Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ В РЯД ПО ФУНКЦИЯМ ЛЕЖАНДРА

Э. Л. Блох

(Москва)

1. Рассмотрим интеграл Лапласа [1], определяющий при целых n и m функции Лежандра 1-го рода для всех значений аргумента z:

$$P_n^{\ m}(x) = \frac{(n+m)!}{n!}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n \cos m\varphi\, d\varphi \ldots \qquad (1.1)$$

где

$$P_n^{\ m}(z) = (z^2-1)^{1/2 m}\,\frac{d^m P_n(z)}{dz^m}$$

присоединенные функции Лежандра,

$$P_n^0(z) = P_n(z)$$

полиномы Лежандра. Если x — вещественное число промежутка

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

то присоединение функции Лежандра в этом промежутке, которые будем обозначать $P_n^{\ m}(x)$, определяются [1] выражением

$$P_n^{\ m}(x) = (1-x^2)^{1/2 m}\,\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = i^{-m}\left[P_n^{\ m}(z)\right]_{z=x} \qquad (1.2)$$

Для разложения функций Бесселя по функциям Лежандра составим ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n P_n^{\ m}(z)}{(n+m)!} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos m\varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi]^n}{n!}\, d\varphi$$

который в силу условия $P_n^{\ m}(z) = 0$ при $n < m$ и равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi]^n}{n!} = e^{t(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)}$$

можно представить в виде

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{m+1\nu} P_{m+\nu}^{\ m}(z)}{(2m+\nu)!} = \frac{e^{tz}}{\pi}\int_0^\pi e^{t\sqrt{z^2-1}\cos\varphi} \cos m\varphi\, d\varphi$$

Но

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{t\sqrt{z^2-1}\cos\varphi} \cos m\varphi\, d\varphi = I_m(t\sqrt{z^2-1}) = i^{-m} J_m(it\sqrt{z^2-1}) \qquad (1.3)$$

где J_m — функция Бесселя 1-го рода.

Следовательно,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{m+\nu} P_{m+\nu}{}^{m}(z)}{(2m+\nu)!} = e^{tz} I_m (t \sqrt{z^2-1}) \tag{1.4}$$

Заменяя z на $-z$, имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{m+\nu} P_{m+\nu}{}^{m}(z)}{(2m+\nu)!} = e^{-tz} I_m (t \sqrt{z^2-1})$$

Отсюда находим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{m+2\nu} P_{m+2\nu}{}^{m}(z)}{(2m+2\nu)!} = \operatorname{ch} tz \, I_m (t \sqrt{z^2-1})$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{m+2\nu+1} P_{m+2\nu+1}{}^{m}(z)}{(2m+2\nu+1)!} = \operatorname{sh} tz \, I_m (t \sqrt{z^2-1})$$

Последние выражения позволяют получить ряд новых разложений. В самом деле, заменяя t на it, учитывая равенство (1.3) и соотношение

$$J_m(z) = (-1)^m J_m(-z)$$

находим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} t^{m+2\nu} P_{m+2\nu}{}^{m}(z)}{(2m+2\nu)!} = \cos tz \, J_m (t \sqrt{z^2-1})$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} t^{m+2\nu+1} P_{m+2\nu+1}{}^{m}(z)}{(2m+2\nu+1)!} = \sin tz \, J_m (t \sqrt{z^2-1})$$

Наибольший интерес представляет разложение при $z = x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда, вспоминая условие (1.2), получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{m+\nu} P_{m+\nu}{}^{m}(x)}{(2m+\nu)!} = e^{tx} J_m (t \sqrt{1-x^2})$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{m+\nu} P_{m+\nu}{}^{m}(x)}{(2m+\nu)!} = e^{-tx} J_m (t \sqrt{1-x^2}) \tag{1.5}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{m+2\nu} P_{m+2\nu}{}^{m}(x)}{(2m+2\nu)!} = \operatorname{ch} tx \, J_m (t \sqrt{1-x^2})$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{m+2\nu+1} P_{m+2\nu+1}{}^{m}(x)}{(2m+2\nu+1)!} = \operatorname{sh} tx \, J_m (t \sqrt{1-x^2})$$

Полагая в последних уравнениях $t = it$, найдем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{m+2\nu} P_{m+2\nu}{}^{m}(x)}{(2m+2\nu)!} = \cos tx \, I_m (t \sqrt{1-x^2})$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{m+2\nu+1} P_{m+2\nu+1}{}^{m}(x)}{(2m+2\nu+1)!} = \sin tx \, I_m (t \sqrt{1-x^2})$$

Если продифференцировать равенства (1.4) и (1.5) $(m+\nu)$ раз по t и положить $t=0$, получим следующие представления функций Лежандра 1-го рода:

$$P_n^{\ m}(z) = \frac{(n+m)!}{n!}\left\{\frac{d^n}{dt^n}\left[e^{tz} I_m\left(t\sqrt{z^2-1}\right)\right]\right\}_{t=0}$$

$$P_n^{\ m}(x) = \frac{(n+m)!}{n!}\left\{\frac{d^n}{dt^n}\left[e^{tx} J_m\left(t\sqrt{1-x^2}\right)\right]\right\}_{t=0}$$

2. Полученные разложения могут быть использованы для вычисления некоторых определенных интегралов, содержащих функции Бесселя и функции Лежандра. Используя ортогональность функций Лежандра 1-го рода в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и соотношение

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^{\ m}(x)]^2\, dx = \frac{1}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

непосредственно получаем

$$\int_{-1}^{+1} e^{tx} J_m\left(t\sqrt{1-x^2}\right) P_{m+\nu}^{m}(x)\, dx = \frac{2t^{m+\nu}}{(2m+2\nu+1)\,\nu!} \tag{2.1}$$

$$\int_0^1 \operatorname{ch} tx J_m\left(t\sqrt{1-x^2}\right) P_{m+2\nu}^{m}(x)\, dx = \frac{t^{m+2\nu}}{(2m+4\nu+1)\,(2\nu)!}$$

$$\int_0^1 \operatorname{sh} tx J_m\left(t\sqrt{1-x^2}\right) P_{m+2\nu+1}^{m}(x)\, dx = \frac{t^{m+2\nu+1}}{(2m+4\nu+3)(2\nu+1)!}$$

$$\int_0^1 \cos tx I_m\left(t\sqrt{1-x^2}\right) P_{m+2\nu}^{m}(x)\, dx = \frac{(-1)^\nu\, t^{m+2\nu}}{(2m+4\nu+1)\,(2\nu)!}$$

$$\int_0^1 \sin tx I_m\left(t\sqrt{1-x^2}\right) P_{m+2\nu+1}^{m}(x)\, dx = \frac{(-1)^\nu\, t^{m+2\nu+1}}{(2m+4\nu+3)(2\nu+1)!}$$

Возвращаясь к равенству (1.5), умножим его левую и правую части на $e^{-tx} J_m\left(t\sqrt{1-x^2}\right)$ и проинтегрируем по x от -1 до $+1$. Тогда

$$\int_{-1}^{+1} J_m^{\,2}\left(t\sqrt{1-x^2}\right) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{m+\nu}}{(2m+\nu)!} \int_{-1}^{+1} e^{-tx} J_m\left(t\sqrt{1-x^2}\right) P_{m+\nu}^{m}(x)\, dx$$

и согласно (2.1), где t заменяем на $-t$:

$$\int_{-1}^{+1} J_m^{\,2}\left(t\sqrt{1-x^2}\right) dx = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2m+2\nu}}{(2m+2\nu+1)\,(2m+\nu)!\,\nu!}$$

Но

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2m+2\nu}}{(2m+2\nu+1)\,(2m+\nu)!\,\nu!} = \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2m+2\nu}}{(2m+\nu)!\,\nu!}\, dt =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t J_{2m}(2t)\, dt$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 J_m^2(t\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{1}{t}\int_0^t J_{2m}(2t)\,dt$$

Точно так же получаем, что

$$\int_0^1 I_m^2(t\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{1}{t}\int_0^t I_{2m}(2t)\,dt$$

Полагая в полученных выше интегралах $\nu = 0$ и учитывая, что

$$P_m^m(x) = (2m-1)!!\,(1-x^2)^{1/2 m}, \qquad P_{m+1}^m(x) = (2m+1)!!\,x(1-x)^{1/2 m}$$

где

$$(2m+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)$$

получаем

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{1/2 m}\,e^{tx} J_m(t\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{2t^m}{(2m+1)!!}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2 m}\operatorname{ch} tx\, J_m(t\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{t^m}{(2m+1)!!} \tag{2.2}$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^{1/2 m}\operatorname{sh} tx\, J_m(t\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{t^{m+1}}{(2m+3)!} \tag{2.3}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2 m}\cos tx\, I_m(t\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{t^m}{(2m+1)!!} \tag{2.4}$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^{1/2 m}\sin tx\, I_m(t\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{t^{m+1}}{(2m+3)!!} \tag{2,5}$$

Один из этих интегралов (2.4), полученный другим методом, приведен в иных обозначениях в книге Ватсона [2] (стр. 409). Вычитая из (2.2) равенство (2.4) и из (2.3) равенство (2.5), получим любопытные соотношения

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2 m}[\operatorname{ch} tx J_m(t\sqrt{1-x^2}) - \cos tx I_m(t\sqrt{1-x^2})]\,dx = 0$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^{1/2 m}[\operatorname{sh} tx J_m(t\sqrt{1-x^2}) - \sin tx I_m(t\sqrt{1-x^2})]\,dx = 0$$

принимающие особенно простой вид при $m = 0$:

$$\int_0^1 [\operatorname{ch} tx J_0(t\sqrt{1-x^2}) - \cos tx I_0(t\sqrt{1-x^2})]\,dx = 0$$

$$\int_0^1 [\operatorname{sh} tx J_0(t\sqrt{1-x^2}) - \sin tx I_0(t\sqrt{1-x^2})]\,x dx = 0$$

Поступила 8 II 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уитткер** Е. Т. и **Ватсон** Г. Н. Курс современного анализа, т. 11. ГТТИ, 1934.
2. **Ватсон** Г. Н. Теория бесселевых функций. ГИИЛ, 1949.