Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ЛАМИНАРНАЯ НЕСЖИМАЕМАЯ СТРУЯ, БЬЮЩАЯ ИЗ РАДИАЛЬНОГО ДИФФУЗОРА ВДОЛЬ СТЕНКИ

М. С. Цуккер

(Ленинград)

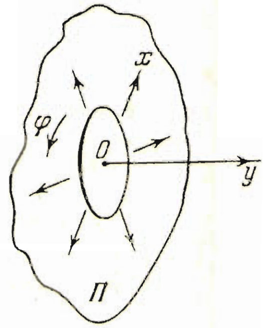
В работе Ю. Б. Румера [1] была рассмотрена задача о свободном распространении незакрученной турбулентной струи, бьющей из радиального диффузора (кольцевой турбулентный источник). Л. Г. Лойцянский [2] рассмотрел аналогичную задачу в другой постановке и обобщил ее на случай закрученной струи. Помимо свободных струй практика сталкивается со струями, распространяющимися в ограниченном пространстве. Первое теоретическое решение задачи о распространении плоской ламинарной струи вдоль стенки получил Н. И. Акатнов [3]. Приведенное в настоящей статье решение задачи о распространении вдоль стенки закрученной струи, бьющей из радиального диффузора, одной из сторон которого является сама стенка, представляет интерес, поскольку оно приближается к реальной работе вентиляционных устройств.

§ 1. Основные дифференциальные уравнения ламинарного распространения струи. Граничные и интегральные условия. В цилиндрической системе координат уравнения пограничного слоя струи, бьющей вдоль стенки (фиг. 1), запишутся следующим образом:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{w^2}{x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{uw}{x}=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu)+\frac{\partial}{\partial y}(xv)=0 \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь x отсчитывается по радиусу в плоскости П распространения струи, y — поперек этой плоскости, а φ — полярный угол в плоскости; u — продольная скорость, v — поперечная по отношению к плоскости скорость, w — скорость закрутки сртуи.

На внешней границе струи продольная скорость и скорость закрутки равны нулю, на внутренней границе равны нулю все три составляющие скорости. Поэтому граничные условия задачи будут иметь вид:

$$\begin{array}{llll} u=0, & v=0, & w=0 & \text{при } y=0 \\ u=0, & & w=0 & \text{при } y=\infty \end{array} \qquad (1.2)$$

Что касается начального условия, то для упрощения задачи, как это обычно делается, заменим его более простым интегральным условием. Для этого, пользуясь последним уравнением системы (1.1), запишем первое следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu^2)+\frac{\partial}{\partial y}(xuv)-w^2=\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}(xu) \qquad (1.3)$$

Предполагая, что написанные ниже интегралы существуют, проинтегрируем уравнение (1.3) поперек пограничного слоя:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y xu^2 dy + xuv - \int_0^y w^2 dy = \nu \frac{\partial}{\partial y}(xu) - \nu \frac{\partial}{\partial y}(xu)_0 \qquad (1.4)$$

При $y = \infty$ полученное уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty xu^2 dy - \int_0^\infty w^2\, dy = -\nu \frac{\partial}{\partial y}(xu)_0 \qquad (1.5)$$

Умножая уравнение (1.4) на xu, интегрируем еще раз по y от 0 до ∞; имеем

$$\int_0^\infty xu\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y xu^2\, dz\right) dy + \int_0^\infty x^2u^2v\, dy - \int_0^\infty xu\left(\int_0^y w^2 dz\right) dy + \nu\frac{\partial}{\partial y}(xu)_0\int_0^\infty xu\, dy = 0 \qquad (1.6)$$

Преобразуем члены уравнения (1.6) следующим образом:

$$\int_0^\infty xu\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y xu^2\, dz\right) dy = \left(\frac{d}{dx}\int_0^\infty xu^2 dy\right)\left(\int_0^\infty xu\, dy\right) - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(xu^2)\left(\int_0^y xu\, dz\right) dy =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\int_0^\infty xu^2 dy\right)\left(\int_0^\infty xu dy\right) - \frac{d}{dx}\int_0^\infty xu^2\left(\int_0^y xu\, dz\right) dy + \int_0^\infty xu^2\left[\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}(xu)\, dz\right] dy$$

$$\int_0^\infty x^2u^2v\, dy = \int_0^\infty xu^2\left[\int_0^y \frac{\partial}{\partial z}(xv)\, dz\right] dy$$

$$\int_0^\infty xu\left(\int_0^y w^2 dz\right) dy = \left(\int_0^\infty xu\, dy\right)\left(\int_0^\infty w^2\, dy\right) - \int_0^\infty w^2\left(\int_0^y xu\, dz\right) dy$$

$$\nu\frac{\partial}{\partial y}(xu)_0\int_0^y xu\, dy = -\left(\frac{d}{dx}\int_0^\infty xu^2\, dy\right)\left(\int_0^\infty xu\, dy\right) + \left(\int_0^\infty w^2 dy\right)\left(\int_0^\infty xu\, dy\right)$$

Подставив эти выражение в уравнение (1.6), будем иметь

$$-\frac{d}{dx}\int_0^\infty xu^2\left(\int_0^y xu\, dz\right) dy + \int_0^\infty xu^2\left\{\int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x}(xu) + \frac{\partial}{\partial z}(xv)\right] dz\right\} dy +$$

$$+ \int_0^\infty w^2\left(\int_0^y xu\, dz\right) dy = 0 \qquad (1.7)$$

Так как второй интеграл в выражении (1.7) равен нулю, то получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty xu^2\left(\int_0^y xu\, dz\right) dy = \int_0^\infty w^2\left(\int_0^y xu\, dz\right) dy \qquad (1.8)$$

В случае отсутствия закрутки это выражение приводит к первой теореме сохранения:

$$\int_0^\infty xu^2\left(\int_0^y xu\, dz\right) dy = E = \text{const} \qquad (1.9)$$

Как будет показано в дальнейшем, продольная скорость должна убывать медленнее, чем скорость закрутки, поэтому для закрученной струи подобное соотношение может быть получено в следующем виде:

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty xu^2\left(\int_0^y xu\,dz\right)dy = E \tag{1.10}$$

Поступая совершенно аналогично со вторым уравнением системы (1.1), получим вторую теорему сохранения, имеющую место в исследуемой струе:

$$\int_0^\infty x^2uw\left(\int_0^y xu\,dz\right)dy = G \tag{1.11}$$

Выражения (1.8) и (1.11) являются интегральными условиями, которым должно подчиняться решение системы (1.1) при граничных условиях (1.2).

§ 2. Асимптотические разложения для скоростей. Интегральные и граничные условия для коэффициентов этих разложений. Удовлетворяя уравнению неразрывности, введем функцию тока $\psi(x, y)$ меридионального течения

$$u = \frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.1}$$

Будем искать ψ в виде

$$\psi = \omega\,[x^\alpha a_1(\eta) + x^{\alpha-1}a_2(\eta) + \ldots] \qquad \left(\eta = \frac{\omega}{\nu}\,yx^\beta\right) \tag{2.2}$$

где η — новая переменная, ω — неизвестная постоянная, которая будет определена из интегрального условия.

Обозначая штрихом производную по η, будем иметь

$$\begin{gathered} u = \frac{\omega^2}{\nu}\,\{x^{\alpha+\beta-1}\,a_1' + x^{\alpha+\beta-2}\,a_2' + \ldots\} \\ v = -\,\omega\,\{x^{\alpha-2}\,[\alpha a_1 + \beta\eta a_1'] + x^{\alpha-3}\,[(\alpha-1)\,a_2 + \beta\eta a_2'] + \ldots\} \end{gathered} \tag{2.3}$$

Аналогично зададим скорость закрутки:

$$w = \frac{r}{\nu}\,\{x^\gamma\, b_1(\eta) + x^{\gamma-1}\, b_2(\eta) + \ldots\} \tag{2.4}$$

а постоянную r определим из второго интегрального условия.

Очевидно, что если функция тока для закрученной струи может быть записана в виде выражения (2.2), то для незакрученной струи она будет иметь вид:

$$\psi = \omega x^\alpha\, a_1(\eta) \tag{2.5}$$

Постоянные α и β свойственны данному типу струи. Их величина не может меняться в зависимости от конкретной величины закрутки и останется той же, если закрутка исчезнет. Исходя из этих соображений, определим α и β, полагая, что скорость закрутки равна нулю.

Потребовав, чтобы первое уравнение (1.1) при $w = 0$ и интегральное условие (1.9) не зависели от x, получим, что $\alpha = {}^3/_4$, а $\beta = -\,{}^5/_4$. Совершенно аналогично для закрученной струи из условия (1.11) будем иметь, что $\gamma = -\,{}^5/_2$. Таким образом, видим, что

$$u \sim x^{-{}^3/_2}, \qquad w \sim x^{-{}^5/_2} \tag{2.6}$$

т. е. продольная скорость убывает медленнее, чем скорость закрутки. Значит, в закрученной струе имеет место интегральное условие (1.10).

Вычислив производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\,\frac{\omega^2}{\nu}\left[\left(\frac{3}{2}\,a_1' + \frac{5}{4}\,\eta a_1''\right)x^{-{}^5/_2} + \left(\frac{5}{2}\,a_2' + \frac{5}{4}\,\eta a_2''\right)x^{-{}^7/_2} + \ldots\right] \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\omega^3}{\nu^2}\,[a_1''x^{-{}^{11}/_4} + a_2''x^{-{}^{15}/_4} + \ldots], \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\omega^2}{\nu^3}[a_1'''x^{-4} + a_2'''x^{-5} + \ldots]$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\,\frac{r}{\nu}\left[\left(\frac{5}{2}\,b_1 + \frac{5}{4}\,\eta b_1'\right)x^{-{}^7/_2} + \left(\frac{7}{2}\,b_2 + \frac{5}{4}\,\eta b_2'\right)x^{-{}^9/_2} + \ldots\right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\omega r}{\nu^2}\,(b_1'x^{-{}^{15}/_4} + b_2'x^{-{}^{19}/_4} + \ldots), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\omega^2 r}{\nu^3}\,(b_1''x^{-5} + b_2''x^{-6} + \ldots)$$

подставим их выражения в первые два уравнения системы (1.1) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях аргумента. Довольствуясь первыми членами разложений, получим систему уравнений первого приближения:

$$a_1''' + \frac{3}{4}a_1 a_1'' + \frac{3}{2}a_1'^2 = 0, \qquad b_1'' + \frac{3}{4}a_1 b_1' + \frac{3}{2}a_1' b_1 = 0 \tag{2.8}$$

Этим уравнениям соответствуют граничные условия, которые могут быть выведены из системы (1.2) при помощи систем (2.3) и (2.4) и условия $\psi|_{\eta=0} = 0$; имеем

$$\begin{aligned} &a_1 = a_1' = b_1 = 0 \qquad && \text{при } \eta = 0, \\ &a_1' = b_1 = 0 && \text{при } \eta = \infty \end{aligned} \tag{2.9}$$

К полученным граничным условиям добавятся интегральные условия, вытекающие из формул сохранения (1.10) и (1.11):

$$\int_0^\infty a_1 a_1'^2\, d\eta = \frac{E\nu}{\omega^4}, \qquad \int_0^\infty a_1 a_1' b_1\, d\eta = \frac{G\nu}{\omega^2 r} \tag{2.10}$$

§ 3. Интегрирование уравнений первого приближения. Обращаясь к интегрированию первого уравнения системы (2.8) видим, что оно не содержит в явном виде независимой переменной, поэтому его порядок может быть понижен введением переменной

$$c(a_1) = \frac{da_1}{d\eta} \tag{3.1}$$

после чего будем иметь

$$c\frac{d^2c}{da_1^2} + \left(\frac{dc}{da_1}\right)^2 + \frac{3}{4}a_1\frac{dc}{da_1} + \frac{3}{2}c = 0 \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2), будучи умноженным на a_1, может быть переписано в виде

$$\frac{d}{da_1}\left(a_1\frac{dc^2}{da_1}\right) - \frac{dc^2}{da_1} + \frac{3}{2}\frac{d}{da_1}\left(a_1^2 c\right) = 0$$

и проинтегрировано один раз:

$$2a_1 c\frac{dc}{da_1} - c^2 + \frac{3}{2}a_1^2 c = D_1 \tag{3.3}$$

Граничные условия уравнения (3.3) запишутся следующим образом:

$$c = 0 \quad \text{при } a_1 = 0, \qquad c = 0 \quad \text{при } a_1 = a_1(\infty) = A_1 \tag{3.4}$$

Следовательно, $D_1 = 0$. Таким образом, уравнение (3.3) принимает вид:

$$2a_1\frac{dc}{da_1} - c + \frac{3}{2}a_1^2 = 0$$

и имеет интеграл

$$c = D_2 a_1^{1/2} - \frac{1}{2}a_1^2 = \frac{da_1}{d\eta}$$

В силу второго граничного условия (3.4) имеем

$$\frac{da_1}{d\eta} = \frac{1}{2}\left(A_1^{3/2} a_1^{1/2} - a_1^2\right) \tag{3.5}$$

Постоянную A_1 определим так, чтобы производная $da_1/d\eta$ в точке максимума равнялась единице, т. е. положим

$$A_1 = 4\times 54^{-1/6} = 2.0575$$

Проинтегрировав уравнение (3.5), получим

$$\eta = \frac{2}{3A_1}\ln\frac{a_1 + \sqrt{a_1 A_1} + A_1}{(\sqrt{a_1} - \sqrt{A_1})^2} + \frac{4}{A_1\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{a_1} + \sqrt{A_1}}{\sqrt{3A_1}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{3.6}$$

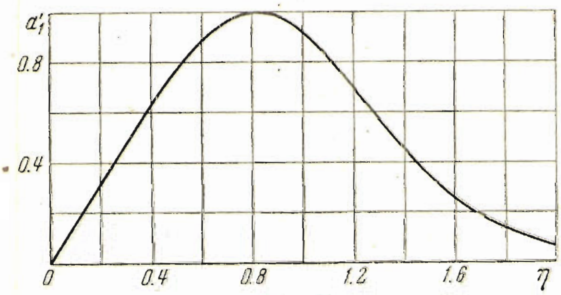
Переходя к интегрированию второго уравнения системы (2.8), видим, что решение его может быть написано в виде $b_1 = D_3 a_1'$. Величина b_1 определяется с точностью до постоянного множителя, поэтому считаем, что $D_3 = 1$. Таким образом, имеем

$$b_1 = \frac{da_1}{d\eta} = \frac{1}{2}\left(A_1^{3/2}\, a_1^{1/2} - a_1^2\right) \tag{3.7}$$

Задаваясь различными значениями a_1, подсчитываем η и $da_1/d\eta$, строим кривую $a_1' = a_1'(\eta)$ (фиг. 2). Подставляя (3.5) и (3.7) в интегральные условия (2.10), получим

$$\omega = \frac{1}{A_1}\sqrt{\frac{40\, E\nu}{3}}, \qquad r = \frac{40\, G\nu}{3\omega^2 A_1^4} \tag{3.8}$$

В заключение приводим формулы для определения в первом приближении ско-



Фиг. 2

ростей, массового расхода, суммарного импульса, момента и напряжения трения на стенке:

$$u = 0.41198 \left(\frac{E\rho}{\mu}\right)^{1/2} \frac{da_1}{d\eta}\, x^{-3/2}, \qquad w = 0.41198 \left(\frac{G^2\rho}{E\mu}\right)^{1/2} \frac{da_1}{d\eta}\, x^{-5/2},$$

$$Q = 12.006\, (E\mu\rho^3)^{1/4}\, x^{3/4}, \qquad K = 7.3069 \left(\frac{E^3\rho^5}{\mu}\right)^{1/4} x^{-3/4} \tag{3.9}$$

$$L = 7.3069 \left(\frac{G^4\rho^5}{E\mu}\right)^{1/4} x^{-3/4}$$

$$\tau_{xy} = 0.87220 \left(\frac{E^3\rho^5}{\mu}\right)^{1/4} x^{-11/4}, \qquad \tau_{y\varphi} = 0.87220 \left(\frac{G^4\rho^5}{E\mu}\right)^{1/4} x^{-13/4}$$

Обратим внимание также на тот факт, что в рассматриваемом приближении в струе сохраняются произведения расхода на суммарной импульс и расхода на момент:

$$QK = \frac{80}{9}\pi^2\rho^2 E = \text{const}, \qquad QL = \frac{80}{9}\pi^2\rho^2 G = \text{const} \tag{3.10}$$

Поступила 2 VII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Румер Ю. Б. Кольцеобразный турбулентный источник. ДАН, т. LXIV, № 4, 1949.
2. Лойцянский Л. Г. Радиально-щелевая струя в пространстве, заполненном той же жидкостью. Труды ЛПИ им. М. И Калинина, № 5, 1953.
3. Акатнов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки. Труды ЛПИ им. Калинина, № 5, 1953.