Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

# К РАСЧЕТУ СОПЕЛ

И. М. Юрьев

(Москва)

В заметке даются частные решения приближенных уравнений плоского и осесимметрического течения газа. Этими частными решениями можно воспользоваться при расчете околозвуковых частей сопел.

Уравнение движения газа относительно потенциала скорости имеет в случае плоского течения вид:

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\varphi_{xx}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\varphi_{yy}-\frac{2uv}{c^2}\varphi_{xy}=0: \tag{1}$$

а в случае осесимметричного течения такой вид:

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\varphi_{xx}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\varphi_{rr}-\frac{2uv}{c^2}\varphi_{xr}+\frac{\varphi_r}{r}=0 \tag{2}$$

где $c$ — скорость звука, $u=\varphi_x$, $v=\varphi_y$ (или $v=\varphi_r$).

Один из первых способов построения безударного сопла Лаваля заключался в следующем [1]: на оси симметрии сопла, т. е. на оси $Ox$, с началом координат в точке линии перехода задавалась величина $u$ как некоторая аналитическая функция от $x$. Если представить $u$ в окрестности точки $x=0$ в виде ряда и использовать уравнения движения (1) вместе с условиями симметрии, то можно последовательно определить в точке $O\,(0,\ 0)$ любую производную от $\varphi$ по $x$ и $y$. Таким образом потенциал скорости представляется в виде степенного ряда по $x$, $y$.

Недостаток этого способа заключается в том, что радиус сходимости полученного ряда по $y$ заранее неизвестен. Для плоского сопла были затем даны различные способы решения. Осесимметричные сопла изучены в меньшей мере.

Можно предложить для расчета околозвуковой части сопла следующие частные решения приближенных уравнений движения. Представим составляющую скорости по оси $x$ и скорость звука в виде

$$u=c_*+u';\qquad c^2={c_*}^2-\frac{\varkappa-1}{2}(w^2-{c_*}^2)\qquad (w^2=(c_*+u')^2+v^2)$$

где $c_*$ — критическая скорость звука.

Отбрасывая затем в коэффициентах уравнений (1) и (2) величины порядка $u'^2$ и $v^2$, получим для плоского и осесимметричного течения газа соответственно

$$-\frac{(\varkappa-1)\,u'}{c_*}\varphi_{xx}'+\varphi_{yy}-\frac{2v}{c_*}\varphi_{xy}'=0$$

$$-\frac{(\varkappa+1)\,u'}{c_*}\varphi_{xx}'+\varphi_{rr}'-\frac{2v}{c_*}\varphi_{xr}'+\frac{\varphi_r'}{r}=0$$

где $\varphi'$ — дополнительный потенциал к $c_*x$.

Обозначая $\varphi' = c_* \varphi^*$, перепишем последнее уравнение в виде:

для плоского течения газа

$$-(\varkappa + 1)\,\varphi_x{}^* \varphi_{xx}{}^* + \varphi_{yy}{}^* - 2\varphi_y{}^* \varphi_{xy}{}^* = 0 \tag{3}$$

для осесимметричного течения газа

$$-(\varkappa + 1)\,\varphi_x{}^* \varphi_{xx}{}^* + \varphi_{rr}{}^* - 2\varphi_r{}^* \varphi_{xr}{}^* + \frac{\varphi_r{}^*}{r} = 0 \tag{4}$$

Будем искать частное решение уравнения (3) вида

$$\varphi^* = \frac{1}{2} kx^2 + xf_1(y) + f_2(y) \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (3), получим для определения функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ следующие уравнения:

$$\frac{d^2 f_1(y)}{dy^2} - 2\left(\frac{df_1(y)}{dy}\right)^2 - (\varkappa + 1)\,k^2 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} - 2\frac{df_1(y)}{dy}\frac{df_2(y)}{dy} - (\varkappa + 1)\,kf_1(y) = 0 \tag{7}$$

Для функции $f_1(y)$ получаем следующее решение:

$$f_1(y) = -\frac{1}{2}\ln\cos\left(\sqrt{2(\varkappa + 1)}\; ky\right) \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (7), найдем

$$f_2(y) = \frac{1}{8k}\Big[\ln^2\cos\left(\sqrt{2(\varkappa + 1)}\; ky\right) - 2\ln\cos\left(\sqrt{2(\varkappa + y)}\; ky\right) -$$

$$- \ln^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{2}}\; ky\right)\Big] \tag{9}$$

Функции $f_1$ и $f_2$ являются четными от $y$ функциями. Дополнительные составляющие скорости равны

$$\frac{u'}{c^*} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial x} = kx - \frac{1}{2}\ln\cos\left(\sqrt{2(\varkappa + 1)}\; ky\right)$$

$$\frac{v}{c_*} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial y} = \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{2}}\left\{\Big[kx + \frac{1}{2}\ln\sec\left(\sqrt{2(\varkappa + 1)}\, ky\right) + \right. \tag{10}$$

$$\left. + \frac{1}{2}\Big]\operatorname{tg}\left(\sqrt{2(\varkappa + 1)}\, ky\right) + \frac{1}{2}\sec\left(\sqrt{2(\varkappa + 1)}\, ky\right)\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{2}}\, ky\right)\right\}$$

Линию тока можно рассчитать путем численного интегрирования уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{c_* + u'}$$

Уравнениями линий равного потенциала и линий равных скоростей соответственно будут

$$x + \varphi^*(x, r) = \text{const}, \qquad (1 + \varphi_x{}^*)^2 + \varphi_y{}^* = \lambda^2 = \text{const}$$

где $\lambda$ — величина относительной скорости.

В случае осесимметрического течения газа также будем искать частные решения вида

$$\varphi^*(x, r) = \frac{1}{2} k\varkappa^2 + xF_1(r) + F_2(r) \tag{11}$$

Для определения функций $F_1(r)$ и $F_2(r)$ получим уравнения

$$\frac{d^2F_1(r)}{dr^2} - 2\left(\frac{dF_1(r)}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{dF_1(r)}{dr} - (\varkappa + 1)\,k^2 = 0 \tag{12}$$

$$\frac{d^2F_2(r)}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - 2\,\frac{dF_1(r)}{dr}\right)\frac{dF_2(r)}{dr} - (\varkappa + 1)\,kF_1(r) = 0 \tag{13}$$

Для $F_1(r)$ найдем

$$F_1(r) = -\frac{1}{2}\ln s(r), \qquad s(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2(\varkappa+1)}\,kr\right)^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2} \tag{14}$$

Полученный ряд быстро сходится. Функция $F_2(r)$ равна

$$F_2(r) = -\frac{(\varkappa + 1)\,k}{2}\int\limits_0^r \frac{dr}{rs(r)}\int\limits_0^r rs(r)\ln s(r)\,dr \tag{15}$$

Дополнительные составляющие скорости равны

$$\frac{u'}{c^*} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial x} = kx - \frac{1}{2}\ln s(r)$$

$$\frac{v}{c^*} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial r} = -\frac{xs'(r)}{2s(r)} - \frac{(\varkappa + 1)\,k}{2r\,s(r)}\int\limits_0^r rs(r)\ln s(r)\,dr \tag{16}$$

Линию тока вычисляем путем численного интегрирования уравнения

$$\frac{dr}{dx} = \frac{v}{c_* + u'}$$

Поступила 14 VIII 1954

## ЛИТЕРАТУРА

1. Meyer T. Ueber zweidimensionale Bewegungsgleichung in einem Gas, die mit Ueberschallgeschwindigkeit strömt. Forschungshefte, 72, 1908.