Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ВЯЗКОМ ГАЗЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. А. Каспарьянц

(Одесса)

В работе на основании естественных физических предпосылок делаются оценки в уравнениях распространения звука в вязком газе.

Полученные приближенные уравнения дают возможность исследовать звуковое поле при наличии вязкости и теплопроводности.

В качестве примера на применение полученных уравнений рассматривается стационарное поле звуковых волн от плоского поршневого излучателя, пульсирующего по гармоническому закону с частотой σ в безграничной массе газа.

§ 1. Как известно, уравнения распространения звука в вязком газе записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu\triangle u \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \theta}{\partial y} + \nu\triangle v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \theta}{\partial z} + \nu\triangle w$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\theta$$

$$\xi = S + \eta \qquad \left(S = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},\ \xi = \frac{p - p_0}{p_0},\ \eta = \frac{T - T_0}{T_0}\right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - (\gamma - 1)\frac{\partial S}{\partial t} = \varkappa\triangle\eta \qquad \left(\varkappa = \frac{\varkappa'}{\rho_0 c_0},\ \gamma = \frac{c_p}{c_v}\right)$$

Здесь S — конденсация газа, ξ, η — функции, характеризующие изменение соответственно давления и температуры при прохождении звуковой волны, $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности.

Остальные обозначения стандартные. Два последних уравнения системы (1.1) — соответственно уравнения состояния и баланса энергии.

В дальнейшем будем считать, что время входит в искомые функции сомножителем $e^{i\sigma t}$; иными словами, исследованию подлежит стационарное звуковое поле. После ряда преобразований в этом случае уравнения (1.1) могут быть записаны в форме

$$i\sigma u - \nu\triangle u = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(b^2 + \tfrac{1}{3}i\sigma\nu\right)S + b^2\eta\right]$$

$$i\sigma v - \nu\triangle v = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(b^2 + \tfrac{1}{3}i\sigma\nu\right)S + b^2\eta\right] \qquad \left(b^2 = \frac{p_0}{\rho_0}\right) \tag{1.2}$$

$$i\sigma w - \nu\triangle w = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(b^2 + \tfrac{1}{3}i\sigma\nu\right)S + b^2\eta\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + i\sigma S = 0, \qquad \xi = S + \eta, \qquad (\gamma - 1)S = \eta + \frac{\varkappa i}{\sigma}\triangle$$

В уравнениях (1.2) сохранены для краткости прежние обозначения неизвестных функций. Дальнейшие упрощения в рассматриваемых уравнениях получаются после исключения неизвестной функции η из первых трех уравнений системы (1.2); в результате этого можно записать

$$i\sigma u - \nu\Delta u = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad i\sigma v - \nu\Delta v = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad i\sigma w - \nu\Delta w = -\frac{\partial H}{\partial z} \tag{1.3}$$

где

$$H = \left[c^2 + i\sigma\left(\tfrac{1}{3}\nu + \varkappa\right)\right] S + \frac{i\varkappa}{\sigma}\left(b^2 + \tfrac{4}{3} i\sigma\nu\right)\Delta S, \qquad c^2 = \gamma b^2 \tag{1.4}$$

Если теперь принять во внимание уравнение неразрывности, то оказывается, что конденсация газа S удовлетворяет уравнению

$$\frac{i\varkappa}{\sigma}\left(b^2 + \tfrac{4}{3} i\sigma\nu\right)\Delta^2 S + \left[c^2 + i\sigma\left(\tfrac{4}{3}\nu + \varkappa\right)\right]\Delta S + \sigma^2 S = 0 \tag{1.5}$$

Заметим, что функция η, так же как и функция S, является решением одного и того же уравнения (1.5) [2]. В дальнейшем мы выясним, что между этими функциями существует в пределах определенной степени приближения еще более тесная связь.

Наконец, функция η может быть явно выражена через конденсацию газа S равенством

$$b^2\eta = \frac{i\varkappa}{\sigma}\left(b^2 + \tfrac{4}{3} i\sigma\nu\right)\Delta S + \left(c^2 - b^2 + i\varkappa\sigma\right) S \tag{1.6}$$

В результате система (1.2) может быть записана в виде

$$\frac{i\varkappa}{\sigma}\left(b^2 + \tfrac{4}{3} i\nu\sigma\right)\Delta^2 S + \left[c^2 + i\sigma\left(\tfrac{4}{3}\nu + \varkappa\right)\right]\Delta S + \sigma^2 S = 0 \tag{1.7}$$

$$i\sigma u - \nu\Delta u = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad i\sigma v - \nu\Delta v = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad i\sigma w - \nu\Delta w = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

$$\xi = S + \eta$$

$$b^2\eta = \frac{i\varkappa}{\sigma}\left(b^2 + \tfrac{4}{3} i\sigma\nu\right)\Delta S + \left(c^2 - b^2 + i\sigma\varkappa\right) S$$

где H дается формулой (1.4).

Первое уравнение системы (1.7) содержит только одну неизвестную функцию S, которая определяется из этого уравнения самостоятельно, после чего остальные неизвестные функции выражаются через S.

Решение уравнения (1.5) запишем в виде

$$S = D_1 S_1 + D_2 S_2 \tag{1.8}$$

где функции S_1 и S_2 являются решениями уравнений

$$\Delta S_1 + k_1^2 S_1 = 0, \qquad \Delta S_2 + k_2^2 S_2 = 0 \tag{1.9}$$

и k_1^2, k_2^2 — суть корни уравнения

$$\frac{i\varkappa}{\sigma}\left(b^2 + \tfrac{4}{3} i\sigma\nu\right) k^4 - \left[c^2 + i\sigma\left(\tfrac{4}{3}\nu + \varkappa\right)\right] k^2 + \sigma^2 = 0 \tag{1.10}$$

Выражения для компонент скорости в общем виде теперь можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + E_1 \frac{\partial S_1}{\partial x} + E_2 \frac{\partial S_2}{\partial x} \\ v &= v_1 + E_1 \frac{\partial S_1}{\partial y} + E_2 \frac{\partial S_2}{\partial y} \\ w &= w_1 + E_1 \frac{\partial S_1}{\partial z} + E_2 \frac{\partial S_2}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.11}$$

где функции u_1, v_1, w_1 суть решения уравнений

$$\Delta u_1 + \frac{\sigma}{i\nu} u_1 = 0, \qquad \Delta v_1 + \frac{\sigma}{i\nu} v_1 = 0, \qquad \Delta w_1 + \frac{\sigma}{i\nu} w_1 = 0 \tag{1.12}$$

при условии

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \tag{1.13}$$

Постоянные, входящие в формулы (1.8) и (1.11), оказываются связанными между собой соотношениями

$$E_1 = \frac{i\sigma}{k_1^2} D_1, \qquad E_2 = \frac{i\sigma}{k_2^2} D_2 \tag{1.14}$$

В результате исследования корней уравнения (1.10) выясняется, что действительная часть одного из них (например, k_2^2) для обыкновенных частот велика и растет вместе с частотой; следовательно, решение, связанное с этим корнем, чрезвычайно быстро затухает [1].

Простые подсчеты, опирающиеся на случай плоских волн, указывают на то, что амплитуда решения, связанного с k_2^2, убывает на протяжении одной длины волны более чем в 500 раз. Очевидно, что указанный результат будет иметь место и в любом, самом общем случае.

Таким образом, за пределами относительно тонкого слоя газа, окружающего границы, можно считать $S_2 \equiv 0$.

Далее, пользуясь произволом в выборе значения одной из двух оставшихся постоянных D_1 и E_1, положим $D_1 = 1$, тогда

$$S = S_1 \tag{1.15}$$

Следовательно, в пределах сказанного выше конденсация газа является решением уравнения

$$\Delta S + k^2 S = 0 \qquad (k^2 = k_1^2) \tag{1.16}$$

причем второе приближение для k^2 по отношению к малым величинам $\sigma\nu / c^2$ и $\sigma\varkappa / c^2$ имеет следующее значение:

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{c^2} \left\{ 1 - \frac{i\sigma}{c^2} \left[\frac{4}{3} \nu + \frac{\varkappa(\gamma - 1)}{\gamma} \right] \right\} \tag{1.17}$$

Отметим, что величины $\sigma\nu / c^2$ и $\sigma\varkappa / c^2$, которые мы будем считать основными при проведении оценок, остаются малыми для многих сред в весьма широком диапазоне частот. Так, например, для воздуха $\sigma\nu / c^2 \ll 1$ при $\sigma \ll 10^8$ сек$^{-1}$.

Формулы (1.11) после сделанных оценок перепишутся в виде

$$u = u_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = v_1 - \frac{\partial\varphi}{y}, \qquad w = w_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.18}$$

Здесь

$$\varphi = -\frac{i\sigma}{k^2} S \tag{1.19}$$

или с точностью до малых второго порядка

$$S = -\frac{i\sigma}{c^2}\varphi \tag{1.20}$$

Для того чтобы полностью закончить проводимые нами оценки в уравнениях распространения звука, преобразуем формулу (1.6) и уравнение состояния, ограничиваясь при этом выбранной выше степенью приближения.

В формуле (1.6), используя уравнение (1.16), непосредственно получим

$$\eta = (\gamma - 1)\left(1 + \frac{i\sigma\varkappa}{c^2}\right) S \tag{1.21}$$

Однако, принимая во внимание формулу (1.20), мы должны будем записать

$$\eta = (\gamma - 1) S \tag{1.22}$$

Уравнение состояния теперь перепишется в виде

$$\xi = \gamma S \tag{1.23}$$

или

$$p = p_0 + \rho_0 c^2 S \tag{1.24}$$

Формула (1.24) совпадает с известной формулой для давления в случае, когда учитывается значение только одной вязкости [1].

В результате проделанных оценок, базирующихся на указанных выше физических предпосылках, уравнения стационарного поля звуковых волн в вязком газе при наличии теплопроводности запишутся в следующем виде:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$$

$$u = u_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = v_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = w_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$S = \frac{i\sigma}{c^2}\varphi, \qquad \xi = \gamma S, \qquad \eta = (\gamma - 1) S \tag{1.25}$$

Здесь

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}\left\{1 - \frac{i\sigma}{c^2}\left[\frac{4}{3}\nu + \frac{\varkappa(\gamma - 1)}{\gamma}\right]\right\}$$

Функции u_1, v_1, w_1 суть решения уравнений (1.12), удовлетворяющие условию (1.13).

Необходимо учитывать только следующее: уравнения (1.25) получены в предположении, что $\sigma\nu/c^2$ и $\sigma\varkappa/c^2$ — величины малые.

Как уже отмечалось, это оказывается справедливым для многих сред в весьма широком диапазоне частот.

При проведении оценок пренебрегались малые величины порядка второго и выше по отношению к $\sigma\nu/c^2$ и $\sigma\varkappa/c^2$. Кроме того, мы исключили из рассмотрения те относительно малые области, в которых функция S_2 играет заметную роль.

В заключение настоящего параграфа отметим одно равенство, которое может представлять самостоятельный интерес и которое получается непосредственно из последних двух уравнений системы (1.25):

$$\xi = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\eta \quad \text{или} \quad p = p_0 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{T_0}(T - T_0) \tag{1.26}$$

§ 2. В качестве примера на применение уравнений (1.25), полученных в предыдущем параграфе, обратимся к оценке при сделанных предположениях затухания стационарного звукового поля плоского поршневого излучателя G, пульсирующего по гармоническому закону с частотой σ в безграничной массе вязкого газа.

Рассматривая в данном случае распространение волн в неограниченном пространстве, положим

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

Далее из формул (1.16), (1.18), (1.20) следует, что в нашем примере функция φ является решением краевой задачи

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \begin{cases} V & \text{внутри } G \\ 0 & \text{вне } G \end{cases} \tag{2.1}$$

где V — амплитуда скорости излучателя, G — область, соответствующая излучателю.

Как известно, решение этой задачи записывается в следующем виде:

$$\varphi = \frac{V}{2\pi}\iint\limits_{G} \frac{e^{-ikr}}{r}\, dG \tag{2.2}$$

Если ввести обозначение

$$k = m_1 - im_2 \tag{2.3}$$

то в соответствии с условием излучения и формулой (1.17) m_1 и m_2 будут положительными корнями системы

$$m_1^2 - m_2^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}, \qquad 2\, m_1 m_2 = \frac{\sigma^3}{c^4}\left(\frac{4}{3}\nu + \varkappa\right) - \frac{\varkappa b^2 \sigma^3}{c^6} \tag{2.4}$$

причем второе приближение для m_1 и m_2 выразится формулами

$$m_1 = \frac{\sigma}{c}, \qquad m_2 = \frac{\sigma^2}{2c^3}\left[\frac{4}{3}\nu + \frac{\varkappa(\gamma - 1)}{\gamma}\right] \tag{2.5}$$

Дальнейшее изучение вопроса связано с исследованием интеграла, стоящего в правой части формулы (2.2).

Асимптотическое представление решения, полученное Л. Н. Сретенским [3] для круглого поршня и обобщенное затем в работе Д. Н. Четаева [4] на поршень произвольной формы при больших действительных значениях k, может быть теперь распространено на случай вязкого газа при больших значениях m_1. Сохраняя обозначения, принятые в указанных работах, можно записать

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{Vi\exp(-m_2 z)}{m_1}\exp(-im_1 z) + \\ +\frac{Vi}{2\pi m_1}\int\limits_L \exp(-im_1 r(S))\frac{\exp(-m_2 r(S))}{\rho(S)}\sqrt{1-\left(\frac{d\rho}{dS}\right)^2}\,ds \tag{2.6}$$

Интегрирование ведется по контуру L, ограничивающему излучатель. В формуле (2.6) S — длина дуги контура.

Применение метода стационарных фаз приводит в рассматриваемом случае к следующему результату:

$$\varphi \approx -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{Vi\exp(-m_2 z)}{m_1}\exp(-im_1 z) + \\ +\frac{Vi}{2m_1\sqrt{2\pi m_1}}\sum_{j=1}^{2N-Q}\frac{\sqrt{R_j r_j}\exp(-m_2 r_j)}{\rho_j\sqrt{|R_j - y_j|}}\exp\left(-im_1 r_j - i\varepsilon_j\frac{1}{4}\pi\right) + \\ +\frac{Vi\Gamma(^1/_3)}{m_1\sqrt[3]{36\,m_1}}\sum_{l=1}^{Q}\frac{\sqrt{R_l r_l}\exp(-m_2 r_l)}{\rho_l\sqrt{|R_l|}}\exp\left(-im_1 r_l - i\varepsilon_l\frac{1}{6}\pi\right) \tag{2.7}$$

Формула (2.7) позволяет сделать вывод, что звуковое поле в вязком газе, в котором учитывается влияние теплопроводности, за пределами слоя газа, окружающего излучатель, где заметное влияние оказывает функция S_2, имеет такую же структуру, как и в газе без внутреннего трения, т. е. представляется куском плоской волны и суммой волн, расходящихся из точек контура, касательные в которых ортогональны направлениям на рассматриваемую в пространстве точку M [3,4], однако в этом случае каждая из волн затухает по мере своего продвижения. Коэффициент затухания для каждой из них

$$m_2 = \frac{\sigma^2}{2c^3}\left[\frac{4}{3}\nu + \frac{\varkappa(\gamma-1)}{\gamma}\right]$$

В заключение приношу глубокую благодарность Л. Н. Сретенскому за проявленный интерес и ценные замечания, учтенные при выполнении настоящей работы.

Поступила 10 VIII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидромеханика. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
2. Рэлей. Теория звука, т. II. Гостехиздат, М.—Л., 1944.
3. Сретенский Л. Н. Распространение волн от звучащего диска. Ученые записки Московского гос. университета, т. IV, 1951.
4. Четаев Д. Н. Об излучении звука поршнем. ДАН СССР, т. XXVI, № 6, 1951.