический интеграл первого рода.

Определяя показатели функций G и Z около особых точек A, B, C, D [1], найдем, что функции F и Z представляют линейные комбинации двух ветвей функции Римана:

$$\widetilde{y} = P\begin{Bmatrix} -\alpha & 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \zeta \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta+\alpha)}}\ P\begin{Bmatrix} -\alpha & 0 & 1 & \infty & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta+\alpha)}} \tag{2}$$

y является решением следующего линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' + \frac{1}{2}\,\frac{3\zeta^2 + 2\zeta(\alpha - 1) - \alpha}{\zeta(\zeta - 1)(\zeta + \alpha)}\,y' + \frac{\lambda}{\zeta(\zeta - 1)(\zeta + \alpha)}\,y = 0 \tag{3}$$

Здесь λ — дополнительный (акцессорный) параметр, подлежащий определению. Подстановка

$$\tau = \frac{\pi}{2K'}\,F\left(\arcsin\sqrt{\frac{\zeta + \alpha}{\alpha}},\ \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 1}}\right)$$

переводит верхнюю полуплоскость ζ во внутренность прямоугольника (фиг. 2, *в*), а уравнение (3) обращается при этом в уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda p^2 y = 0, \qquad p = \frac{4k'K'}{\pi} \tag{4}$$

Так как G и Z являются линейными комбинациями линейно независимых интегралов уравнения (4), то, решая уравнение (4), составим

$$W = \frac{G}{Z} = \frac{\left(c_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}\,p\tau\right) + c_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\,p\tau\right)}{c_3 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}\,p\tau\right) + c_4 \operatorname{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\,p\tau\right)} \tag{5}$$

Как легко видеть, постоянные $c_2 = c_3 = 0$. Поэтому

$$W = \frac{G}{Z} = \frac{c_1}{c_4}\operatorname{cth}\left(\sqrt{-\lambda}\,p\tau\right) \tag{6}$$

Сравнивая (6) и (1), найдем

$$\lambda = -\frac{1}{p^2} = -\frac{\pi^2}{16k'^2K'^2}, \qquad c_1 = i\sqrt{\varepsilon\varkappa}\,c_4 \tag{7}$$

Как известно, отношение двух линейно независимых интегралов линейного дифференциального уравнения с четырьмя регулярными особыми точками дает конформное отображение кругового, т. е. ограниченного дугами окружностей, четырехугольника на полуплоскость. Дифференциальное уравнение (3) отвечает всем круговым четырехугольникам с прямыми углами. В нашей задаче имеет место тот частный случай кругового четырехугольника с прямыми углами, у которого две стороны, не лежащие рядом, служат продолжением одна другой; именно для этого случая акцессорный параметр λ имеет значение (7).

Подставим (7) в (5). Учитывая (2), найдем

$$\frac{dz}{d\tau} = A \operatorname{sh}\tau, \qquad \frac{d\omega}{d\tau} = iA \operatorname{ch}\tau \tag{8}$$

Интегрирование этих выражений дает

$$z = A \operatorname{ch}\tau, \quad \omega = iA\sqrt{\varepsilon\varkappa}\operatorname{sh}\tau \tag{9}$$

Постоянные интегрирования равны нулю, так как $z = 0$ при $\tau = {}^1/_2 i\pi$ и $\omega = 0$ при $\tau = 0$. Полагая в первом равенстве (9) $\tau = 0$, а $z = L$, найдем, что $A = L$.

Таким образом,

$$z = L \operatorname{ch}\tau, \qquad \omega = iL\sqrt{\varepsilon\varkappa}\operatorname{sh}\tau \tag{10}$$

Подстановка пар значений

$$\tau = \frac{\pi K}{2K'}, \quad z = L_1; \qquad \tau = \frac{\pi K}{2K'} + i\frac{\pi}{2}, \quad \omega = -\varkappa h$$

в первое и второе уравнения (10) соответственно дает

$$\frac{L_1}{L} = \operatorname{ch}\frac{\pi K}{2K'}, \qquad \frac{h}{L} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varkappa}}\operatorname{ch}\frac{\pi K}{2K'} \tag{11}$$

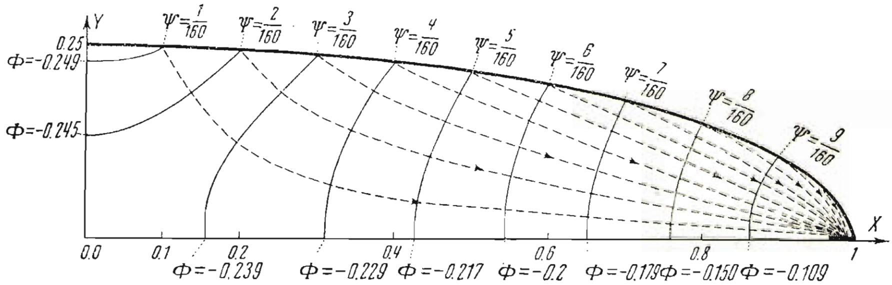
Из равенств (11) и (10) соответственно получим

$$\frac{L_1}{h} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varepsilon}}, \quad \frac{z^2}{L^2} + \frac{\omega^2}{L^2 \varepsilon \varkappa} = 1 \tag{12}$$

Полагая в последнем равенстве $z = x + iy$, $\omega = -\varkappa y + i\varepsilon x$, получим депрессионную кривую в виде эллипса

$$\frac{x^2}{L_1{}^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1 \tag{13}$$

Точно такую же кривую депрессии имеет грунтовый поток в задаче о фильтрации в прямоугольном массиве при наличии инфильтрации, решенной в гидравлической постановке [1].



Фиг. 3

Длина дренажной щели вычисляется по формуле

$$l = L_1 - \sqrt{L_1{}^2 - h^2} \tag{14}$$

Разрешая уравнение (12) относительно z и полагая $z = x + iy$, $\omega = \varphi + i\psi$, $L^2 = L_1{}^2 - h^2$, найдем

$$x^2 - y^2 = L_1{}^2 - h^2 - \frac{\varphi^2 - \psi^2}{\varepsilon\varkappa}, \qquad xy = -\frac{\varphi\psi}{\varepsilon\varkappa} \tag{15}$$

Введем безразмерные переменные величины

$$\frac{x}{L_1} = X, \quad \frac{y}{L_1} = Y, \quad \frac{h}{L_1} = H, \quad \frac{\varphi}{\varkappa L_1} = \Phi, \quad \frac{\psi}{\varkappa L_1} = \Psi$$

Тогда получим зависимость

$$X^2 - Y^2 = 1 - H^2 - \frac{\Phi^2 - \Psi^2}{H^2}, \qquad XY = -\frac{\Phi\Psi}{H^2}$$

Задаваясь значениями $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$, можно построить сетку движения. Линии $\widetilde{\Psi} = \text{const}$ и линии $\widetilde{\Phi} = \text{const}$ суть кривые четвертого порядка.

На фиг. 3 представлена сетка (не изометрическая) для случая, когда $H = {}^1/_4$, т. е. $\varepsilon = {}^1/_{16}\varkappa$.

Поступила 4 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод, Гостехиздат, М., 1952.