Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

В заметке указывается критерий устойчивости при любых начальных отклонениях очевидного решения системы n нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых не зависят от времени. Этот критерий является некоторым развитием известной теоремы А. М. Ляпунова [1] (стр. 107) для линейной системы на случай нелинейных уравнений, поэтому доказанные в заметке достаточные условия устойчивости в целом в линейном случае обращаются в необходимые и достаточные.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где правые части X_i — непрерывно дифференцируемые функции во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, обращающиеся в точке O $(0, \ldots, 0)$ в нуль.

Обозначим через $\partial X / \partial x$ матрицу Якоби функций X_i, т. е.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \dfrac{\partial X_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

Теорема. Для того чтобы очевидное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1) было асимптотически устойчивым в целом, достаточно, чтобы существовала постоянная симметричная матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

имеющая положительные собственные числа, и такая, что симметризованная матрица произведения

$$\tfrac{1}{2}\left(\left\{A\frac{\partial X}{\partial x}\right\}_{ik} + \left\{A\frac{\partial X}{\partial x}\right\}_{ki}\right) \tag{3}$$

имеет собственные числа $\lambda_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие во всем пространстве $\{x_i\}$ неравенству

$$\lambda_i < -\delta \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

где δ — положительная постоянная.

Доказательство. Согласно теореме А. М. Ляпунова [1] (стр. 82) при условиях (4), точка O асимптотически устойчива по Ляпунову. Предположим от противного, что область притяжения G точки O не охватывает всего пространства $-\infty < x < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим точку p, лежащую на границе G. Траектория $f(p, t)$, проходящая при $t=0$ через точку p, целиком принадлежит границе области G [2]. Исследуем две возможности.

1. Траектория $f(p, t)$ при всех $t>0$ лежит внутри сферы

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=R^2 \tag{5}$$

где R — достаточно большое число. Внутри сферы (5) может существовать лишь конечное число особых точек системы (1). Действительно, всякая особая точка системы (1) асимптотически устойчива по Ляпунову. Этот факт устанавливается для любой особой точки так же, как это сделано выше для точки O. Поэтому всякая особая точка системы (1) обладает некоторой областью притяжения, т. е. является изолированной. Перенумеруем особые точки, лежащие внутри и на границе сферы (5), $q_1, \ldots, q_k$ и окружим каждую такую точку окрестностью u_j $(j=1, \ldots k)$, лежащей целиком внутри области притяжения соответствующей особой точки. Траектория $f(p, t)$ проходит внутри сферы (5), но вне окрестностей u_j $(j=1, \ldots, k)$, так как граничная для G траектория не может принадлежать области притяжения точки q_j, потому что область притяжения является открытым множеством. Таким образом, траектория $f(p, t)$ при $t>0$ проходит в области, где выполняется неравенство

$$X_1^2+\cdots+X_n^2>l \tag{6}$$

причем l — положительная постоянная. Вычислим производную по времени вдоль $f(p, t)$ для функции

$$v(x_1, \ldots, x_n)=\Big(\sum_{i=1,\, j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j\Big)^{1/2} \tag{7}$$

Матрица (2) имеет положительные собственные числа, поэтому в рассматриваемой области форма (7) вследствие (6) в нуль не обращается. Имеем

$$\frac{dv}{dt}=\Big(\sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}(x_1, \ldots, x_n) X_i X_j\Big):\Big(\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j\Big)^{1/2} \tag{8}$$

где коэффициенты формы $b_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ равны соответствующим элементам симметризованной матрицы (3). Поэтому вследствие (4) и (6) в рассматриваемой области будет

$$\frac{dv}{dt}<-k^2 \tag{9}$$

где k^2 — положительная постоянная. В рассматриваемой области траектория $f(p, t)$ продолжима на интервал $0 \leqslant t<\infty$.

Интегрируя (9), получим $v(t)-v(0)<-k^2 t$, что противоречит неравенству $v(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ при достаточно больших значениях t.

2. Рассмотрим вторую возможность. Как и выше, можно убедиться, что траектория $f(p, t)$ может проходить лишь в области, где выполняется неравенство

$$X_1^2+\ldots+X_n^2>0 \tag{10}$$

Вследствие (4) форма, стоящая в числителе (8), является определенно отрицательной, т. е. имеет место оценка

$$\frac{dv}{dt}<-\frac{m^2(X_1^2+\ldots+X_n^2)}{M(X_1^2+\ldots+X_n^2)^{1/2}}<-n^2(X_1^2+\cdots+X_n^2)^{1/2} \tag{11}$$

где m^2 — минимум, а M^2 — максимум соответствующих квадратичных форм на сфере

$$X_1^2+\ldots+X_n^2=1.$$

Интегрируя (11) вдоль $f(p, t)$, получим

$$v(t) - v(0) < -\int_0^t n^2 (X_1^2 + \ldots + X_n^2)^{1/2} dt = -\int_0^s n^2\, ds \tag{12}$$

где s — длина дуги $f(p, t)$ на интервале $(0, t)$ и, следовательно,

$$ds = (X_1^2 + \ldots + X_n^2)^{1/2} dt$$

При сделанных предположениях $s \to \infty$ при возрастании времени, поэтому из (12) следует $v(s) \to -\infty$ при $s \to \infty$, что противоречит неравенству $v(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$. Теорема доказана.

Если в качестве A выбрать единичную матрицу E, то из доказанной теоремы следует, что для устойчивости в целом достаточно, чтобы симметризованная матрица Якоби правых частей системы уравнений (1) имела во всем пространстве отрицательные собственные числа, удовлетворяющие неравенству (4).

Покажем теперь, что в линейном случае доказанная теорема переходит в цитированную выше теорему Ляпунова [1] (стр. 82,107). Действительно, в линейном случае все рассмотренные в заметке квадратичные формы переменных X_i при замене

$$X_i = c_{i1} x_1 + \ldots + c_{in} x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

переходят в квадратичные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие условиям теоремы Ляпунова, и наоборот. В частности, разрешимость уравнений (13) относительно x_j в случае асимптотической устойчивости очевидного решения линейных дифференциальных уравнений следует из того факта, что в этом случае определитель $\Delta = \| c_{ij} \|$ отличен от нуля.

Поступила 10 VII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М. — Л., 1950.
2. Еругин Н. П. Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.