Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ЧАПЛЫГИНА ПРИ СУЩЕСТВОВАНИИ УСЛОВНЫХ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Ф. Шульгин

(Ташкент)

В статье [1] М. И. Ефимов, анализируя работу [2] С. А. Чаплыгина, утверждает, что «...вывод уравнений и самые уравнения Чаплыгина имеют место лишь при условии, что параметры $q_1, \ldots, q_n$ являются голономными лагранжевыми координатами и не могут быть координатами, неголономными». Далее он пишет (стр. 748): «Однако в другой работе [3] Чаплыгин, повидимому, упустил из виду указанное важное условие и сделал ошибку при решении известной задачи о движении твердого тела параллельно плоскости». В настоящей заметке показывается, что эти утверждения М. И. Ефимова ошибочны.

1. В работе [2] Чаплыгин, пользуясь основным уравнением динамики в форме

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L_0}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0, \qquad L_0=T_0+U \tag{1}$$

впервые в мировой литературе получил уравнения движения для механических систем с линейными неголономными связями, не вводя неопределенных множителей. Установленные для частного случая, когда коэффициенты $B_{\rho\mu}$ в уравнениях связей

$$\dot{q}_\mu=\sum_{\rho=m+1}^{n}B_{\rho\mu}\dot{q}_\rho \qquad (\mu=1,\ldots,m) \tag{2}$$

и кинетический потенциал L_0 не зависят от обобщенных координат $q_1,\ldots,q_m$, уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho}-\frac{\partial L}{\partial q_\rho}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\mu}\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho}-\frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\nu=0 \qquad (\rho=m+1,\ldots,n) \tag{3}$$

где L обозначает функцию, полученную из L_0 исключением зависимых скоростей $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_m$ при помощи уравнений (2).

В другой работе [3] С. А. Чаплыгин указал способ получения для некоторого класса неголономных систем обычных канонических уравнений, дал обобщение на такие системы метода интегрирования Гамильтона-Якоби и в качестве примера привел решение задачи о неголономном движении твердого тела параллельно плоскости. Эта задача состоит в следующем.

На горизонтальную плоскость тремя точками опирается твердое тело; две из этих точек представляют простые, свободно скользящие ножки, а третья есть точка прикосновения острого колесика, горизонтальная ось которого неизменно скреплена с движущимся телом. Допустим, что колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Положение тела определяем горизонтальными координатами ξ, η точки прикосновения A колесика и углом φ, который составляет ось Ax, связанная с телом и лежащая в плоскости колесика, с неподвижной осью $O\xi$. Горизонтальная проекция центра тяжести тела определяется ее координатами α и β по подвижным осям. Требуется исследовать движение тела по инерции.

Связи данной системы сводятся к одному неинтегрируемому уравнению

$$\dot{\eta} = \dot{\xi} \operatorname{tg} \varphi \tag{4}$$

Для решения задачи Чаплыгин, наряду с голономными координатами ξ, η, φ, ввел избыточную (лишнюю) координату q, где q — длина дуги траектории центра колесика, которая связана с ξ, η, φ двумя неинтегрируемыми уравнениями

$$\dot{\xi} = \dot{q} \cos \varphi, \qquad \dot{\eta} = \dot{q} \sin \varphi \tag{5}$$

Если из (5) исключить лишнюю переменную $\dot{q}$, то мы получим уравнение неголономной связи в форме (4). В дальнейшем, чтобы подчеркнуть этот важный факт, уравнения типа (5) мы будем называть условными уравнениями.

Чаплыгин решает задачу, применяя теорию приводящего множителя и метод интегрирования Гамильтона-Якоби; найденное им решение можно представить в виде

$$\varphi = \frac{1}{h} \arccos \frac{g e^{-hu}}{\sqrt{\mu}} + g_1, \qquad t + C = -\frac{n^2}{\alpha \sqrt{2\lambda}} \ln \frac{\sqrt{\mu}\, e^{hu} - \sqrt{\mu e^{2hu} - g^2}}{g} \tag{6}$$

$$\xi = \beta \sin \varphi + n \int \cos \varphi \, du, \qquad \eta = -\beta \cos \varphi + n \int \sin \varphi \, du \tag{7}$$

Здесь g, g_1, λ, C — произвольные постоянные, k — радиус инерции тела (массы-1) относительно вертикали, проходящей через центр тяжести;

$$u = \frac{1}{n}(q - \beta\varphi), \quad n = \sqrt{\alpha^2 + k^2}, \quad h = \frac{\alpha}{n}, \quad \mu = 2\lambda n^2 \tag{8}$$

Что касается дифференциальных уравнений движения тела для параметров φ и q, то эти уравнения (повидимому, за ненадобностью) Чаплыгиным выписаны не были.

Составим уравнения движения тела при условных уравнениях (5) и свободных параметрах q и φ. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}(-\beta\dot{q} + \gamma^2\dot{\varphi}) + \alpha\dot{\varphi}\dot{q} = 0, \qquad \frac{d}{dt}(\dot{q} - \beta\dot{\varphi}) - \alpha\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k^2 \tag{9}$$

Но в статье [1] М. И. Ефимов относительно введенной С. А. Чаплыгиным избыточной координаты q пишет (стр. 749): «Однако это незаконно, так как q — неголономная координата и не обладает теми свойствами, которые предполагаются при выводе уравнений Чаплыгина. ... При наличии такой координаты среди тех параметров, через которые выражаются T_0 и вариации, входящие в основное уравнение (1), уравнения Чаплыгина не имеют места. Поэтому решение, найденное Чаплыгиным для задачи о „санях", неверно». Эти утверждения ошибочны. Для подкрепления этих неверных утверждений далее М. И. Ефимов пишет: «Можно решить указанную задачу элементарным способом, составив уравнения Чаплыгина при неголономной связи $\dot{\eta} = \dot{\xi} \operatorname{tg} \varphi$ и свободных параметрах ξ и φ. Эти уравнения имеют вид:

$$\beta \cos\varphi \ddot{\xi} - \gamma^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi} + (\beta \sin \varphi - \alpha \cos \varphi)\dot{\xi}\dot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\xi} - \beta \cos \varphi \ddot{\varphi} + \operatorname{tg} \varphi \dot{\xi} \dot{\varphi} - \alpha \cos \varphi \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k^2\text{»} \tag{10}$$

М. И. Ефимов тоже решает задачу до конца; пользуясь интегралом энергии, он получает для угла φ выражение

$$\varphi = \pm \left\{ \frac{n}{\alpha} \arccos \frac{1}{\operatorname{ch}(C_0 t + C_1)} - \frac{C}{\alpha} \right\} \tag{11}$$

а затем решение представляет в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{h_0}{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(C_0 t + C_1)}, \qquad \dot{\eta} = \dot{\xi} \operatorname{tg} \varphi, \qquad \dot{\xi} = h_0 \left[\frac{\beta}{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(C_0 t + C_1)} \pm \operatorname{th}(C_0 t + C_1) \right] \cos \varphi \tag{12}$$

Здесь

$$C_1 = \pm \frac{C_1^\circ \alpha}{n}, \qquad C_0 = \pm \frac{\alpha h_0}{n^2} \tag{13}$$

а величины h_0, C_1°, C — произвольные постоянные.

Уравнения (10) составлены верно. Что касается найденного М. И. Ефимовым решения (12), то оно требует уточнения, а именно в формулах (13) и (12) вместо двух знаков $\pm$ следует сохранить только один, например знак плюс. Об этом он в статье [1] ничего не пишет. Вернемся к уравнениям (10). Эти уравнения ничем по существу не отличаются от уравнений (9). Действительно, вводя в уравнения (9) вместо $\dot{q}$ величину $\dot{\xi}$ при помощи первого уравнения системы (5) и выполняя затем дифференцирование по времени, получим не что иное, как уравнения (10), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Таким образом, вопреки утверждению М. И. Ефимова, уравнения Чаплыгина (3) справедливы и применимы к задаче о плоском неголономном движении тела и при наличии избыточной координаты q, связанной с координатами ξ, η, φ условными уравнениями (5).

Покажем теперь, что решения (6) и (7) тоже верны и по существу ничем не отличаются от решения (12), если в последнее внести указанные выше поправки.

Действительно, найденное Чаплыгиным решение можно представить в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{C_0 n}{\alpha} \frac{1}{\operatorname{ch}(C_0 t + C_1)}, \qquad \dot{q} = \frac{\dot{\xi}}{\cos\varphi} = \frac{C_0 n^2}{\alpha}\left[\frac{\beta}{n}\frac{1}{\operatorname{ch}(C_0 t + C_1)} + \operatorname{th}(C_0 t + C_1)\right]$$

$$\dot{\eta} = \dot{\xi}\operatorname{tg}\varphi, \qquad C_0 = \frac{\alpha\sqrt{2\lambda}}{n^2}, \qquad C_1 = \frac{C\alpha\sqrt{2\lambda}}{n^2} \tag{14}$$

а это не что иное, как решение (12) (надлежащим образом исправленное), т. е. вопреки утверждению М. И. Ефимова решения (6) и (7) верны. Итак, на частной задаче мы убедились в справедливости уравнений Чаплыгина и при наличии избыточной координаты. Выясним, какую форму примут уравнения Чаплыгина, если отбросить ограничение о голономности и независимости координат.

2. Пусть конфигурация неголономной системы, движущейся в потенциальном силовом поле, во всякий момент времени определяется голономными лагранжевыми координатами $q_1, \ldots, q_n$, система имеет кинетический потенциал $L_0(q_i, \dot{q}_i, t)$, а обусловленные неголономностью кинематические связи выражаются m уравнениями вида

$$\dot{q}_\mu - \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\dot{q} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

где коэффициенты $B_{\rho\mu}$ являются известными функциями координат. Возьмем снова основное уравнение динамики в форме (1). Для исследования движения системы, наряду с координатами $q_1, \ldots, q_n$, введем $k\,(k < n - m)$ избыточных координат $q_{n+1}, \ldots, q_{k+n}$ (которые могут быть как голономными, так и неголономными), связанные с $q_1, \ldots, q_n$ k линейными неинтегрируемыми уравнениями вида

$$\sum_{\nu=1}^{n+k} a_{\nu\sigma}\dot{q}_\nu = 0 \qquad (\sigma = m+1, \ldots, m+k) \tag{16}$$

где $a_{\nu\sigma}$ — известные функции координат; уравнения (16) предполагаются независимыми между собой и независимыми по отношению к уравнениям (15).

Рассмотрим следующий частный случай. Пусть коэффициенты $a_{\nu\sigma}$, $B_{\rho\mu}$ и кинетический потенциал L_0 не зависят от координат $q_1, \ldots, q_{m+k}$. Тогда уравнения (15) и (16) дают возможность выразить $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{m+k}$ через остальные координаты и их производные в виде

$$\dot{q}_\sigma = \sum_{\nu=m+k+1}^{n+k} A_{\nu\sigma}\dot{q}_\nu \qquad (\sigma = 1, \ldots, m+k) \tag{17}$$

где $A_{\nu\sigma}$ суть функции координат $q_{m+k+1}, \ldots, q_n$ и (возможно, также избыточных координат) $q_{n+1}, \ldots, q_{n+k}$ (если последние голономные; неголономные координаты в $A_{\nu\sigma}$ входить, очевидно, не могут). Ясно, что если из уравнений (17) исключить избыточные переменные, то мы получим уравнения неголономных связей в форме (15). Система (17) — система условных уравнений, она содержит k лишних уравнений, от которых при желании можно освободиться

Очевидно, что между вариациями координат δq_ρ имеют место соотношения вида

$$\delta q_\sigma = \sum_{\nu=m+k+1}^{n+k} A_{\nu\sigma}\delta q_\nu \qquad (\sigma = 1, \ldots, m+k) \tag{18}$$

Так как $A_{\nu\sigma}$ не зависит от координат $q_1, \ldots, q_{m+k}$, а L_0 зависит лишь только от их производных, то уравнения (17) и (18) позволяют совершенно исключить эти координаты из уравнения (1). Вводя в это уравнение вместо зависимых вариаций $\delta q_\sigma (\sigma = 1, \ldots, m+k)$ их выражения (18), и, приравняв затем нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим (19)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} + \sum_{\sigma=1}^{m+k} A_{i\sigma}\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0, \qquad \sum_{\sigma=1}^{m+k} A_{\nu\sigma}\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = m+k+1, \ldots, n \\ \nu = n+1, \ldots, n+k \end{pmatrix}$$

Обозначим через L результат исключения зависимых скоростей

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{m+k} \quad \text{из} \quad L_0(t; q_{m+k+1}, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$

при помощи уравнений (17). Допустим сначала, что все избыточные координаты $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+k}$ являются голономными и что $A_{\nu\sigma}$ суть функции $q_{m+k+1}, \ldots, q_{n+k}$. Тогда L станет функцией от $t, q_{m+k+1}, \ldots, q_{n+k}, \dot{q}_{m+k+1}, \ldots, \dot{q}_{n+k}$. Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\sigma=1}^{m+k} A_{i\sigma}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L_0}{\partial q_i} + \sum_{\sigma=1}^{m+k}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\sum_{\lambda=m+k+1}^{n+k}\frac{\partial A_{\lambda\sigma}}{\partial q_i}\dot{q}_\lambda \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} = \sum_{\sigma=1}^{m+k} A_{\nu\sigma}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = \sum_{\sigma=1}^{m+k}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\sum_{\lambda=m+k+1}^{n+k}\frac{\partial A_{\lambda\sigma}}{\partial q_\nu}\dot{q}_\lambda \tag{21}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\sigma=1}^{m+k} A_{i\sigma}\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\sigma=1}^{m+k}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{dA_{i\sigma}}{dt} \tag{22}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{m+k} A_{\nu\sigma}\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \sum_{\sigma=1}^{m+k}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{dA_{\nu\sigma}}{dt} \qquad (i = m+k+1, \ldots, n) \tag{23}$$

причем

$$\frac{dA_{j\sigma}}{dt} = \sum_{\lambda=m+k+1}^{n+k}\frac{\partial A_{j\sigma}}{\partial q_\lambda}\dot{q}_\lambda \qquad \begin{pmatrix} j = m+k+1, \ldots, n+k \\ \nu = n+1, \ldots, n+k \end{pmatrix} \tag{24}$$

Пользуясь (20), (21), (22), (23) и (24), получаем из (19) уравнения вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial L}{\partial q_\rho} + \sum_{\sigma=1}^{m+k}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\sum_{\lambda=m+k+1}^{n+k}\left(\frac{\partial A_{\lambda\sigma}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial A_{\rho\sigma}}{\partial q_\lambda}\right)\dot{q}_\lambda = 0 \qquad (\rho = m+k+1, n+k) \tag{25}$$

Мы получим, таким образом, обычные $n - m$ уравнений Чаплыгина.

Допустим теперь, что все избыточные координаты $q_{n+1}, \ldots, q_{n+k}$ являются неголономными координатами. В этом случае $A_{\nu\sigma}, L$ являются функциями только от координат $q_{m+k+1}, \ldots, q_n$ и уравнения движения (25) значительно упрощаются. В этом случае тоже имеем $n - m$ уравнений движения типа Чаплыгина. Итак, уравнения Чаплыгина справедливы и применимы к определенному классу неголономных систем и при существовании условных неинтегрируемых уравнений типа (17).

Поступила 23 II 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов М. И. К уравнениям Чаплыгина неголономных механических систем. ПММ., т. XVII, вып. 6, стр. 748—750, 1953.
2. Чаплыгин С. А. Собр. соч. т. I, стр. 159—171, Изд. АН СССР, Л., 1933.
3. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Собр. соч. т. I, стр. 207—215, Изд. АН СССР, Л., 1933.