Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФУЗИОННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ДИФФУЗОРЕ

В. П. Шестопалов

(Харьков)

В связи с тем, что полная система уравнений для диффузионного пограничного слоя является системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, нахождение концентраций в слое представляет большие трудности. Обычно при решении таких задач используют весьма упрощенные выражения для распределения скоростей в пограничном слое [1], что облегчает интегрирование основного уравнения конвективной диффузии. Такого рода упрощения возможны за счет малости толщины диффузионного слоя.

Представляет также интерес нахождение решений задачи диффузионного пограничного слоя в замкнутой форме [1].

В настоящей работе приведено точное решение уравнений ламинарного диффузионного пограничного слоя в диффузоре.

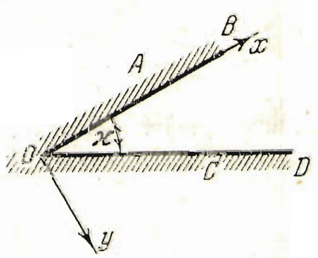
1. Рассмотрим случай, когда поверхностью реакции служит одна из стенок диффузора, т. е. исследуем распределение концентраций в диффузионном пограничном слое вдоль одной из стенок OAB диффузора при плоском установившемся течении жидкости между двумя стенками OAB и OCD, наклоненными друг к другу под углом $\varkappa$. Координаты выбираем согласно фиг. 1.

Исходные уравнения этой задачи имеют вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (1.1)$$

$$v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$



Фиг. 1

где v_x, v_y — проекции скорости на оси x и y, ρ — плотность жидкости, p — нормальное давление, ν — кинематическая вязкость жидкости, D — коэффициент диффузии $C(x, y)$ — распределение концентрации вещества в растворе.

Нахождение распределения концентрации вещества в пограничном слое сведется к решению (1.1) при заданных граничных условиях. Как обычно, граничные условия задаем на поверхности реакции и вдали от нее. Для поля скоростей граничные условия запишутся следующим образом:

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad v_x = V(x) \quad \text{при } y = \infty \qquad (1.2)$$

Граничные условия для $C(x, y)$ имеют вид:

$$C = C_0(x) \quad \text{при } y = 0, \qquad C = 0 \quad \text{при } y = \infty \qquad (1.3)$$

---

[1] Автору известен единственный случай точного решения уравнений конвективной диффузии, а именно задача о конвективной диффузии к диску [2].

Отметим, что многими свойствами диффузионный пограничный слой напоминает обычный тепловой пограничный слой. В то же время между ними имеется существенное количественное различие: диффузионный слой значительно тоньше теплового и поэтому другие его свойства отличаются от аналогичных свойств теплового пограничного слоя. Уравнения теплового пограничного слоя обычно содержат величины, учитывающие тепло, которое получается от рассеяния [3]. Это значительно усложняет решение задачи. В рассматриваемом случае (1.1) эти трудности отсутствуют.

Как известно, для пограничного слоя скоростей в случае сходящегося течения в диффузоре задача решена полностью [4]. При этом для тангенциальной и нормальной слагающих скоростей получены следующие значения:

$$v_x = \frac{Q}{\varkappa x} u(\xi) = V(x)\, u(\xi) \tag{1.4}$$

$$v_y = \xi \frac{Q}{\varkappa x} u(\xi) = \xi V(x)\, u(\xi) \tag{1.5}$$

$$V(x) = \frac{Q}{\varkappa x} \tag{1.6}$$

где $V(x)$ — скорость течения жидкости вне пограничного слоя, а

$$u(\xi) = 3\,\mathrm{th}^2 \left\{\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \xi \sqrt{\frac{R}{2\varkappa}}\right\} - 2 \tag{1.7}$$

Здесь $R = |Q| / \nu$ — число Рейнольдса, Q — обильность источника, $\xi = y / x$ (для сходящегося течения в диффузоре $Q < 0$). Функция $u(\xi)$ при $0 \leqslant u < 1$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$u'' = \frac{Q}{\nu\varkappa}(1 - u^2), \qquad u'^2 = -\frac{2}{3}\frac{Q}{\nu\varkappa}(u-1)^2(u+2) \tag{1.8}$$

Штрихи обозначают производные по ξ.

Ограничимся одним из возможных решений уравнения (1.1, А), для чего введем новые переменные x и $\xi = y / x$ и новую функцию $\Phi(\xi)$ по формуле

$$C(x, y) = \frac{1}{x^3}\Phi(\xi) + C_1 \tag{1.9}$$

где C_1 — концентрация C при $x \to \infty$. Производные, входящие в третье уравнение (1.1), запишутся теперь так:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{x^4}(3\Phi + \xi\Phi'), \qquad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{x^4}\Phi', \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{1}{x^5}\Phi'' \tag{1.10}$$

Подставляя в (1.1, А) (1.4), (1.5), (1.10), получим для $\Phi(\xi)$ следующее уравнение:

$$\Phi'' + \frac{3Q}{\varkappa D} u\Phi = 0 \tag{1.11}$$

Штрихи обозначают производные по ξ. Будем считать, что

$$\Phi(\xi) = \Psi\{u(\xi)\} \tag{1.12}$$

После подстановки Φ, $\Phi_{\xi\xi}'' = u_\xi'^2 \Psi_{uu}'' + u_{\xi\xi}'' \Psi_u'$ и использования (1.8) получим

$$\Psi'' + \frac{3}{2}\frac{u+1}{(u-1)(u+2)}\Psi' - \frac{9}{2}P\frac{u}{(u-1)^2(u+2)}\Psi = 0 \tag{1.13}$$

где $P = \nu / D$ — диффузионное число Прандтля. Полученное уравнение (1.13) представляет собой уравнение класса Фукса, которое при помощи подстановки

$$t = -\frac{1}{3}(u-1) \tag{1.14}$$

приводится к виду уравнения Гаусса

$$\Psi'' + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\right)\Psi' + P\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - \frac{2}{t-1}\right)\Psi = 0 \tag{1.15}$$

здесь штрихи обозначают производные по t. Особыми точками (1.15) являются точки $t=0$, $t=1$, $t=\infty$. Корни определяющих уравнений имеют значения:

$$\alpha_1 = \sqrt{P}, \quad \alpha_2 = -\sqrt{P} \quad \text{при } t=0; \quad \beta_1 = 0, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2} \quad \text{при } t=1 \tag{1.16}$$
$$\gamma_1 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{1+48P}), \qquad \gamma_2 = \frac{1}{4}(1-\sqrt{1+48P}) \qquad \text{при } t=\infty$$

Подстановкой

$$\Psi(t) = t^{\sqrt{P}} w(t) \tag{1.17}$$

(1.15) приводится к гипергеометрическому уравнению

$$w'' + \frac{-(2\sqrt{P}+1)+(1+2\sqrt{P}+{}^1/_2)\,t}{t(t-1)}\,w' + \frac{-2P+{}^1/_2\sqrt{P}}{t(t-1)}\,w = 0 \tag{1.18}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде гипергеометрического ряда $F(\alpha, \beta, \gamma; t)$, причем, так как

$$\alpha = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad \beta = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2, \quad \gamma = \alpha_1 - \alpha_2 + 1$$

то (1.19)

$$\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{1+48P}) + \sqrt{P}, \qquad \beta = \frac{1}{4}(1-\sqrt{1+48P}) + \sqrt{P}, \qquad \gamma = 2\sqrt{P}+1$$

Используя (1.19), запишем (1.18) в следующем виде:

$$w'' + \frac{-\gamma+(1+\alpha+\beta)\,t}{t(t-1)}\,w' + \frac{\alpha\beta}{t(t-1)}\,w = 0 \tag{1.20}$$

Так как $t = -{}^1/_3(u-1)$ и $0 \leqslant u < 1$, то $0 < t \leqslant {}^1/_3$, т. е. решение уравнения (1.20) нужно рассматривать в окрестности особой точки $t=0$.

Частными решениями уравнения (1.20) будут следующие функции:

$$w_1(t) = F(\alpha, \beta, \gamma; t), \qquad w_2(t) = t^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; t)$$

Общее решение (1.20) теперь можно записать так:

$$w(t) = AF(\alpha, \beta, \gamma; t) + Bt^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; t) \tag{1.21}$$

где A и B — произвольные постоянные, значения которых можно определить, используя граничные условия (1.2). Легко заметить, что

$$\xi = 0, \qquad u = 0, \qquad t = {}^1/_3 \text{ при } y = 0 \qquad (C = C_0(x))$$
$$\xi = \infty, \qquad u = 1, \qquad t = 0 \quad \text{при } y = \infty \qquad (C = 0)$$

При помощи (1.3) граничные условия для $w(t)$ можно представить так:

$$w\left(\frac{1}{3}\right) \approx \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{P}}, \qquad w(t)\big|_{t\to 0} \approx Nt^{\sqrt{P}}, \qquad N = \mathrm{const} \tag{1.22}$$

Используя (1.3) и (1.22), можно показать, что

$$B = 0, \qquad A = \frac{3^{\sqrt{P}} x^3 C_0}{F(\alpha, \beta, \gamma; {}^1/_3)}$$

Производя последовательную подстановку значений величины A, (1.21), (1.17), (1.14), (1.12) в (1.9), получим распределение концентрации в пограничном слое:

$$C = \frac{3^{\sqrt{P}} C_0}{F(\alpha, \beta, \gamma; {}^1/_3)}\, t^{\sqrt{P}} F(\alpha, \beta, \gamma; t) + C_1 \tag{1.23}$$

где t можно записать в такой простой форме:

$$t = -\frac{1}{3}(u-1) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \xi\sqrt{R/2\varkappa}\}} \tag{1.24}$$

Профиль концентраций при помощи (1.23) для заданных x, Q и $\varkappa$ с изменением y вычисляется просто, если учесть связь между y, x, t, которая дается (1.24).

Так как толщина диффузионного пограничного слоя очень мала, формулу (1.23) можно упростить. Ограничиваясь низшими степенями разложения в (1.23), получим в первом приближении формулу для распределения безразмерных концентраций:

$$\frac{C - C_1}{C_0} = \frac{a}{\mathrm{ch}^2 \sqrt{P}\,(n + my/x)} \left\{1 + \frac{b}{\mathrm{ch}^2\,(n + my/x)}\right\} \qquad (1.25)$$

где

$$a = \frac{3\sqrt{P}}{F\,(\alpha, \beta, \gamma; {}^1/_3)}, \qquad b = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \qquad n = \ln\,(\sqrt{2} + \sqrt{3}), \qquad m = \sqrt{\frac{R}{2\varkappa}}$$

Полученные решения (1.23) или (1.25) удовлетворяют исходному уравнению (1.1) и граничным условиям (1.3)

2. Определим диффузионный поток и толщину диффузионного пограничного слоя.

Плотность потока частиц на поверхности OAB стенки диффузора определяется по формуле

$$j = D\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0}, \qquad j = \frac{1}{x}\,\frac{C_0 D}{\sqrt{2\varkappa}}\sqrt{R}K\,(P) \qquad (2.1)$$

где $\partial C / \partial y$ вычисляется дифференцированием (1.23), а

$$K\,(P) = \frac{1.68}{2\sqrt{P} + 1}\,[2P\,\{F\,(\alpha, \beta, \gamma; 0.3) - 0.3\,F\,(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, 0.3)\} +$$
$$+ \sqrt{P}\,\{F\,(\alpha, \beta, \gamma; 0.3) + 0.15\,F\,(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; 0.3)\}] \qquad (2.2)$$

Таким образом, выражение для диффузионного тока зависит от числа Прандтля довольно сложным образом. Однако формула (2.1) значительно упрощается, если учесть, что P в жидкостях порядка $10^3 - 10^4$. В этом случае j запишется в виде такого простого выражения

$$j = \frac{1}{x}\,\frac{L}{\sqrt{2\varkappa}}\,C_0 D \sqrt{RP} \qquad (2.3)$$

где

$$L = \mathrm{const} = 1.68\,\{0.3\,F\,(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; 0.3) - F\,(\alpha, \beta, \gamma; 0.3)\} \qquad (2.4)$$

Используя приближенное выражение для диффузионного тока

$$j = \frac{DC_0}{\delta} \qquad (2.5)$$

которое дается теорией Нернста[5], можно найти значение для толщины диффузионного пограничного слоя δ. Окончательная формула для δ имеет следующий вид:

$$\delta = x\,\frac{\sqrt{2\varkappa}}{L}\,\frac{1}{\sqrt{RP}} \qquad (2.6)$$

Оценим по порядку величины δ для воды. Число Прандтля для воды $P \approx 10^3$; число Рейнольдса R положим порядка 10^3; угол, образованный стенками диффузора, $\varkappa \approx 8°$. Тогда из (1.19) следует, что $\alpha \approx 55$, $\beta \approx -55$, $\gamma \approx 65$, а постоянная величина $L \approx 1$. Произведенный расчет дает для δ следующую приближенную формулу:

$$\delta \approx 2 \times 10^{-3}\ x\ \text{см} \qquad (2.8)$$

что не противоречит общим представлениям о диффузионном пограничном слое [5].

Поступила 13 III 1954

Харьковский педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Теория концентрационной поляризации. ЖФХ 18, 335, 1944.
2. Левич В. Г. Теория диффузионной кинетики гетрогенных химпроцессов. ЖФХ 22, 575, 1948.
3. Шестопалов В. П. Об одном частном решении для теплового пограничного слоя в диффузоре. ПММ, т. XVI, вып. 5, стр. 613, 1952.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика, т. II, § 33. Гостехиздат, 1948.
5. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика, 46, М. 1952.