Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y''+p(t)y=0$, $p(t+\omega)=p(t)$ НА СЛУЧАЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ФУНКЦИИ $p(t)$

В. А. Якубович
(Ленинград)

А. М. Ляпунов [1] рассмотрел ряд вопросов, относящихся к уравнению

$$y''+p(t)y=0 \tag{0.1}$$

где $p(t)$ — непрерывная[1] действительная периодическая функция периода ω.

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — решения уравнения (0.1) с начальными условиями

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi'(0)=0, \quad \psi(0)=0, \quad \psi'(0)=1 \tag{0.2}$$

Ляпунов показывает (это вошло теперь во все книги по устойчивости движения), что свойства решений уравнения (0.1) в сильной степени зависят от величины «характеристической постоянной»

$$A=\frac{1}{2}[\varphi(\omega)+\psi'(\omega)] \tag{0.3}$$

Именно при $|A|>1$ решения не ограничены, при $|A|<1$ решения ограничены на $(0,\infty)$. При $|A|=1$ решения — либо периодические функции периода ω, либо растут, как t.

Для уравнения

$$y''+\lambda p(t)y=0 \tag{0.4}$$

характеристическая постоянная $A(\lambda)$ будет целой функцией λ и $A=A(1)$.

Исходя из ряда для $A(\lambda)$, получим

$$A=1-A_1+A_2-A_3+\cdots+(-1)^n A_n+\cdots \tag{0.5}$$

Если $p(t)\geqslant 0$, то легко видеть, что $A_n\geqslant 0$. Основная часть работы [1] посвящена получению, в предположении $p(t)\geqslant 0$, некоторого выражения для произведения A_nA_m, из которого вытекают следующие неравенства (неравенства (26), (27), (28) в [1]):

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}<\frac{A_1}{n^2}, \qquad \frac{A_{n+1}}{A_n}<\frac{n-1}{n}\frac{A_n}{A_{n-1}} \quad (n\geqslant 2), \qquad A_2\leqslant\frac{1}{6}A_1^2 \tag{0.6}$$

Эти неравенства дают возможность Ляпунову сформулировать метод, позволяющий в конечное число шагов, если $|A|\neq 1$, определить, какой из двух случаев — $|A|>1$ или $|A|<1$ — имеет место для данного уравнения (0.1).

[1] Можно предполагать, что функция $p(t)$ кусочно-непрерывна или даже просто суммируема на $[0.\ \omega]$ по Лебегу.

Доказательство Ляпунова основного выражения для произведения A_nA_m весьма сложно; может быть этим объясняется тот факт, что законченный анализ работы [1] Ляпунова не вошел ни в один из учебников по устойчивости движения, в то время как частные результаты, относящиеся к уравнению (0.1), полученные Ляпуновым ранее [2] и вытекающие из работы [1], вошли в учебную литературу.

Если интересоваться лишь методом определения ограниченности или неограниченности решений уравнения (0.1), то доказательства Ляпунова могут быть упрощены.

Доказательство может быть особенно сильно упрощено, если воспользоваться следующим замечанием М. Г. Крейна, имеющимся в работе [7] и позволяющим весьма просто получить основное неравенство

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < \frac{n-1}{n} \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

используя теорию функций комплексного переменного:

«Если целая функция

$$F(\lambda) = a_0 - a_1\lambda + a_2\lambda^2 - \cdots$$

допускает представление

$$F(\lambda) = a_0 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \qquad (0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots) \tag{$*$}$$

то будем иметь

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} < \frac{j}{j+1} \frac{a_j}{a_j - 1}$$

Указанное общее предложение непосредственно следует из теоремы Ньютона о том, что если корни многочлена

$$a_0 - a_1\lambda + a_2\lambda^2 - \cdots + (-1)^n a_n\lambda^n$$

все положительны, то выполняются неравенства

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} < \frac{j(n-j)}{(j+1)(n-j+1)} \frac{a_j}{a_{j-1}} \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

Чтобы получить отсюда неравенство

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < \frac{n-1}{n} \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

ледует применить это предложение к целой функции

$$\frac{1 - A(\lambda)}{\lambda} = A_1 - A_2\lambda + A_3\lambda^2 - \cdots$$

все нули которой положительны, как установил Ляпунов [3]. Кроме того, как доказал Ляпунов [1], функция $A(\lambda)$ является целой функцией с порядком роста $\lambda^{1/2}$, а для целых функций с порядком роста меньше единицы справедливо разложение (*)».

В настоящей работе мы распространяем метод Ляпунова на случай знакопеременной функции $p(t)$. При этом существенно используется цитированное выше замечание М. Г. Крейна.

Как известно, исследование ограниченности решений произвольной системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими дифференцируемыми коэффициентами сводится к исследованию ограниченности решений или к оценке характеристических показателей уравнения (0.1)[1]. В конце § 1 приведены подобные оценки.

С другой стороны, исследование ограниченности решений произвольной системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (в частности, уравнения (0.1) со знакопеременной функцией $p(t)$) может проводиться по способу, предложенному В. М. Старжинским в статье [15][2]. Мы не сравниваем здесь способ настоящей статьи со способом статьи [15].

§ 1. Пусть $a^2 \geqslant 0$ — произвольное число, удовлетворяющее соотношению

$$p(t) \geqslant -a^2 \tag{1.1}$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' - a^2 y + \lambda [p(t) + a^2] y = 0 \tag{1.2}$$

Уравнение (0.1) получается из уравнения (1.2) при $\lambda = 1$. Любое решение y уравнения (1.2) является целой функцией λ:

$$y = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots + \lambda^n y_n + \cdots$$

Подставляя в (1. 2), находим

$$y_0'' - a^2 y_0 = 0$$

$$y''_{n+1} - a^2 y_{n+1} + [p(t) + a^2] y_n = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Откуда по известной формуле получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$y_{n+1}(t) = y_{n+1}(0)\operatorname{ch} at + y'_{n+1}(0)\frac{\operatorname{sh} at}{a} - \int_0^t \frac{1}{a}\operatorname{sh} a(t-s)\,[p(s) + a^2]\, y_n(s)\, ds$$

$$(n = 0, 1, 2 \ldots)$$

Если $y(0)$ и $y'(0)$ не зависят от λ, то

$$y_{n+1}(0) = 0, \quad y'_{n+1}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$y_0(t) = y(0)\operatorname{ch} at + y'(0)\frac{\operatorname{sh} at}{a}$$

---

[1] Достаточно требовать дифференцируемости (точнее, абсолютной непрерывности) коэффициентов, входящих в одно уравнение. Остальные коэффициенты должны быть лишь интегрируемы по Лебегу.

[2] В статье [15] требовалось знакопостоянство коэффициентов, расположенных на побочной диагонали матрицы коэффициентов. Однако это требование не нарушает общности, как показано в § 5 статьи [4].

В частности, для решений $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ уравнения (1.2) с начальными условиями (0.2) имеем

$$\begin{aligned}\varphi(t, \lambda) &= \varphi_0(t) - \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2\varphi_2(t) - \cdots \\ \psi(t, \lambda) &= \psi_0(t) - \lambda\psi_1(t) + \lambda^2\psi_2(t) - \cdots\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(t) &= \int_0^t \frac{1}{a}\,\mathrm{sh}\, a(t-s)\,[p(s) + a^2]\,\varphi_n(s)\,ds, \qquad \varphi_0(t) = \mathrm{ch}\,at \\ \psi_{n+1}(t) &= \int_0^t \frac{1}{a}\,\mathrm{sh}\, a(t-s)\,[p(s) + a^2]\,\psi_n(s)\,ds, \qquad \psi_0(t) = \frac{\mathrm{sh}\,at}{a}\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Из (1.1) и (1.4) следует, что функции φ_n, ψ_n неотрицательны при значениях $t \geqslant 0$.

Обозначим $A(\lambda)$ характеристическую постоянную уравнения (1.2):

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\,[\varphi(\omega, \lambda) + \psi_t'(\omega, \lambda)] \tag{1.5}$$

Очевидно,

$$A(\lambda) = A_0 - \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 - \ldots + (-1)^n \lambda^n A_n + \ldots \tag{1.6}$$

где

$$A_n = \frac{1}{2}\,[\varphi_n(\omega) + \psi_n'(\omega)] \tag{1.7}$$

Так как

$$\psi_n'(t) = \int_0^t \mathrm{ch}\, a(t-s)\,[p(s) + a^2]\,\psi_{n-1}(s)\,ds \geqslant 0$$

то

$$A_n > 0$$

Равенство $A_n = 0$, $n > 0$ возможно лишь в случае $p(t) + a^2 \equiv 0$, как это следует из формул (1.4) и (1.7). Мы предполагаем, конечно, что

$$p(t) + a^2 \not\equiv 0.$$

Для коэффициентов A_n легко получить выражения в виде n-кратных интегралов, аналогичные выражениям, имеющимся в [1], однако в этом нет необходимости. Отметим лишь выражения

$$A_0 = \mathrm{ch}\, a\omega, \qquad A_1 = \frac{\mathrm{sh}\, a\omega}{2a} \int_0^\omega [p(s) + a^2]\,ds$$

$$A_2 = \frac{1}{2a^2} \int_0^\omega ds_1 \int_0^{s_1} \mathrm{sh}\, a(s_1 - s_2)\, \mathrm{sh}\, a(\omega - s_1 + s_2)\, p_1 p_2\, ds_2$$

$$p_i = p(s_i) + a^2 \qquad (i = 1, 2)$$

А. М. Ляпуновым в работе [1] для коэффициентов A_2, A_3 получены выражения в виде однократных интегралов, чрезвычайно облегчающие подсчет этих коэффициентов в конкретных примерах. Нам, к сожалению, не удалось получить аналогичных выражений.

Для дальнейшего нам потребуется лишь неравенство, аналогичное второму неравенству в (0.6) А. М. Ляпунова:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \leqslant \frac{n}{n+1} \frac{A_n}{A_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

Это неравенство несколько грубее второго неравенства в (0.6) (и доказанного лишь для $a^2 = 0$). Однако для дальнейшего неравенства (1.8) вполне достаточно. При $n = 1$ получим неравенство

$$A_2 \leqslant \frac{1}{2 \operatorname{ch} a\omega} A_1^2 \tag{1.9}$$

аналогичное третьему неравенству в (0.6). При $a = 0$ это неравенство дает весьма грубую константу $^1/_2$ вместо точной константы $^1/_6$ А. М. Ляпунова.

Для доказательства неравенства (1.8) покажем сначала, следуя пути, указанному М. Г. Крейном, что целая функция $A(\lambda)$ имеет порядок, меньший единицы.

Уравнение (1.2) можно записать в виде системы двух уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x \tag{1.10}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} y \\ \dfrac{y'}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}, \qquad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda} \\ \dfrac{a^2}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}\,[p(t) + a^2] & 0 \end{pmatrix}$$

Оценим обычным образом $\| x \|$. Из (1.10) имеем

$$x(t) = x(0) + \int_0^t P(s)\, x(s)\, ds$$

Отсюда

$$\| x(t) \| \leqslant \| x(0) \| + \int_0^t \| P(s) \| \, \| x(s) \| \, ds$$

$$\| x(t) \| \leqslant \| x(0) \| \exp \int_0^t \| P(s) \| \, ds \tag{1.11}$$

Здесь под нормой матрицы (или вектора) можно понимать, например, сумму модулей всех элементов матрицы (компонент вектора). Очевидно, что

$$\log \| x(\omega) \| \leqslant K |\lambda|^{1/2} \qquad \text{при } |\lambda| \to \infty$$

Из (1.5) и (1.11) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется K_ε такое, что

$$\log |A(\lambda)| \leqslant K_\varepsilon |\lambda|^{1/2 + \varepsilon} \qquad \text{при } |\lambda| \to \infty$$

Это значит, что порядок функции $A(\lambda)$ не превышает $^1/_2$.

По теореме Адамара [5] целая функция $A(\lambda)$ допускает представление

$$A(\lambda) = A_0 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \tag{1.12}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ — нули функции $A(\lambda)$. Покажем, что λ_n — вещественные положительные числа.

Из формулы (1.6) следует, что вещественных отрицательных корней у функции $A(\lambda)$ быть не может. Поэтому достаточно доказать, что λ_n вещественны. Это будет сразу следовать из того факта, что λ_n являются собственными значениями самосопряженной краевой задачи для уравнения (1.2). Имея в виду читателя, не знакомого с теорией краевых задач, мы проведем полностью доказательство.

Для уравнения (1.2) рассмотрим краевую задачу

$$y(\omega) = \rho y(0), \qquad y'(\omega) = \rho y'(0)$$

Подставляя $y(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda) y(0) + \psi(t, \lambda) y'(0)$ в краевые условия, получим, что задача разрешима лишь для значений λ, удовлетворяющих уравнению

$$\begin{vmatrix} \varphi(\omega, \lambda) - \rho & \psi(\omega, \lambda) \\ \varphi'(\omega, \lambda) & \psi'(\omega, \lambda) - \rho \end{vmatrix} = 0$$

т. е. уравнению $\rho^2 - 2A(\lambda)\rho + 1 = 0$. Причем для этих значений λ задача имеет нетривиальное решение.

Взяв $\rho = i$, т. е. рассматривая краевую задачу

$$y(\omega) = iy(0), \qquad y'(\omega) = iy'(0) \tag{1.13}$$

получим, что соответствующие значения λ являются корнями уравнения $A(\lambda) = 0$. Пусть $y(t, \lambda_n)$ — решение, отвечающее корню λ_n. Обозначим

$$Lf = f''(t) - a^2 f(t)$$

Дважды интегрируя по частям, получим тождество[1]

$$\int_0^\omega Lfg^* dt = W_\omega\{f, g\} - W_0\{f, g\} + \int_0^\omega f(Lg)^* dt \tag{1.14}$$

где

$$W_t\{f, g\} = \begin{vmatrix} f(t) & g(t)^* \\ f'(t) & g'(t)^* \end{vmatrix}$$

Пусть $f = y(t, \lambda_n)$, $g = y(t, \lambda_m)$. В силу (1.13)

$$W_\omega\{f, g\} - W_0\{f, g\} = 0$$

поэтому из тождества (1.14) следует

$$(\lambda_n - \lambda_m^*) \int_0^\omega [p(t) + a^2]\, y(t, \lambda_n)\, y(t, \lambda_m)^* dt = 0$$

Полагая в этой формуле $n = m$, получим

$$\lambda_n - \lambda_n^* = 0$$

т. е. числа λ_n вещественны.

Мы показали, что в формуле (1.12) числа λ_n вещественны и положительны.

---

[1] Звездочка здесь и в дальнейшем означает комплексно-сопряженное число.

Поэтому из формулы (1.12) по предложению, указанному М. Г. Крейном, следует (1.8)[1].

Из неравенства (1.8) вытекает, что коэффициенты A_n имеют лишь один максимум, т. е. при увеличении n от $n=0$ до некоторого $n=n_0$ коэффициенты возрастают и при $n>n_0$ коэффициенты A_n, убывая, стремятся к нулю. (Возможно, что $n_0=0$, тогда коэффициенты A_n убывают при возрастании n, начиная с $n=0$.) Действительно, пусть n_0 — номер первого максимума. Такой номер обязательно существует, так как в силу сходимости ряда (1.6) при $\lambda=1$ $A_n\to 0$. Так как $A_{n_0+1}\leqslant A_{n_0}$, по смыслу числа n_0, то из (1.8) $A_{n_0+2}<A_{n_0+1}$, $A_{n_0+3}<A_{n_0+2}$ и т. д.

Из (1.6) следует, что характеристическая постоянная уравнения (0.1) определяется рядом

$$A=A_0-A_1+A_2-\cdots+(-1)^nA_n+\cdots \tag{1.15}$$

Обозначим

$$A^{(n)}=A_0-A_1+\cdots+(-1)^nA_n \tag{1.16}$$

Имеем

$$A=A^{(n)}-(A_{n+1}-A_{n+2})-(A_{n+3}-A_{n+4})+\cdots \qquad \text{при четном } n$$

$$A=A^{(n)}+(A_{n+1}-A_{n+2})+(A_{n+3}-A_{n+4})+\cdots \qquad \text{при нечетном } n$$

Поэтому если $n+1\geqslant n_0$

$$A<A^{(n)} \qquad \text{при четном } n \tag{1.17}$$

$$A>A^{(n)} \qquad \text{при нечетном } n \tag{1.18}$$

и, таким образом,

$$\text{если} \quad A^{(n)}\leqslant 1 \quad (n \text{ четное}),\ \text{то} \quad A<1 \tag{1.19}$$

$$\text{если} \quad A^{(n)}\leqslant -1 \quad (n \text{ четное}),\ \text{то} \quad A<-1 \tag{1.20}$$

$$\text{если} \quad A^{(n)}\geqslant 1 \quad (n \text{ нечетное}),\ \text{то} \quad A>1 \tag{1.21}$$

$$\text{если} \quad A^{(n)}\geqslant 1 \quad (n \text{ нечетное}),\ \text{то} \quad A>-1 \tag{1.22}$$

Здесь предполагалось, что $n+1\geqslant n_0$. Покажем теперь (как это сделано в [1]), что каждое из неравенств для $A^{(n)}$ в (1.19) — (1.22) влечет за собой неравенство $n+1\geqslant n_0$. Докажем сейчас даже более сильное

---

[1] В замечании М. Г. Крейна должен быть обоснован предельный переход от формулы Ньютона к формуле (1.8). Вот это обоснование. Пусть

$$\pi_k(\lambda)=A_0\prod_{n=1}^{k}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)=a_0^{(k)}+\lambda a_1^{(k)}+\cdots+\lambda^k a_k^{(k)}$$

Эта функция при $k\to\infty$ равномерно стремится к $A(\lambda)$, если λ заключено в любой конечной части плоскости. Тогда производные функции $\pi_k(\lambda)$ равномерно стремятся к соответствующим производным функции $A(\lambda)$. Поэтому $a_n^{(k)}\to A_n$ при $k\to\infty$. По формуле Ньютона

$$\frac{a_{n+1}^{(k)}}{a_n^{(k)}}<\frac{n(k-n)}{(n+1)(k-n+1)}\,\frac{a_n^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим (1.8). (Отметим, что в (1.8) знак $\leqslant$, а не $<$, но для нас это совершенно безразлично).

утверждение: из неравенства $A^{(1)} \geqslant -1$ следует $n_0 \leqslant 1$, во всех остальных случаях из выполнения каждого неравенства для $A^{(n)}$ в (1.19)—(1.20) следует $n_0 \leqslant n-1$ $(n \geqslant 1)$. Пусть

$$A^{(1)} = A_0 - A_1 \geqslant -1 \quad \text{или} \quad A_1 \leqslant 1 + A_0 = 1 + \operatorname{ch} a\omega$$

Из (1.10) имеем

$$A_2 \leqslant \frac{1 + \operatorname{ch} a\omega}{2 \operatorname{ch} a\omega} A_1 \leqslant A_1 \quad \text{или} \quad n_0 \leqslant 1$$

(На самом деле $n_0 = 0$. Действительно, при $a > 0$ $A_2 < A_1$; следовательно, $n_0 = 0$. При $a = 0$ по третьему неравенству Ляпунова (0.6) $A_2 < A_1$, следовательно, снова $n_0 = 0$, т. е. всегда $n_0 \leqslant n-1$).

Если $A^{(1)} = A_0 - A_1 \geqslant 1$, то

$$A_1 \leqslant A_0 - 1 < A_0 \quad \text{или} \quad n_0 = 0$$

Предположим теперь, что n нечетное > 1 и $A^{(n)} \geqslant \alpha$, т. е.

$$(A_0 - A_1 - \alpha) + (A_2 - A_3) + \ldots + (A_{n-1} - A_n) \geqslant 0 \tag{1.23}$$

(В неравенствах (1.21) и (1.22) $\alpha = 1, -1$.) Предположим, что $n_0 \geqslant n_0$. По смыслу числа n_0 все скобки в (1.23), начиная со второй, отрицательны. При $\alpha \geqslant -1$ первая скобка в (1.23) также отрицательна, так как в противном случае мы имели бы

$$A_0 - A_1 + 1 \geqslant A_0 - A_1 - \alpha \geqslant 0$$

и по доказанному выше $n_0 \geqslant 1$. Таким образом, неравенство (1.23) невозможно при $n \leqslant n_0$, т. е. $n_0 \leqslant n-1$.

Пусть n — четное $\geqslant 2$ и $A^{(n)} \leqslant \alpha = \pm 1$, т. е.

$$(A_0 - \alpha) + (-A_1 + A_2) + (-A_3 + A_4) + \ldots + (-A_{n-1} + A_n) \leqslant 0 \tag{1.24}$$

Это неравенство невозможно при $n \leqslant n_0$, так как при $n \leqslant n_0$ все скобки неотрицательны и, начиная со второй, положительны. Поэтому $n > n_0$, т. е. $n_0 \leqslant n-1$.

Мы доказали справедливость утверждений (1.19)—1.22) для $n \geqslant 1$ без предположения $n + 1 \geqslant n_0$. Отсюда вытекает метод, позволяющий в случае, если $|A| \neq 1$, конечным числом операций установить, какое из неравенств $-|A| > 1$ или $|A| < 1$ — имеет место.

Для этого по формулам (1.4), (1,7), (1.18) подсчитываем числа A_n и $A^{(n)}$. Пусть, например, $A < 1$ (но мы этого не знаем). Так как $A^{(n)} \to A$ при $n \to \infty$, то, начиная с некоторого номера, $A^{(n)} < 1$. Установив это неравенство для некоторого четного n, мы согласно (1.19) обнаружим, что $A < 1$. Точно так же обнаруживаеся любое из неравенств $A < -1$, $A > 1$, $A > -1$.

Недостатком этого метода является то, что, не зная заранее, равняется ли $|A|$ единице или нет, мы не можем сказать заранее, придем ли мы через конечное число шагов к какому-либо ответу или нет. Но, как говорит А. М. Ляпунов, трудность эта обусловлена существом вопроса.

Нельзя, очевидно, установить равенство ни одним из методов последовательных приближений, а лишь эти методы остаются в нашем распоряжении, если мы не можем проинтегрировать уравнение (0.1) в явном виде[1].

Для приложений важен случай, когда функция $p(t)$ зависит от некоторых параметров. Согласно изложенному следующие неравенства гарантируют устойчивость или неустойчивость тривиального решения:

Устойчивость	*Неустойчивость*
	$A^{(1)} \geqslant 1$
$-1 \leqslant A^{(1)} \leqslant A^{(2)} \leqslant 1$	$A^{(2)} \leqslant -1$
$-1 \leqslant A^{(3)} \leqslant A^{(2)} \leqslant 1$	$A^{(3)} \geqslant 1$
$-1 \leqslant A^{(3)} \leqslant A^{(4)} \leqslant 1$	$A^{(4)} \leqslant -1$
$-1 \leqslant A^{(5)} \leqslant A^{(4)} \leqslant 1$	$A^{(5)} \geqslant 1$
. . . .	. . . . . .

Каждое из этих неравенств вырезает в пространстве параметров области устойчивости и неустойчивости. Эти области при $n \to \infty$ подходят все ближе и ближе к граничным кривым (или поверхностям) $A = \pm 1$, охватывая в пределе все пространство параметров.

Подобным же образом можно оценивать характеристические показатели уравнения (0.1). Характеристические показатели μ_1, μ_2 уравнения (0.1), как известно, действительны или чисто мнимы и $\mu_1 \pm \mu_2 = 0$.

Пусть $\mu = \operatorname{Re} \mu_1 \geqslant 0$. Предположим, нас интересует вопрос, $\mu < \mu_0$ или $\mu > \mu_0$ где $\mu_0 > 0$ — некоторое заданное число[2]. Так как

$$\pm \mu = \omega^{-1} \ln \left| A \pm \sqrt{A^2 - 1} \right|$$

то неравенство

$$\mu < \mu_0 \; (\mu > \mu_0)$$

равносильно неравенству[3]

$$|A| < \operatorname{ch}(\mu_0 \omega) \qquad (|A| > \operatorname{ch}(\mu_0 \omega))$$

Для того чтобы определить, какое из неравенств $-|A| < \operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$ или $|A| > \operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$ — имеет место, подсчитываем коэффициент A_n, пока не получим $A_{n_0+1} \leqslant A_{n_0}$.

По формулам (1.17) и (1.18) при $n \geqslant n_0 - 1$ имеем:

если	$A^{(n)} \leqslant \operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$	(n четное), то	$A < \operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$
если	$A^{(n)} \leqslant -\operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$	(n четное), то	$A < -\operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$
если	$A^{(n)} \geqslant \operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$	(n нечетное), то	$A > \operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$
если	$A^{(n)} \geqslant \operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$	(n нечетное), то	$A > -\operatorname{ch}(\mu_0 \omega)$

[1] Если $|A| = 1$, то, как следует из (1.17) и (1.18), для любого $\varepsilon > 0$ можно после конечного числа операций установить неравенство $-1 - \varepsilon < A < 1 + \varepsilon$ или неравенство $+1 - \varepsilon < A < 1 + \varepsilon$.

[2] К такому вопросу сводится анализ устойчивости тривиального решения уравнения $y'' + q(t) y' + p(t) y = 0$ с периодическими коэффициентами $q(t)$ и $p(t)$ или вообще оценка характеристических показателей этого уравнения.

[3] Это замечание имеется в [15] (стр. 132).

Таким образом, в предположении, что $\mu \neq \mu_0$ мы всегда после конечного числа операций сможем установить $\mu > \mu_0$ или $\mu < \mu_0$. Если $\mu = \mu_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ после конечного числа шагов мы сможем установить неравенство $\mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon$.

Как и выше, легко выписать последовательные достаточные условия неравенств $\mu > \mu_0$ и $\mu < \mu_0$.

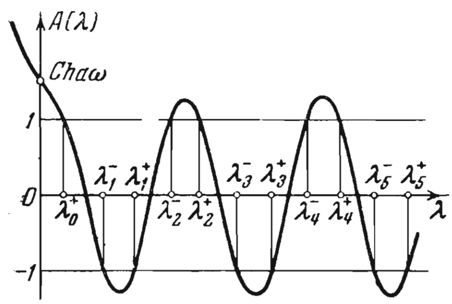
§ 2. Приведем ряд сведений о функции $A(\lambda)$, которые полезно иметь в виду при проведении вычислений.

Функция $A(\lambda)$ имеет график, показанный на фигуре[1].

Корни $\lambda_{2n}^{\pm}$ уравнения $A(\lambda) = 1$ и корни $\lambda_{2n+1}^{\pm}$ уравнения $A(\lambda) = -1$ располагаются в порядке

$$0 \leqslant \lambda_0^+ < \lambda_1^- \leqslant \lambda_1^+ < \ldots < \lambda_n^- \leqslant \lambda_n^+ < \ldots \tag{2.1}$$

При $\lambda < \lambda_0^+$ уравнение (1.2) имеет неколеблющиеся решения, т. е. любое действительное решение уравнения (1.2) обращается в нуль не более чем в одной точке. При $\lambda \geqslant \lambda_0^+$ — решения колеблющиеся, т. е. имеют бесчисленное число нулей.



Фиг. 1

Интервалы $(-\infty, \lambda_0^+)$, $(\lambda_n^-, \lambda_n^+)$ суть интервалы неустойчивости и $(\lambda_{n-1}^+, \lambda_n^-)$ — интервалы устойчивости $(n = 1, 2, \ldots)$

Интервал $(-\infty\ \lambda_0^+)$ назовем нулевым интервалом неустойчивости, интервалы $(\lambda_n^-, \lambda_n^+)$, $(\lambda_n^+, \lambda_{n+1}^-)$ — n-ми интервалами неустойчивости и устойчивости. Будем говорить, что уравнение (0.1) [или функция $p(t)$] принадлежит n-й области устойчивости (неустойчивости) для уравнения (1.2)[2]. Это определение совпадает с имеющимся в [12] и [13], откуда вытекает, например, следующее.

Если $p_1(t) \leqslant p(t) \leqslant p_2(t)$ и функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ принадлежат одной области устойчивости (неустойчивости), то и функция $p(t)$ принадлежит той же области устойчивости (неустойчивости)[3].

Пример. Уравнение

$$y'' + [3 + 18 \cos 2t + \varphi(t)]\, y = 0$$

где $\varphi(t)$ — любая периодическая функция периода π, удовлетворяющая неравенствам

$$-4.359 \leqslant \varphi(t) \leqslant 4.982$$

принадлежит второй области неустойчивости (тривиальное решение неустойчиво). Действительно, заменяя функцию $\varphi(t)$ на постоянную, мы получим уравнение Матье,

---

[1] Строго говоря, мы имеем в виду следующее. Корни уравнений $A(\lambda) = \pm 1$ и $A(\lambda) = c$, $-1 < c < 1$ располагаются друг относительно друга в том порядке, как это следует из фиг. 1.

[2] Легко показать, что номер так определенной области устойчивости или неустойчивости не зависит от выбора числа a^2 в (1.1).

[3] Это можно просто вывести также из работ Н. В. Адамова [8,9].

для которого области устойчивости и неустойчивости рассчитаны [11]. Функции

$$p_1(t) = 3 + 18\cos 2t - 4.359, \quad p_2(t) = 3 + 18\cos 2t + 4.982$$

принадлежит второй области неустойчивости (см. фиг. 3 и табл. 1 в [11]). Следовательно, и наша функция принадлежит второй области неустойчивости.

Если функция $p(t)$ принадлежит n-й области устойчивости, то для того, чтобы определить это по методу Ляпунова, нужно подсчитать по крайней мере $n+2$ коэффициента A_n. Докажем это. Пусть

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A^{(n)}(\lambda) + (-1)^{n+1} R_n(\lambda) \\ R_n(\lambda) &= A_{n+1}\lambda^{n+1} - A_{n+2}\lambda^{n+2} + \ldots \end{aligned} \tag{2.2}$$

При $n \geqslant n_0$, $0 < \lambda \leqslant 1$ $R_n(\lambda)$ — положительная, возрастающая функция. Достаточно показать, что $dR_n/d\lambda > 0$ при $0 < \lambda < 1$:

$$\frac{dR_n}{d\lambda} = \sum_{k=n+1}^{\infty} [kA_k\lambda^k - (k+1) A_{k+1}\lambda^{k+1}]$$

Выражение в квадратной скобке положительно при $k > n_0$ по неравенству (1.8), т. е. $dR_n/d\lambda > 0$ при $0 < \lambda < 1$.

Обозначим m номер области устойчивости. Предположим сначала, что m четно. По методу Ляпунова мы получим для некоторого четного n $A^{(n)} \leqslant 1$ и для некоторого нечетного n $A^{(n)} \geqslant -1$. Рассмотрим случай четного n. Так как $-1 < A(1) \leqslant A^{(n)}(1) \leqslant 1$, то $0 < R_n(1) < 2$. Поэтому для всех λ,

$$0 \leqslant R_n(\lambda) \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Для λ, лежащих в интервалах неустойчивости с нечетным номером,

$$A(\lambda) > 1, \qquad A^{(n)}(\lambda) + R_n(\lambda) < 1$$

Для значений λ, лежащих в интервалах неустойчивости с четным номером,

$$A(\lambda) > 1, \qquad A^{(n)}(\lambda) = A(\lambda) + R_n(\lambda) > 1$$

Полином $A^{(n)}(\lambda)$ степени n принимает по крайней мере $m+1$ раз значение равное 1. Следовательно, $n \geqslant m+1$ и, так как n четное, то $n \geqslant m+2$.

Если m нечетно, то, проводя те же выкладки для неравенства $A^{(n)} \geqslant -1$ с нечетным n, мы получили бы снова $n \geqslant m+2$. Таким образом, в обоих случаях нужно подсчитать по крайней мере $m+2$ коэффициента A_n. (Если пользоваться неравенствами (0.6) Ляпунова для $a^2 = 0$ или неравенством (1.8), то последний коэффициент иногда можно не подсчитывать.)

Функция $p(t) = n^2\pi^2\omega^{-2}$ лежит на границе $(n-1)$-й и n-й областей устойчивости. Для этой функции $\lambda = 1 = \lambda_n^- = \lambda_n^+$. В n-й области устойчивости лежат функции, не слишком сильно отличающиеся от c^2,

$$n^2\pi^2\omega^{-2} \leqslant c^2 \leqslant (n+1)^2\pi^2\omega^{-2}$$

Поэтому метод Ляпунова приводит к тем бо́льшим выкладкам, чем, грубо говоря, больше функция $p(t)$ по сравнению с величиной $\pi^2\omega^{-2}$.

По теореме сравнения числа $\lambda_n^{\pm}$ уменьшаются при возрастании функции $p(t)$. Поэтому если $p(t) \geqslant n^2\pi^2\omega^{-2}$, то $\lambda_n^{\pm} < 1$, т. е. функция $p(t)$ может принадлежать лишь областям устойчивости с индексом $\geqslant n$ и областям неустойчивости с индексом $> n$. Если $p(t) \leqslant n^2\pi^2\omega^{-2}$, то $\lambda_n^{\pm} > 1$, т. е. функция $p(t)$ может принадлежать лишь областям устойчивости или неустойчивости с индексом $< n$ (график функций из n-й области неустойчивости $s = p(t)$ обязательно рассекает прямую $s = n^2\pi^2\omega^{-2}$).

Из доказательства критериев, имеющихся в [12], следует, что условия

$$\frac{(n-1)\pi}{\omega} \leqslant c < \frac{n\pi}{\omega}, \qquad \int_0^\omega |p(t) - c^2|\,dt < 2cn \operatorname{ctg} \frac{\omega c}{2n} \tag{2.3}$$

гарантируют, что $\lambda_n^{\pm} > 1$, а из условия

$$\frac{n\pi}{\omega} < c \leqslant \frac{(n+1)\pi}{\omega}, \qquad \int_0^\omega |p(t) - c^2|\,dt < c(\omega c - n\pi) \tag{2.4}$$

следует, что $\lambda_n^{\pm} > 1$.

Из доказательства критерия Ж. Борга [10] следует, что константы в правых частях неравенств (2.3) и (2.4) могут быть увеличены в два раза, если брать

$$c^2 = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega p(t)\,dt$$

В работе М. Г. Крейна [7] указаны точные границы для $\lambda_n^{\pm}$ в предположении, что известны верхняя, нижняя границы и среднее значение функции $p(t) \geqslant 0$ $(a^2 = 0)$.

В заключение докажем следующие простые условия устойчивости и неустойчивости

I. Если выполнено (1.1) и

$$\int_0^\omega [p(t) + a^2]\,dt \leqslant 2a \operatorname{th} \frac{a\omega}{2} \tag{2.5}$$

то $p(t)$ принадлежит нулевой области неустойчивости (решения уравнения (0.1) не колеблющиеся).

II. Если выполнено (1.1) и

$$\int_0^\omega p(t)\,dt \geqslant 0, \qquad \int_0^\omega [p(t) + a^2]\,dt \leqslant 2a \operatorname{cth} \frac{a\omega}{2} \tag{2.6}$$

то $p(t)$ принадлежит нулевой области устойчивости.

Условие II является обобщением известного критерия Ляпунова, в который оно переходит при $a^2 = 0$.

Условие I следует из § 1, так как неравенство (2.5) является записанным в явном виде неравенством $A^{(1)} \geqslant 1$.

Второе неравенство в (2.6) является неравенством $A^{(1)} \geqslant -1$. Покажем, что из этого неравенства вытекает не только $A > -1$, как это следует из § 1, но $\lambda_1^- > 1$ (фиг. 1).

Предположим противное, т. е. $\lambda_1^- \leqslant 1$. Тогда $\lambda_1^+ < 1$, так как при $\lambda_1^- \leqslant 1 \leqslant \lambda_1^+$ $A \leqslant -1$. Рассмотрим функцию

$$p_\mu(t) = (1-\mu)\,p(t) - \mu a^2, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1$$

Обозначим A_μ соответствующую характеристическую постоянную. Так как

$$p_\mu(t) \geqslant -a^2, \qquad \int_0^\omega [p_\mu(t) + a^2]\,dt \leqslant 2a \operatorname{cth} \frac{a\omega}{2}$$

то $A_\mu > -1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Обозначим $A_\mu(\lambda)$ и $\lambda_n^\pm(\mu)$ функцию $A(\lambda)$ и числа $\lambda^\pm$ для уравнения с функцией $p_\mu(t)$. Так как $A_\mu(\lambda) \to \operatorname{ch} a\omega$ при $\mu \to 1$, $p_\mu(t) \to a^2$ и, следовательно, $\lambda_n^\pm(\mu) \to \infty$. Так как по предположению $\lambda_1^+(0) < 1$, то найдется μ, $0 < \mu < 1$, для которого

$$\lambda_1^-(\mu) \leqslant 1 \leqslant \lambda_1^+(\mu)$$

Но тогда $A_\mu \leqslant -1$, что невозможно. Следовательно, $\lambda_1^- > 1$.

Условие

$$\int_0^\omega p\,dt \geqslant 0$$

гарантирует, как известно, колебательность решений уравнения (0.1).

Действительно, если решения неколеблющиеся, уравнение (0.1) имеет решение вида

$$y(t) = e^{kt} u(t)$$

Здесь k, $u(t)$ — действительны, $u(t+\omega) = u(t)$, $u(t) \neq 0$ ни в одной точке. Тогда

$$\int_0^\omega p\,dt = -\int_0^\omega \frac{y''}{y}\,dt = -\int_0^\omega \frac{k^2 u + 2ku' + u''}{u}\,dt = -k^2\omega - \int_0^\omega \frac{u'^2}{u^2}\,dt < 0$$

Поэтому $\lambda_0^+ < 1$, т. е. $\lambda_0^+ < 1 < \lambda_1^-$, что и требовалось доказать.

Условие II было доказано автором ранее [14]. Из этого доказательства следует, что неравенства (2.6) точные, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции $p(t)$ из нулевой области неустойчивости, для которых

$$\int_0^\omega p(t)\,dt \geqslant -\varepsilon, \qquad \int_0^\omega [p(t) + a^2]\,dt \leqslant 2a \operatorname{cth} \frac{a\omega}{2}$$

и из первой области неустойчивости, для которых

$$\int_0^\omega p(t)\,dt \geqslant 0, \qquad \int_0^\omega [p(t) + a^2]\,dt \leqslant 2a \operatorname{cth} \frac{a\omega}{2} + \varepsilon$$

Таким образом, если нам известна лишь нижняя граница функции $p(t)$, то неравенства (2.6) нельзя улучшить.

Как следует из [12] или из (2.3), условие II справедливо и для чисто мнимых a; в этом случае $-a^2 = c^2 > 0$, если только $c^2 < \pi^2\omega^{-2}$.

Поступила 11 V 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов, А. М. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. Записки Академии наук, т. XIII, № 2, 1902.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
3. Ляпунов А. М. Sur une équation differentielle linéaire du second ordre. Comptes rendus des séances de l'Acad. des sciences, t. CXXVIII, №, 15, pp. 910—113, 1899.
4. Старжинский В. М. Обзор работ по условиям устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
5. Титчмарш Е. Теория функций. Гос. изд-во, 1951, § 8.24, стр. 284.
6. Коваленко К. Р. и Крейн М. Г. О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. I, XXV, № 4, 1950.
7. Крейн М. Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951.
8. Адамов Н. В. О колебаниях интегралов уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и некоторых условиях устойчивости. Мат. сб., вып. 6, 1935.
9. Адамов Н. В. Sur quelques propriétés... C. R. Acad. des sciences, N 197, pp. 1280—1282, 1933.
10. Börg G. Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen. Ark. för mat., astr. och fysik, 31 A, N 1, 1944.
11. Стрет М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, ОНТИ, 1935.
12. Якубович В. А. Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t + \omega) = p(t)$. ДАН СССР, т. XXIV, № 5, 1950.
13. Якубович В. А. Критерии устойчивости для системы двух линейных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. XXVIII, № 2, 1951.
14. Якубович В. А. Вопросы устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.
15. Старжинский В. М. Об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Инж. сб., т. XVIII, 1954.