Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

В работе устанавливаются некоторые общие предложения о существовании почти периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Для вычисления указанных почти периодических решений устанавливается сходящийся процесс последовательных приближений.

Задача о почти периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений является наиболее трудной и вместе с тем одной из практически наиболее важных в теории нелинейных колебаний. В настоящее время в этом направлении получен ряд фундаментальных результатов. Они установлены в известных работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова и в особенности в работе [1] Н. Н. Боголюбова. В основе всех этих работ лежит так называемый «принцип усреднения». В настоящей работе изучаются также почти периодические решения нелинейных систем; при этом также используются некоторые приемы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, связанные с принципом усреднения, но подход к задаче несколько иной. Излагаемая ниже теория является непосредственным обобщением основных результатов теории периодических решений, в основе которой лежит метод Пуанкаре.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t,\ x_1, \ldots, x_n) + \mu X_s'(t,\ x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \quad (1.1)$$

содержащими малый параметр μ, и соответствующую «порождающую систему»

$$\frac{dx_s^\circ}{dt} = X_s(t,\ x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \quad (1.2)$$

и допустим сначала, что по отношению к t функции X_s и X_s' периодичны с некоторым периодом ω. Пусть, далее, $x_s^\circ = \varphi_s(t)$ — какое-нибудь периодическое решение порождающей системы («порождающее» решение). Тогда, как показал Пуанкаре (предполагая, что уравнения аналитичны относительно x_j, μ), если все характеристические показатели порождающего решения отличны от нуля (или от $2\pi Ni/\omega$, где N — целое число), то система (1.1) допускает одно и только одно периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее. Если же указанное условие относительно характеристических показателей не выполняется, то такого однозначного соответствия между периодическими решениями основной и порождающей систем, вообще говоря, не будет. В частности, Пуанкаре рассмотрел случай, когда порождающее решение принадлежит семейству периодических решений системы (1.2), зависящему от некоторого параметра h. В этом случае один из характеристических показателей необходимо обращается в нуль и, как показал Пуанкаре, лишь тем порождающим решениям будут соответствовать периодические решения системы (1.1), для которых параметр h принимает определенные численные значения, являющиеся корнями некоторого уравнения $P(h)=0$. Более подробно этот случай, являющийся наиболее важным для теории нелинейных колебаний, рассмотрен нами в [2]. Мы показали, что если рассматриваемое порождающее решение принадлежит семейству

$$x_s^\circ = \varphi_s(t,\ h_1, \ldots, h_k) \tag{1.3}$$

зависящему от $k \leqslant n$ произвольных параметров h_j, и соответствует значениям h_j^* этих параметров, то для того, чтобы этому решению соответствовало периодическое решение полной системы (1.1), необходимо, чтобы величины h_j^* удовлетворяли некоторым уравнениям

$$P_j(h_1^*, \ldots, h_k^*) = 0, \qquad (j=1, \ldots, k) \tag{1.4}$$

Далее мы показали, что если это условие выполнено и если при этом функциональный определитель $\partial(P_1, \ldots, P_k) / \partial(h_1^*, \ldots, h_k^*)$ отличен от нуля, или, что то же самое, уравнение

$$|\partial P_i / \partial h_j^* - \delta_{ij}\rho| = 0 \tag{1.5}$$

не имеет нулевого корня, то рассматриваемому порождающему решению действительно соответствует одно и только одно периодическое решение полной системы (1.1) и в случае аналитических уравнений это решение будет аналитическим относительно μ.

Допустим теперь, что правые части уравнений (1.1) являются по отношению к t почти периодическими функциями и задача заключается в отыскании почти периодических решений этих уравнений. Возникает вопрос, в какой мере указанные выше результаты относительно периодических решений могут быть перенесены на решения почти периодические, т. е. возникает задача об условиях, при которых почти периодическим решениям порождающей системы отвечают почти периодические решения полной системы, и методах вычисления этих решений. В рассматриваемой работе эта задача решается нами в предположении, что функции X_s по отношению t чисто периодичны, и в случае систем не квазилинейных, т. е. в случае, если функции X_s не линейны относительно $x_1, \ldots, x_n$, предполагается также, что порождающее решение является тоже чисто периодическим. Показывается, что всякому изолированному порождающему почти периодическому решению, т. е. такому решению, для которого уравнения в вариациях не имеют почти периодических решений, отвечает одно и только одно почти периодическое решение полной системы, обращающееся при $\mu=0$ в порождающее. Если же порождающее решение принадлежит семейству, зависящему от k произвольных параметров $h_1, \ldots, h_k$, то каждому такому решению, для которого параметры удовлетворяют уравнениям вида (1.4), отвечает почти периодическое решение полной системы, если только уравнение (1.5) не имеет корней с нулевыми вещественными частями (а не только нулевого корня, как в случае периодических решений). При этом, однако, в отличие от случая периодических решений условия (1.4) не являются необходимыми и полная система может иметь почти периодические решения, соответствующие порождающим решениям, не связанным указанными условиями. Во всех случаях указывается сходящийся процесс последовательных приближений для вычисления искомых почти периодических решений. Этот процесс будет практически эффективным и приведет к несложным вычислениям, если порождающая система линейна с постоянными коэффициентами. В общем же случае необходимо знать общее решение уравнений в вариациях порождающей системы. Если, однако, ограничиться вычислением первого приближения, то достаточно знать столько первых интегралов этой системы, сколько произвольных параметров содержится в порождающем решении.

Во всей работе делаются следующие общие предположения относительно уравнений (1.1). Предполагается, что переменная t изменяется в интервале $-\infty < t < +\infty$, переменные $x_1, \ldots, x_n$ — в некоторой ограниченной области D пространства этих переменных и параметр μ — в области $|\mu| \leqslant H$, где H — положительное число. При этом функции X_s обладают производными второго порядка по переменным $x_1, \ldots, x_n$, а функции X_s' — производными первого порядка по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и μ и эти производные удовлетворяют относительно указанных переменных условиям Коши-Липшитца с не зависящими от t коэффициентами. По отношению к t функции X_s непрерывны и периодичны с заданным периодом ω, а функции X_s' почти периодичны и притом такие, что их ряды Фурье состоят только из конечного числа членов. Таким образом,

$$X_s'(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) = X_s'(x_1, \ldots, x_n, \mu) + \sum X_{s\nu}'(x_1, \ldots, x_n, \mu)\, e^{i\omega_\nu t}$$

где ω_ν — постоянные и суммы содержат лишь конечное число членов.

Условимся также в дальнейшем говорить, что функция $f(t, y_1, \ldots, y_m)$ переменных t и y_j почти периодична относительно t, если при любых фиксированных значениях переменных y_j в некоторой области их изменения она является почти периодической функцией t с не зависящим от y_j частотным базисом. В § 2 уравнения (1.1) рассматриваются при более общих предположениях.

§ 2. Случай изолированного порождающего решения. Допустим, что порождающая система (1.2) допускает периодическое решение

$$x_s^\circ = \varphi_s(t) \tag{2.1}$$

лежащее в области D. Рассмотрим соответствующие этому решению уравнения в вариациях, т. е. систему линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n \tag{2.2}$$

где

$$p_{sj} = \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j}\right) \tag{2.3}$$

причем скобки означают, что производные вычисляются для порождающего решения (2.1). Мы будем говорить, что это решение является изолированным, если система (2.2) не имеет почти периодических решений, для чего необходимо, чтобы характеристическое уравнение системы (2.2) не имело корней с модулями, равными единице, или, что то же самое, чтобы вещественные части всех ее характеристических показателей (т. е. характеристических показателей порождающего решения) были отличны от нуля. Имеет место следующая теорема.

Теорема I. Если порождающее решение является изолированным, то система (1.1) при достаточно малом μ допускает одно и только одно почти периодическое решение, обращающееся в порождающее при $\mu = 0$.

Доказательство. Докажем теорему при условиях, более общих, чем те, которые были указаны выше. А именно мы будем предполагать, что величины X_s' являются почти периодическими функциями t общего вида, отбросив ограничение, что ряды Фурье этих функций состоят из конечного числа слагаемых. Положим в уравнениях (1.1)

$$x_s = \varphi_s + y_s \tag{2.4}$$

после чего они примут вид:

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha} y_\alpha + Y_s(t, y_1, \ldots, y_n) + \mu X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0) + \mu Y_s'(t, y_1, \ldots, y_n, \mu) \tag{2.5}$$

Согласно условиям, наложенным на правые части уравнений (1.1), при достаточно малых значениях величин y_s, y_s', y_s'' и μ функции Y_s удовлетворяют неравенствам

$$|Y_s(t, y_1, \ldots, y_n)| < A \sum_{\alpha=1}^{n} |y_\alpha|^2 \tag{2.6}$$

$$|Y_s(t, y_1', \ldots, y_n') - Y_s(t, y_1'', \ldots, y_n'')| < B \sum_{\alpha=1}^{n} (|y_\alpha'| + |y_\alpha''|) \sum_{\alpha=1}^{n} |y_\alpha' - y_\alpha''| \tag{2.7}$$

а функции Y_s неравенствам

$$|Y_s'(t, y_1, \ldots, y_n, \mu)| < C\left(\sum_{\alpha=1}^{n} |y_\alpha| + |\mu|\right) \tag{2.8}$$

$$|Y_s'(t, y_1', \ldots, y_n', \mu) - Y_s'(t, y_1'', \ldots, y_n'', \mu)| < C \sum_{\alpha=1}^{n} |y_\alpha' - y_\alpha''| \tag{2.9}$$

где A, B, C — некоторые постоянные. По отношению к t эти функции почти периодичны (функции Y_s просто периодичны).

Будем искать почти периодические решения уравнений (2.5) методом последовательных приближений, приняв в качестве первого приближения почти периодическое решение уравнений

$$\frac{dy_s^{(1)}}{dt} = p_{s1} y_1^{(1)} + \cdots + p_{sn} y_n^{(1)} + \mu X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0) \tag{2.10}$$

и в качестве k-го приближения $(k > 1)$ — почти периодическое решение уравнений

$$\frac{dy_s^{(k)}}{dt} = p_{s1} y_1^{(k)} + \cdots + p_{sn} y_n^{(k)} + \mu X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0) + \\ + Y_s(t, y_1^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}) + \mu Y_s'(t, y_1^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}, \mu) \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{2.11}$$

Пусть $f_s(t)$ — произвольные почти периодические функции. Так как характеристическое уравнение системы (2.2) не имеет по условию корней с модулями, равными единице, то согласно известной теореме система

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \cdots + p_{sn}y_n + f_s(t)$$

допускает одно и только одно почти периодическое решение. При этом, как это непосредственно вытекает из доказательства указанной теоремы, это решение удовлетворяет неравенствам

$$|y_s| < QL \tag{2.12}$$

где Q — верхний предел величин $|f_s|$, а L — некоторая не зависящая от f_s постоянная. Следовательно, обозначая через M верхний предел функций $X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0)$, будем иметь, что сисема (2.10) допускает одно и только одно почти периодическое решение $y_s^{(1)}$ и это решение удовлетворяет неравенствам

$$|y_s^{(p)}| < \mu ML < \mu K \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{2.13}$$

где K — некоторая постоянная, величина которой будет выбрана ниже. Из (2.13) следует, что если μ достаточно мало, что мы и будем предполагать, то величины $\varphi_s + y_s^{(1)}$ будут лежать в области D и, следовательно, величины $y_s^{(1)}$ — в области определения функций Y_s и Y_s'.

Определив таким образом $y_s^{(1)}$, мы сумеем из (2.11) определить $y_s^{(2)}$. Допустим для определенности, что все $y_s^{(2)}, \ldots, y_s^{(k-1)}$ уже вычислены, что все они вышли почти периодическими и что они удовлетворяют неравенствам (2.13). Тогда правые части уравнений (2.11) будут известными почти периодическими функциями t, и из этих уравнений найдем одну и только одну систему почти периодических функций $y_s^{(k)}$. Для этих функций на основании (2.6), (2.8), (2.12), (2.13) справедливы оценки

$$|y_s^{(k)}| < |\mu| [ML + |\mu| nA^2K^2L + |\mu| C(nK+1)L]$$

и, следовательно, неравенства (2.13) выполняются также и при $p = k$, если только K выбрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$ML + |\mu| nAK^2L + |\mu| C(nK+1)L < K$$

что, очевидно, при достаточно малом μ всегда возможно.

Рассмотрим разности $|y_s^{(k+1)} - y_s^{(k)}|$. Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d(y_s^{(k+1)} - y_s^{(k)})}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}(y_\alpha^{(k+1)} - y_\alpha^{(k)}) + Y_s(t, y^{(k)}) - Y_s(t, y^{(k-1)}) +$$
$$+ \mu [Y_s'(t, y^{(k)}, \mu) - Y_s'(t, y^{(k-1)}, \mu)]$$

Поэтому, обозначив через a_p верхний предел величин $|y_s^{(p)} - y_s^{(p-1)}|$, будем на основании (2.7), (2.9), (2.13) и (2.12) иметь

$$|y_s^{(k+1)} - y_s^{(k)}| < 2|\mu| n^2BKLa_k + |\mu| CnLa_k$$

Мы можем, следовательно, положить

$$a_{k+1} = |\mu| (2n^2BK + Cn) La_k$$

откуда непосредственно вытекает, что при μ, достаточно малом, последовательность $y_s^{(k)}$ равномерно сходится к некоторым почти периодическим функциям $y_s^{(t)}$. Доказательство, что эти функции удовлетворяют уравнениям (2.5) и представляют единственное почти периодическое решение этих уравнений, приводится обычными для метода последовательных приближений приемами. Подставляя найденное решение в (2.4), получим одно и только одно почти периодическое решение уравнений (1.1), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$. Таким образом, теорема доказана.

Примечание. Незначительно изменяя предыдущие рассуждения, легко показать, что теорема остается справедливой при несколько более слабых ограничениях для функций X_s и X_s'. А именно условия, что функции X_s' допускают по переменным, $x_1, \ldots, x_n, \mu$ непрерывные производные первого порядка, а функции X_s — непрерывные производные второго порядка, можно заменить условием, что функции X_s' и первые производные функций X_s удовлетворяют относительно указанных переменных неравенствам Коши-Липшитца с не зависящими от t коэффициентами.

§ 3. Случай семейства порождающих решений. Допустим теперь, что система (1.2) допускает семейство периодических решений

$$x_s^\circ = \varphi_s(t, h_1, \ldots, h_k) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где φ_s — периодические функции t периода ω зависящие от $k \leqslant n$ произвольных параметров h_i. Система в вариациях (2.2) имеет в этом случае k независимых частных решений

$$\varphi_{si} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial h_i} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{3.2}$$

которые будут, очевидно, периодическими. Вследствие этого характеристическое уравнение этой системы имеет k корней, равных единице. Мы будем предполагать, что остальные $n-k$ корней этого уравнения имеют модули, отличные от единицы. В рассматриваемом случае условия теоремы I не выполняются и вопрос о существовании почти периодических решений полной системы (1.1) требует особого исследования. Пусть

$$\frac{dx_s}{dt} + p_{1s}x_1 + \cdots + p_{ns}x_n = 0 \tag{3.3}$$

система, сопряженная с (2.2). Эта система также допускает k независимых периодических решений, $\psi_{s1}, \psi_{s2}, \ldots, \psi_{sk}$.

По свойству решений сопряженных систем имеют место соотношения

$$\varphi_{1i}(t)\varphi_1(t) + \cdots + \varphi_{ni}(t)\psi_{nj}(t) = \delta_{ij} \qquad (\delta_{ij} = \text{const})$$

Так как по условию, характеристическое уравнение системы (2.2) имеет $n-k$ корней, от единицы, то, как легко показать, функции ψ_s можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\delta_{ii} = 1, \qquad \delta_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

Будем предполагать, что эти условия выполняются. Обозначим

$$P_i(h_1, \ldots, h_k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^n X_\alpha'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0)\, \psi_{\alpha i}\, dt \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{3.4}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема II. Для каждого порождающего решения семейства (3.1), лежащего в области D, для которого параметры h_j удовлетворяют уравнениям

$$P_i(h_1, \ldots, h_k) = 0 \tag{3.5}$$

и при этом уравнение относительно ρ

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial h_j} - \delta_{ij}\,\rho \right| = 0 \quad (\delta_{ij} \text{— символ Кронекера}) \tag{3.6}$$

не имеет корней с вещественными частями, равными нулю, существует при μ достаточно малом почти периодическое решение уравнений (1.1), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее.

Доказательство. 1°. Положим в уравнениях (1.1)

$$x_s = \varphi_s + \mu y_s \tag{3.7}$$

после чего они примут вид:

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}\, y_\alpha + X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0) + \mu Y_s(t, y, \mu) \tag{3.8}$$

где

$$Y_s(t, y, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \frac{\partial^2 X_s(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial \varphi_\alpha\, \partial \varphi_\beta}\, y_\alpha y_\beta +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0)}{\partial x_\alpha}\, y_\alpha + \left(\frac{\partial X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \mu)}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} + Y_s^*(t, y, \mu) \tag{3.9}$$

и функции Y_s^* обращаются в нуль при $\mu = 0$, так что

$$Y_s(t, y, 0) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \frac{\partial^2 X_s(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial \varphi_\alpha\, \partial \varphi_\beta}\, y_\alpha y_\beta +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0)}{\partial x_\alpha}\, y_\alpha + \left(\frac{\partial X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \mu)}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} \tag{3.10}$$

Введем далее вместо переменных $y_1, \ldots, y_n$ переменные $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и $\eta_1, \ldots, \eta_m$, где $m = n - k$, при помощи подстановки

$$\xi_i = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha \psi_{\alpha i}, \quad \eta_j = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha \psi_{\alpha j}^* \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

где $\psi_{\alpha i}$ — периодические функции, фигурирующие в (3.4), а $\psi_{\alpha j}^*$ — также периодические функции, выбранные таким образом, чтобы линейная часть преобразованных уравнений не содержала переменных $\xi_1, \ldots, \xi_k$, имела постоянные коэффициенты и подстановка была неособенной при любых значениях t. После подстановки уравнения (3.8) примут вид:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{m} X_\alpha'(t, \varphi, 0)\, \psi_{\alpha i} + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha(t, y, \mu)\, \psi_{\alpha i} \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

$$\frac{d\eta_j}{dt} = q_{j1}\eta_1 + \cdots + q_{jm}\eta_m + f_j(t) + \mu F_j(t, \xi, \eta, \mu) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{3.12}$$

Здесь $f_j(t)$ и $F_j(t, \xi, \eta, \mu)$ — известные функции, которые нам нет необходимости выписывать подробно. Эти функции по отношению к t почти периодичны, а по отношению к $\xi_1, \ldots, \eta_m$ и μ удовлетворяют условиям Коши-Липшитца. Постоянные q_{jr} таковы, что уравнение

$$|\, q_{jr} - \delta_{jr}\,\lambda \,| = 0 \tag{3.13}$$

не имеет корней с равными нулю вещественными частями. Это соответствует предположению, что характеристическое уравнение системы в вариациях (2.2) имеет $n-k$ корней, модули которых отличны от единицы.

Будем предполагать, что параметры $h_1, \ldots, h_k$ порождающего решения удовлетворяют уравнениям (3.5), и рассмотрим систему

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0)\varphi_{\alpha i}, \qquad \frac{d\eta_j}{dt} = q_{j1}\eta_1 + \cdots + q_{jm}\eta_m + f_j(t) \tag{3.14}$$

в которую переходит (3.12) при $\mu = 0$. Правые части первой группы этих уравнений представляют собой конечные суммы членов вида $\exp(\sqrt{-1}\alpha t)\varphi(t)$, где α — вещественное число, а $\varphi(t)$ — непрерывная дифференцируемая периодическая функция периода ω. Вследствие этого выполнения условий (3.5) достаточно, чтобы неопределенные интегралы этих правых частей были функциями почти периодическими. Отсюда вытекает, что общее решение первой группы уравнений (3.14) будет почти периодическим. Что же касается второй группы этих уравнений, то по свойству корней уравнения (3.13) оно будет допускать одно и только одно почти периодическое решение, которое мы обозначим через $\eta_j^\circ(t)$. Таким образом, уравнения (3.14) допускают почти периодическое решение

$$\xi_i = \xi_i^\circ = M_i + \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha'(t, \varphi, 0)\psi_{\alpha i}\,dt, \qquad \eta_j = \eta_j^\circ(t) \tag{3.15}$$

зависящее от k произвольных постоянных $M_1, \ldots, M_k$. В переменных y_s это решение, как легко видеть, имеет вид[1]:

$$y_s^\circ = y_s^*(t) + M_1\varphi_{s1} + \cdots + M_k\varphi_{sk} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.16}$$

где $y_s^*(t)$ — частное почти периодическое решение системы

$$\frac{dy_s^*}{dt} = p_{s1}y_1^* + \cdots + p_{sn}y_n^* + X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0) \tag{3.17}$$

которое, как показано в [3], при условии (3.5) будет обязательно существовать. Установив это, введем в уравнения (3.12) вместо переменных ξ_i и η_j переменные M_i и z_j при помощи подстановки

$$\xi_i = \xi_i^\circ + \mu u_i(t, M_1, \ldots, M_k), \qquad \eta_j = \eta_j^\circ + \mu z_j \tag{3.18}$$

где

$$u_i = \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha(t, y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ, 0)\psi_{\alpha i}\,dt - A_i t \tag{3.19}$$

$$A_i = A_i(M_1, \ldots, M_k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha(t, y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ, 0)\psi_{\alpha i}\,dt \tag{3.20}$$

Как легко видеть, функции u_i будут почти периодическими относительно t и, как это вытекает из (3.10) и (3.16), квадратичными формами

---

[1] В общем случае величины M_i, фигурирующие в (3.15), являются линейными комбинациями величин, обозначенных теми же буквами в (3.16). Однако, система периодических решений ψ_{si} уравнений (3.3) у нас выбрана таким образом, что M_i в (3.15) и в (3.16) обозначают одни и те же величины.

относительно M_i. Подставляя (3.18) в (3.12), получим

$$\frac{dM_i}{dt} + \mu \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial u_i}{\partial M_r} \frac{dM_r}{dt} =$$

$$= \mu A_i (M_1, \ldots, M_k) + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} \{Y_\alpha (t, y_1, \ldots, y_n, \mu) - Y_\alpha (t, y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ, 0)\, \psi_{\alpha i}\}$$

$$\frac{dz_i}{dt} = q_{j1} z_1 + \cdots + q_{jm} z_m + F_j (t, \xi^\circ + \mu u, \eta^\circ + \mu z, \mu)$$

Так как функции Y_α и F_j удовлетворяют соответственно по переменным y_s, ξ_i, η_j, μ условиям Коши-Липшитца, то после разрешения относительно dM_i / dt окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} &= \mu A_i (M_1, \ldots, M_k) + \mu^2 B_i (t, M_1, \ldots, M_k, z_1, \ldots, z_m, \mu) \\ \frac{dz_j}{dt} &= q_{j'} z_1 + \cdots + q_{jm} z_m + F_j (t) + \mu Z_j (t, M_1, \ldots, M_k, z_1, \ldots, z_m, \mu) \end{aligned} \tag{3.21}$$

где $F_j(t) = F_j (t, \xi^\circ, \eta^\circ, 0)$ — известные почти периодические функции t. Функции B_i и Z_j относительно t также почти периодичны, а относительно $M_1, \ldots, M_k, z_1, \ldots, z_m$ удовлетворяют условиям Коши-Липшитца.

Все сделанные нами преобразования таковы, что почти периодическим решениям системы (3.21) отвечают почти периодические решения исходной системы (1.1).

2°. Рассмотрим подробнее функции $A_i (M_1, \ldots, M_k)$. Покажем, что они линейны относительно $M_1, \ldots, M_k$:

$$A_i = A_{i1} M_1 + \cdots + A_{ik} M_k + A_{i0} \tag{3.22}$$

при этом

$$A_{ij} = \frac{\partial P_i (h_1, \ldots, h_k)}{\partial h_j} \tag{3.23}$$

Действительно, подставляя (3.10) и (3.16) в (3.20) и принимая во внимание (3.7), легко найдем

$$A_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^{n} \frac{\partial^2 X_\alpha (t, \varphi)}{\partial \varphi_\gamma \partial \varphi_\beta} y_\beta^\circ y_\gamma^\circ + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial X_\alpha' (t, \varphi, 0)}{\partial \varphi_\beta} y_\beta^\circ \right\} \psi_{\alpha i}\, dt$$

Отсюда

$$\frac{\partial A_i}{\partial M_j} = A_{ij} + \sum_{r=1}^{k} A_{ijr} M_r \tag{3.24}$$

где

$$A_{ij} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\beta, \gamma=1}^{n} \frac{\partial^2 X_\alpha (t, \varphi)}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \varphi_{\beta j} y_\gamma^* + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial X_\alpha' (t, \varphi, 0)}{\partial \varphi_\beta} \varphi_{\beta j} \right\} \psi_{\alpha i}\, dt \tag{3.25}$$

$$A_{ijr} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^{n} \frac{\partial^2 X_\alpha (t, \varphi)}{\partial \varphi_\beta \partial \varphi_\gamma} \varphi_{\beta j} \varphi_{\gamma r} \psi_{\alpha i}\, dt \tag{3.26}$$

На основании (2.3) и (3.2) имеем

$$A_{ij}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{\alpha=1}^n\left\{\sum_{\gamma=1}^n\frac{\partial p_{\alpha\gamma}}{\partial h_j}y_\gamma^*+\frac{\partial X_\alpha'(t,\varphi,0)}{\partial h_j}\right\}\psi_{\alpha i}\,dt$$

или, принимая во внимание (3.17):

$$A_{ij}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{\alpha=1}^n\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial y_\alpha^*}{\partial h_j}-\sum_{\gamma=1}^n p_{\alpha\gamma}\frac{\partial y_\gamma^*}{\partial h_j}\right\}\psi_{\alpha i}\,dt=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left\{\Big|_0^t\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial y_\alpha^*}{\partial h_j}\psi_{\alpha i}-\right.$$

$$\left.-\int_0^t\sum_{\gamma=1}^n\left[\frac{\partial y_\gamma^*}{\partial h_j}\left(\frac{d\psi_{\gamma i}}{dt}+\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha\gamma}\psi_{\alpha i}\right)\right]dt\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\Big|_0^t\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial y_\alpha^*}{\partial h_j}\psi_{\alpha i}\qquad(3.27)$$

так как функции $\psi_{\alpha i}$ удовлетворяют уравнениям (3.3). Заметим, что производные $\partial y_\alpha^*/\partial h_j$ не будут почти периодическими функциями t, так как величины y_α^* будут почти периодическими не при всех значениях h_i, а лишь при таких, которые удовлетворяют уравнениям (3.5). Вследствие этого правые части (3.27) не обращаются в нуль. Но мы имеем тождественно

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^*\psi_{\alpha i}=\sum_{\alpha=1}^n X_\alpha'(t,\varphi,0)\psi_{\alpha i}$$

откуда вытекает

$$\frac{1}{t}\int_0^t\left(\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial y_\alpha^*}{\partial h_j}\psi_{\alpha i}+\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^*\frac{\partial\psi_{\alpha i}}{\partial h_j}\right)=\frac{\partial}{\partial h_i}\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{\alpha=1}^n X_\alpha'(t,\varphi,0)\psi_{\alpha i}\,dt$$

и, следовательно, на основании (3.4)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial y_\alpha^*}{\partial h_j}\psi_{\alpha i}=\frac{\partial P_i(h_1,\ldots,h_k)}{\partial h_j}$$

так как функции $\psi_{\alpha i}$ будут периодическими при любых значениях h_i и поэтому функции $\partial\psi_{\alpha i}/\partial h_j$ будут также периодическими и, следовательно, ограниченными. Отсюда и из (3.27) убеждаемся в справедливости (3.23).

Переходим теперь к вычислению A_{ijr}. Для этого заметим, что величины $\varphi_{\gamma r}$ удовлетворяют уравнениям в вариациях, т. е. уравнениям (3.17), при $X_\alpha'=0$. Поэтому, сравнивая (3.25) с (3.26), убеждаемся, что величины A_{ijr} получатся из величин A_{ij}, если в последних положить $X_\alpha'=0$, что на основании (3.23) дает $A_{ijr}=0$. Таким образом, принимая во внимание (3.24), мы можем считать доказанным, что функции A_i имеют вид (3.22), причем выполняются соотношения (3.23).

3°. Так как по условию теоремы уравнение (3.6) не имеет нулевого корня, то определитель величин A_{ij} отличен от нуля. Вследствие этого мы можем, не нарушая общности рассуждений, предположить в (3.22) $A_{i0}=0$ и уравнения (3.21) принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{dM_i}{dt}&=\mu\left(\frac{\partial P_i}{\partial h_1}M_1+\cdots+\frac{\partial P_i}{\partial h_k}M_k\right)+\mu^2B_i(t,M,z,\mu)\qquad(i=1,\ldots,k)\\ \frac{dz_j}{dt}&=q_{j1}z_1+\cdots+q_{jm}z_m+F_j(t)+\mu Z_j(t,M,z,\mu)\qquad(j=1,\ldots,m)\end{aligned}\qquad(3.28)$$

Мы будем искать почти периодическое решение этих уравнений методом последовательных приближений. Примем в первом приближении $M_i = M_i^{(1)} = 0$, а в качестве первого приближения $z_j^{(1)}$ величин z_j примем почти периодическое решение уравнений

$$\frac{dz_j^{(1)}}{dt} = q_{j1} z_1^{(1)} + \ldots + q_{jm} z_m^{(1)} + F_j(t)$$

Дальнейшие приближения $M_i^{(p)}$, $z_j^{(p)}$ $(p > 1)$ определим при помощи уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dM_i^{(p)}}{dt} &= \mu\left(\frac{\partial P_i}{\partial h_1} M_1^{(p)} + \cdots + \frac{\partial P_i}{\partial h_k} M_k^{(p)}\right) + \mu^2 B_i(t, M^{(p-1)}, z^{(p-1)}, \mu) \\ \frac{dz_j^{(p)}}{dt} &= q_{j1} z_1^{(p)} + \cdots + q_{jm} z_m^{(p)} + F_j(t) + \mu Z_j(t, M^{(p-1)}, z^{(p-1)}, \mu) \end{aligned} \tag{3.29}$$

По свойству корней уравнений (3.6) и (3.13) каждая из систем уравнений

$$\frac{dM_i}{dt} = \mu\left(\frac{\partial P_i}{\partial h_1} M_1 + \cdots + \frac{\partial P_i}{\partial h_k} M_k\right) + f_i(t)$$

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1} z_1 + \cdots + q_{jm} z_m + F_j(t)$$

допускает одно и только одно почти периодическое решение при любом выборе почти периодических функций f_i, F_j. Следовательно, система (3.29) единственным образом определяет последовательность почти периодических функций $M_i^{(p)}$, $z_j^{(p)}$.

Заметим, что из первой группы уравнений (3.29) вытекают неравенства $|M_i^{(p)}| < \mu L B$, где B — верхний предел функций $|B_i|$, а L — независящая ни от μ, ни от B_i постоянная. Вследствие этого доказательство сходимости последовательностей $M_i^{(p)}$, $z_j^{(p)}$ проводится совершенно так же, как и доказательство сходимости последовательности $y_s^{(k)}$ для уравнений (2.11) в § 2 (при этом члены, соответствующие Y_s, сейчас отсутствуют).

Полученному почти периодическому решению отвечает, как это уже отмечалось выше, почти периодическое решение системы (1.1), что и завершает доказательство теоремы II.

§ 4. Квазилинейные системы. Мы предполагали, что в уравнениях (1.1) порождающее решение является периодическим. Для систем квазилинейных можно сделать, однако, более общее предположение, что порождающее решение является также почти периодическим. Пусть предложена квазилинейная система вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \cdots + p_{sn} x_n + f_s(t) + \mu X_s'(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

где p_{sj} — непрерывные периодические функции t периода ω, f_s — непрерывные почти периодические функции t, а X_s' — функции такого же типа, как и в уравнениях (1.1). Рассмотрим порождающую систему

$$\frac{dx_s^\circ}{dt} = p_{s1} x_1^\circ + \cdots + p_{sn} x_n^\circ + f_s(t) \tag{4.2}$$

и допустим сначала, что характеристическое уравнение системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n \qquad (4.3)$$

не имеет корней с модулями, равными единице. В этом случае система (4.2) при любом выборе почти периодических функций f_s допускает одно и только одно почти периодическое решение $x_s^\circ(t)$, которое мы и примем за порождающее. Этому изолированному порождающему решению отвечает одно и только одно почти периодическое решение системы (4.1), определяемое как предел последовательности $x_s^{(p)}$, где $x_s^{(p)}$ — почти периодическое решение системы $(p = 1, 2, \ldots,)$

$$\frac{dx_s^{(p)}}{dt} = p_{s1}x_1^{(p)} + \cdots + p_{sn}x_n^{(p)} + f_s(t) + \mu X_s'(t, x_1^{(p-1)}, \ldots, x_n^{(p-1)}, \mu)$$

Доказательство сходимости дано в § 2 для более общей системы (2.5). При этом относительно X_s' достаточно предположить, что они удовлетворяют условиям Коши-Липшитца по отношению к x_j и μ и для всех x_j и μ они являются почти периодическими функциями t, ряды Фурье которых не обязательно содержат конечное число членов[1].

Допустим теперь, что порождающая система (4.2) допускает семейство почти периодических решений, зависящее от k произвольных параметров. Для этого прежде всего необходимо, чтобы характеристическое уравнение системы (4.3) имело по крайней мере k корней с модулями, равными единице. Мы будем предполагать, что таких корней имеется ровно k и что каждому кратному корню такого рода отвечает число групп решений уравнений (4.3), равное кратности этого корня. Относительно остальных корней характеристического уравнения системы (4.3) мы будем предполагать, что их модули отличны от единицы. При таком предположении система (4.3) имеет ровно k почти периодических решений, которые мы обозначим через $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{sk}$. При этом в отличие от функций, обозначенных теми же буквами в предыдущем параграфе, величина φ_{si} будут представлять собой произведения чисто периодических функций периода ω и чисто периодических множителей вида $\exp(\sqrt{-1}\alpha t)$, где α — вещественно. При сделанных предположениях система, сопряженная с (4.3), имеет также ровно k почти периодических решений $\psi_{s1}, \ldots, \psi_{sk}$, где функции ψ_{si} имеют такую же структуру, как и φ_{si}. Будем при этом, не нарушая общности, считать, что $\varphi_{1i}\psi_{1j} + \cdots + \varphi_{ni}\psi_{nj} = \delta_{ij}$. Далее необходимо еще предположить, что $f_s(t)$ таковы, что выражения

$$\int_0^t \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(t)\psi_{\alpha i}\, dt \qquad (i = 1, \ldots, k) \qquad (4.4)$$

[1] Такой же результат получен в вышедшей при подготовке этой работы к печати статье Г. И. Бирюка [4]. После сдачи работы в печать вышла еще одна статья Г. И. Бирюка, в которой исследуется также рассматриваемый ниже случай, когда характеристическое уравнение системы (4.3) имеет корни с модулями, равными единице (Г. И. Бирюк предполагает, что коэффициенты p_{js} постоянны). *Прим. при корректуре.*

ограничены и, следовательно, представляют собой почти периодические функции. Сделанные предположения необходимы и достаточны, как это показано в [3], для того, чтобы порождающая система (4.2) допускала почти периодическое решение, зависящее от k произвольных постоянных.

Это решение имеет вид:

$$x_s^\circ = \varphi_s(t, M_1, \ldots, M_k) = x_s^*(t) + M_1\varphi_{s1} + \ldots + M_k\varphi_{sk} \tag{4.5}$$

где M_i — произвольные постоянные, а x_s^* — какое-нибудь частное почти периодическое решение порождающей системы.

Будем поступать теперь с системой (4.1) так же, как и с системой (1.1) в предыдущем параграфе. Заметим, однако, что система (4.1) уже имеет вид (3.8) и поэтому в преобразовании (3.7) нет необходимости. Вследствие этого дальнейшие преобразования справедливы для любого порождающего решения в отличие от предыдущего параграфа, где для возможности этих преобразований необходимо было предположить, что параметры порождающего решения связаны уравнениями (3.5). Необходимо также отметить, что уравнения (4.1) имеют более общий вид, чем уравнения (3.8). В частности, функции $X_s'(t, x_1, \ldots, x_n, \mu)$ не будут квадратичными относительно $x_1, \ldots, x_n$. Следуя методу § 3, сделаем в уравнениях (4.1) замену:

$$\xi_i = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi_{\alpha i}, \qquad \eta_j = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi_{\alpha j}^* \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, m = n-k \end{pmatrix}$$

где $\psi_{\alpha j}^*$ — периодические функции периода ω, выбранные таким образом, чтобы преобразованные уравнения имели вид:

$$\begin{gathered} \frac{d\xi_j}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha \psi_{\alpha i} + \mu \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha'(t, x_1, \ldots, x_n, \mu)\psi_{\alpha i} \qquad (i = 1, \ldots, k) \\ \frac{d\eta_j}{dt} = q_{j1}\eta_1 + \cdots + q_{jm}\eta_m + f_j^*(t) + \mu F_j(t, \xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_m, \mu) \\ (j = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{4.6}$$

Здесь

$$f_j^*(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha \psi_{\alpha j}^*, \qquad F_j = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha' \psi_{\alpha j}^*$$

и q_{jr} — постоянные, для которых уравнение (3.13) не имеет корней с вещественными частями, равными нулю.

Для возможности дальнейших преобразований, указанных в предыдущем параграфе, необходимо еще предположить, что функции f_s и X_s таковы, что имеют место соотношения

$$\int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0)\psi_{\alpha i}\, dt = P_i(M_1, \ldots, M_k)\, t + u_i(t, M_1, \ldots, M_k)$$

где

$$P_i(M_1, \ldots, M_k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, 0)\psi_{\alpha i}\, dt$$

и u_i — почти периодические функции t. Это условие будет, например, всегда выполняться для наиболее часто встречающегося на практике случая, когда функции f_s и X_s' будут полиномами относительно $x_1, \ldots, x_n$ и ряды Фурье их относительно t состоят из конечного числа членов. Но указанное условие может выполняться и при значительно более общих предположениях.

Преобразуем теперь уравнения (4.6) при помощи подстановки

$$\xi_i = M_i + \int_0^t \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha \psi_{\alpha i}\, dt + \mu u_i, \qquad \eta = \eta_j^\circ(t) + \mu z_j$$

где M_i и z_j — новые переменные, а $\eta_j^\circ(t)$ — почти периодическое решение системы

$$\frac{d\eta_j}{dt} = q_{j1}\eta_1 + \cdots + q_{jm}\eta_m + f_j^*(t)$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} &= \mu P_i(M_1, \ldots, M_k) + \mu^2 B_i(t, M, z, \mu) \\ \frac{dz_j}{dt} &= q_{j1}z_1 + \cdots + q_{jm}z_m + F_j(t) + \mu Z_j(t, M, z, \mu) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

где функции B_i и Z_j в некоторой области изменения переменных $M_1, \ldots, M_k, Z_1, \ldots, Z_m, \mu$ почти периодичны относительно t и удовлетворяют относительно указанных переменных условиям Коши-Липшитца, а F_j — почти периодические функции t. Полученные уравнения имеют такой же вид, как и уравнения (3.21). Необходимо, однако, отметить, что функции P_i не будут, вообще говоря, линейными, так как функции X_s' не имеют структуры (3.9).

Таким образом, задача свелась к определению почти периодических решений уравнений (4.7). Эти последние будут действительно иметь почти периодическое решение, если уравнения (3.5) имеют решение

$$M_i = M_i^\circ$$

для которого уравнение (3.6) не имеет корней с нулевыми вещественными частями. Действительно, полагая в (4.7)

$$M_i = M_i^\circ + \mu N_i$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} &= \mu\left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial M_1}\right)_0 N_1 + \cdots + \left(\frac{\partial P_i}{\partial M_k}\right)_0 N_k\right] + \\ &\quad + \mu B_i(t, M^\circ, z, 0) + \mu^2 B_i^*(t, N, z, \mu) \\ \frac{dz_j}{dt} &= q_{j1}z_1 + \cdots + q_{jm}z_m + F_j(t) + \mu Z_j^*(t, N, z, \mu) \end{aligned} \tag{4.8}$$

лишь незначительно отличающиеся от уравнений (3.28). Уравнения (4.8), подобно уравнениям (3.28), допускают почти периодическое решение, определяемое как предел последовательностей $N_i^{(p)}, z_j^{(p)}$, где $N_i^{(p)}$ и $z_j^{(p)}$ —

почти периодическое решение системы

$$\frac{dN_i^{(p)}}{dt}=\mu\left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial M_1}\right)N_1^{(p)}+\cdots+\left(\frac{\partial P_i}{\partial M_k}\right)_0 N_k^{(p)}\right]+$$
$$+\mu B_i(t,\,M^\circ,\,z^{(p)},\,\rho)+\mu^2 B_i^*(t,\,N^{(p-1)},\,z^{(p-1)},\,\mu)$$
$$\frac{dz_j^{(p)}}{dt}=q_{j1}z_1^{(p)}+\cdots+q_{jm}z_m^{(p)}+F_j(t)+\mu Z^*(t,\,N^{(p-1)},\,z^{(p-1)},\,\mu)$$
$$(p=1,\,2,\,\ldots)$$

причем

$$\frac{dN_i^\circ}{dt}=\mu\left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial M_1}\right)_0 N_1^\circ+\cdots+\left(\frac{\partial P_i}{\partial M_k}\right)_0 N_k^\circ\right]+\mu B_i(t,\,M^\circ,\,z^\circ,\,0)$$
$$\frac{dz_j^\circ}{dt}=q_{j1}z_1^\circ+\cdots+q_{jm}z_m^\circ+F_j(t)$$

Сходимость этих последовательностей доказывается так же, как в § 2.

Полученное почти периодическое решение системы (4.1) соответствует теореме II. Однако система (4.1) и ее частный случай — система (3.8) а следовательно, также и система (1.1) имеют и другие почти периодические решения, не охватываемые теоремой II. Но прежде чем перейти к исследованию этих решений, мы установим критерии устойчивости и неустойчивости для уже полученных почти периодических решений.

§ 5. Критерии устойчивости найденных почти периодических решений. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема III. Если при выполнении условий теоремы II все корни уравнения (3.6), а также $n-k$ характеристических показателей порождающего решения[1] имеют отрицательные вещественные части, то рассматриваемое в этой теореме почти периодическое решение при достаточно малом μ асимптотически устойчиво. Напротив, если вещественная часть хотя бы одной из указанных величин положительна, то рассматриваемое почти периодическое решение неустойчиво.

Доказательство. Задача сводится к исследованию устойчивости почти периодических решений (3.28) или (4.8), если система квазилинейна. Мы будем исходить из уравнений (4.8) как более общих. Пусть $N_i^*(t)$, $z_j^*(t)$ — почти периодическое решение этой системы. Приняв это решение за невозмущенное, составим по обычным правилам уравнения возмущенного движения, для чего положим

$$N_i=N_i^*(t)+\varphi_i,\qquad z_j=z_j^*(t)+\psi_j$$

Будем иметь

$$\frac{d\varphi_i}{dt}\left[\left(=\mu\frac{\partial P_i}{\partial M_1}\right)_0\varphi_1+\cdots+\left(\frac{\partial P_i}{\partial M_k}\right)_0\varphi_k\right]+\mu\left[B_i(t,\,M^\circ,\,z^*+\psi,\,0)-\right.$$
$$\left.-B_i(t,\,M^\circ,\,z^*,\,0)\right]+\mu^2\left[B_i^*(t,\,N^*+\varphi,z^*+\psi,\,\mu)-B_i^*(t,\,N^*,\,z^*,\,\mu)\right]\tag{5.1}$$
$$\frac{d\psi_j}{dt}=q_{j1}\psi_1+\cdots+q_{jm}\psi_m+\mu\left[Z_j^*(t,\,N^*+\varphi,\,z^*+\psi,\,\mu)-Z_t^*(t,\,N^*,\,z^*,\,\mu)\right]$$

[1] В случае квазилинейных систем $\div(n-k)$ характеристических показателей системы (4.3).

Так как по условию вещественные части корней уравнений

$$|q_{jr} - \delta_{jr}\rho| = 0, \qquad \left|\left(\frac{\partial P_i}{\partial M_j}\right)_0 - \delta_{ij}\lambda\right| = 0 \tag{5.2}$$

отличны от нуля, то по хорошо известной теореме Ляпунова существуют две квадратичные формы $V_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ и $V_2(\psi_1, \ldots, \psi_m)$, для которых

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi_i}\left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial M_1}\right)_0 \varphi_1 + \cdots + \left(\frac{\partial P_i}{\partial M_{k0}}\right)\varphi_k\right] = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_i^2$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial V_2}{\partial \psi_j}(q_{j1}\psi_1 + \cdots + q_{jm}\chi_m) = -\sum_{j=1}^{k} \psi_j^2$$

При этом, если вещественные части всех корней уравнений (5.2) имеют отрицательные вещественные части, то обе формы V_1 и V_2 будут определенно-положительны. Но если хотя бы одно из уравнений (5.2) имеет корни с положительными вещественными частями, то хотя бы одна из форм V_1 или V_2 может принимать отрицательные значения. Рассмотрим теперь функцию

$$V = \frac{1}{\mu} V_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) + aV_2(\psi_1, \ldots, \psi_m)$$

где a — положительное число, и составим ее производную по времени в силу уравнений (5.1). Будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = &-\sum_{i=1}^{k} \varphi_i^2 - a\sum_{j=1}^{m} \psi_j^2 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi_i}[B_i(t, M^\circ, z^* + \psi, 0) - B_i(t, M^\circ, z^*, 0)] + \\ &+ \mu \sum_{i=1}^{k} \frac{dV_1}{\partial \varphi_i}[B_i^*(t, N^* + \varphi, z^* + \psi, \mu) - B_i^*(t, N^*, z^*, \mu)] + \\ &+ \mu a \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial V_2}{\partial \psi_i}[Z_j^*(t, N^* + \varphi, z^* + \psi, \mu) - Z_j^*(t, N^*, z^*, \mu)]\end{aligned} \tag{5.3}$$

Так как выполняются неравенства

$$|B_i(t, M^\circ, z^* + \psi, 0) - B_i(t, M^\circ, z^*, 0)| < A\sum_{j=1}^{m} |\psi_j|$$

$$|B_i^*(t, N^* + \varphi, z^* + \psi, \mu) - B_i^*(t, N^*, z^*, \mu)| < B\left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi_i| + \sum_{j=1}^{m} |\psi_j|\right)$$

$$|Z_j^*(t, N^* + \varphi, z^* + \psi, \mu) - Z_j^*(t, N^*, z^*, \mu)| < C\left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi_i| + \sum_{j=1}^{m} |\psi_j|\right)$$

где A, B и C — некоторые постоянные, то, как легко видеть, при μ достаточно малом и при a достаточно большом выражение (5.3) будет определенно-отрицательным.

Установив это, допустим сначала, что вещественные части всех корней уравнений (5.2) отрицательны. Тогда функция V будет определенно-положительной и на основании теоремы Ляпунова невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. Допустим теперь, что хотя бы одно из уравнений (5.2) имеет корни с положительной вещественной частью. В этом случае функция V может принимать отрицательные значения и на основании теоремы Ляпунова невозмущенное движение неустойчиво. Таким образом, теорема полностью доказана.

§ 6. Другие почти периодические решения систем, рассмотренных в § 3 и 4. Системы, рассмотренные в § 3 и 4, могут иметь почти периодические решения, отличные от тех, которые даются теоремой II. К исследованию этих решений мы сейчас и переходим. Будем предполагать, что рассматриваемые системы уже преобразованы к переменным M_i и z_j, т. е. имеют вид (3.21) или (4.7). Будем рассматривать для определенности системы (4.7) как более общие. Отбросив в этих уравнениях члены более высоких порядков, получим систему первого приближения:

$$\frac{dM_i}{dt} = \mu P_i(M_1, \ldots, M_k), \quad \frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + \cdots + q_{jm}z_m + F_j(t) \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Пусть $z_j^\circ(t)$ — всегда существующее и единственное почти периодическое решение второй группы этих уравнений. Допустим, что первая группа этих уравнений имеет квазистатическое решение: $M_i = M_i^\circ$, т. е. что $P_i(M_1^\circ, \ldots, M_k^\circ) = 0$. В этом случае вся система (6.1) имеет почти периодическое решение: $M_i = M_i^\circ$, $z_j = z_j^\circ(t)$. Если при этом выполняются условия теоремы II относительно корней уравнения (3.6), то и полная система (4.7) при достаточно малом μ будет иметь почти периодическое решение, первым приближением которого и будет решение M_i°, $z_j^\circ(t)$. Но система (6.1) может иметь и другие почти периодические решения, которые соответствуют другим неквазистатическим решениям первой группы этих уравнений. Эти решения могут быть также приняты как исходные при построении почти периодических решений полной системы (4.7). В частности, на практике могут представиться следующие важные случаи.

1°. Допустим, что первая группа уравнений (6.1) имеет семейство периодических[1] решений

$$M_i = f_i(\mu t, H_1, \ldots, H_l) \tag{6.2}$$

зависящее от $l \leqslant k$ произвольных параметров, так что вся система (6.1) имеет такое же семейство почти периодических решений. Покажем, как, исходя из этого семейства, можно при некоторых условиях построить почти периодическое решение полной системы (4.7). Пусть

$$\frac{dM_i}{dt} = r_{i1}M_1 + \cdots + r_{ik}M_k \qquad \left(r_{ij} = r_{ij}(t) = \frac{\partial P_i(f_1, \ldots, f_k)}{\partial f_j} \right) \tag{6.3}$$

система в вариациях для решения (6.2) первой группы уравнений (6.1). Характеристическое уравнение системы (6.3) имеет l корней, равных единице. Мы будем предполагать, что остальные $k - l$ корней этого уравне-

[1] Если функции P линейны, что имеет место для уравнений (3.21), то можно предположить, что эти решения являются почти периодическими.

ния имеют модули, отличные от единицы. Для этого, в частности, необходимо, чтобы период решения (6.2) не зависел от параметров H_j.

Система в вариациях (6.3) имеет l периодических решений

$$f_{ip} = \frac{\partial f_i(\mu t, H_1, \ldots, H_l)}{\partial H_p} \qquad (p = 1, \ldots, l) \tag{6.4}$$

и, следовательно, система, ей сопряженная, также имеет l периодических решений, которые мы обозначим через $F_{i1}, \ldots, F_{il}$; при этом предполагаем

$$\sum_i F_{\nu j} f_{ip} = \delta_{jp}$$

При сделанных предположениях система (4.7), если для нее уравнения (6.1) рассматривать как порождающую систему, аналогична системе (1.1) при предположениях § 3, и мы можем для нее получить теорему, аналогичную теореме II. Мы будем при этом предполагать, что для уравнений (4.7) выполняются общие условия, которым удовлетворяют исходные системы, рассмотренные в § 3 и 4. А именно мы будем предполагать, что функции P_i имеют по переменным $M_1, \ldots, M_k$ производные второго порядка, а функции B_i по переменным $M_1, \ldots, M_k, z_1, \ldots, z_m, \mu$ — производные первого порядка, удовлетворяющие условиям Коши-Липшитца. Относительно функций Z_j достаточно предположить, что они удовлетворяют по переменным M_i, z_r, μ условиям Коши-Липшитца. Относительно t функции B_i и Z_j почти периодичны. Будем предполагать, что

$$\int_0^t \sum_{\alpha=1}^{k} B_\alpha(t, f, z^\circ, 0) F_{\alpha p}\, dt = Q_p(H_1, \ldots, H_l)\, t + \Phi_p(t, H_1, \ldots, H_l) \qquad (p = 1, \ldots, l) \tag{6.5}$$

где Q_p — постоянные, а Φ_p — почти периодические функции времени. При этом, очевидно,

$$Q_p(H_1, \ldots, H_l) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{k} B_\alpha(t, f, z^\circ, 0) F_{\alpha p}\, dt \tag{6.6}$$

Подвергнем систему (4.7) преобразованиям, аналогичным рассмотренным в § 3 и 4. Прежде всего, если функции P_i не линейны, приведем рассматриваемую систему к квазилинейному виду, для чего положим

$$M_i = f_i + \mu N_i \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

Уравнения (4.7) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} &= \mu(r_{i1}N_1 + \cdots + r_{ik}N_k) + \mu B_i(t, f, z, 0) + \mu^2 B_i^*(t, N, z, \mu) \\ \frac{dz_j}{dt} &= q_{j1}z_1 + \cdots + q_{jm}z_m + F_j(t) + \mu Z_j^*(t, N, z, \mu) \end{aligned} \tag{6.7}$$

где функции B_i^* и Z_j^* удовлетворяют по переменным $N_1, \ldots, N_k$, $z_1, \ldots, z_m$, μ условиям Коши-Липшитца и при этом

$$B_i^*(t, N, z, 0) = \tag{6.8}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \frac{\partial^2 P_i(f_1, \ldots, f_k)}{\partial f_\alpha \partial f_\beta} N_\alpha N_\beta + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial B_i(t, f, z, 0)}{\partial f_\alpha} N_\alpha + \left(\frac{\partial B_i(t, f, z, \mu)}{\partial \mu}\right)_{\mu=0}$$

Введем теперь в уравнения (6.7) вместо переменных N_i переменные $\xi_1^*, \ldots, \xi_l^*, \eta_1^*, \ldots, \eta_{k-l}^*$ при помощи подстановки:

$$\xi_p^* = \sum_{\alpha=1}^{k} N_\alpha F_{\alpha p}, \qquad \eta_q^* = \sum_{\alpha=1}^{k} N_\alpha F_{\alpha q}^* \qquad \begin{pmatrix} p = 1, \ldots, l \\ q = 1, \ldots, k-l \end{pmatrix}$$

где $F_{\alpha q}^*$ — некоторые периодические функции t, которые можно выбрать таким образом, чтобы преобразованная система приняла вид:

$$\frac{d\xi_p^*}{dt} = \mu \sum_{\alpha=1}^{k} B_\alpha(t, f, z, 0) F_{\alpha p} + \mu^2 \sum_{\alpha=1}^{k} B_\alpha^*(t, N, z, \mu) F_{\alpha p} \qquad (p = 1, \ldots, l) \quad (6.9)$$

$$\frac{d\eta_q^*}{dt} = \mu (a_{q1}\eta_1^* + \ldots + a_{q,\,k-l}\eta_{k-l}^*) + \qquad (q = 1, \ldots, k-l)$$

$$+ \mu \sum_{\alpha=1}^{k} B_\alpha(t, f, z, 0) F_{\alpha q}^* + \mu^2 C_q(t, \xi^*, \eta^*, z, \mu)$$

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + \cdots + q_{jm}z_m + F_j(t) + \mu D_j(t, \xi^*, \eta^*, z, \mu) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

где функции C_q и D_j почти периодичны относительно t и удовлетворяют по переменным $\xi_1^*, \ldots, \xi_l^*, \eta_1^*, \ldots, \eta_{k-l}^*, z_1, \ldots, z_m, \mu$ условиям Коши-Липшитца, величины a_{qr} являются постоянными и притом такими, что уравнение

$$| a_{qr} - \delta_{qr}\varkappa | = 0 \qquad (6.10)$$

не имеет корней с равными нулю вещественным частями.

Выберем теперь в решении (6.2) параметры $H_1, \ldots, H_l$ таким образом, чтобы выполнялись уравнения

$$Q_p(H_1, \ldots, H_l) = 0 \qquad (p = 1, \ldots, l) \qquad (6.11)$$

и допустим, что при этом уравнение

$$\left| \frac{\partial Q_p}{\partial H_r} - \delta_{pr}\lambda \right| = 0 \qquad (6.12)$$

не имеет корней с равными нулю вещественными частями. Тогда система

$$\frac{d\xi_p^*}{dt} = \mu \sum_{\alpha=1}^{k} B_\alpha(t, f, z, 0) F$$

$$\frac{d\eta_q^*}{dt} = \mu (a_{q1}\eta_1^* + \cdots + a_{q,\,k-l}\eta_{k-l}^*) + \mu \sum_{\alpha=1}^{k} B_\alpha(t, f, z, 0) J_{\alpha q}^*$$

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + \cdots + q_{jm}z_m + F\ (t)$$

получающаяся из (6.9) отбрасыванием членов высших порядков, имеет на основании (6.5) почти периодическое решение

$$\xi_p^* = \xi_p^{*\circ}(t) = R_p + \mu\Phi_p(t), \qquad \eta_q^* = \eta_q^*(t), \qquad z_j = z_{j1}^\circ(t)$$

где $\eta_q^{*\circ}$ — вполне определенные почти периодические функции, а R_p — произвольные постоянные.

В переменных N^i это решение имеет вид:

$$N_i^\circ = N_i^*(t) + R_1 f_{i1} + \cdots + R_l f_{il}$$

где N_i^* — частное почти периодическое решение уравнений

$$\frac{dN_i}{dt} = \mu(r_{i1}N_1 + \cdots + r_{ik}N_k) + \mu B_i(t, f, z^\circ, 0)$$

которые при выполнении условий (6.11) такое решение обязательно имеют.

Установив это, положим в (6.9)

$$\xi_p^* = \xi_p^{*\circ} + \mu^2 u_p^*(t, R_1, \ldots, R_l), \qquad \eta_q^* = \eta_q^{*\circ} + \mu v_q, \qquad z_j = z_j^\circ + \mu w_j$$

где

$$u_p^* = \int_0^t \sum_{\alpha=1}^k B_\alpha^*(t, N^\circ, z^\circ, 0) F_{\alpha p}\, dt - A_p^* t$$

$$A_p^* = A_p^*(R_1, \ldots, R_l) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^k B_\alpha^*(t, N^\circ, z^\circ, 0) F_{\alpha p}\, dt$$

и величины R_p, v_q, w_j принимаются за новые переменные. При этом мы предполагаем, что функции B_i, F_j, Z_j в уравнениях (4.7) таковы, что величины u_p^* получаются почти периодическими. Уравнения (6.9) после преобразования принимают вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dR_p}{dt} &= \mu^2 A_p^*(R_1, \ldots, R_l) + \mu^3 U_p(t, R, v, w, \mu) \qquad (p = 1, \ldots, l) \\
\frac{dv_q}{dt} &= \mu(a_{q1}v_1 + \cdots + a_{q,\,k-l}v_{k-l}) + \mu\varphi_q(t) + \mu f_q(t, w) + \\
&\quad + \mu^2 V_q(t, R, v, w, \mu) \quad (q = 1, \ldots, k-l) \qquad (6.13) \\
\frac{dw_j}{dt} &= q_{j1}w_1 + \cdots + q_{jm}w_m + \psi_j(t) + \mu M_j(t, R, v, w, \mu) \qquad (j=1, \ldots, m)
\end{aligned}$$

где функции φ_q, ψ_j, f_q, U_p, V_q, W_j почти периодичны относительно t, а относительно остальных входящих в них аргументов удовлетворяют условиям Коши-Липшитца.

Так же как и в § 3, легко доказать, исходя из соотношений (6.10), (6.8), (6.6) и (6.4), что функции $A_p^*(R_1, \ldots, R_l)$ линейны и при этом

$$\frac{\partial A_p}{\partial R_r} = \left(\frac{\partial Q_p}{\partial H_r}\right)$$

где скобки обозначают, что производные вычислены для тех значений H_r, для которых выполняются уравнения (6.11). Не нарушая общности, мы можем предположить, что функции A_p^* однородны, так что имеем

$$A_p^* = \left(\frac{\partial Q_p}{\partial H_1}\right) R_1 + \cdots + \left(\frac{\partial Q_p}{\partial H_l}\right) R_l$$

Полученные уравнения (6.13) допускают почти периодическое решение $R_p(t)$, $v_q(t)$, $w_j(t)$, определяемое как предел последовательности почти периодических решений $R_p^{(s)}$, $v_q^{(s)}$, $w_j^{(s)}$ уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dR_p^{(s)}}{dt} &= \mu^2 A^*(R_1^{(s)}, \ldots, R_l^{(s)}) + \mu^3 U_p(t, R^{(s-1)}, v^{(s-1)}, w^{(s-1)}, \mu) \\
\frac{dv_q^{(s)}}{dt} &= \mu(a_{q1}v_1^{(s)} + \cdots + a_{q,k-l}v_{k-l}^{(s)}) + \mu\varphi_q(t) + \mu f_q(t, w^{(s)}) + \\
&\qquad + \mu^2 V_q(t, R^{(s-1)}, v^{(s-1)}, w^{(s-1)}, \mu) \\
\frac{dw_j^{(s)}}{dt} &= q_{j1}w_1^{(s)} + \cdots + q_{jm}w_m^{(s)} + \psi_j(t) + \\
&\qquad + \mu W_j(t, R^{(s-1)}, v^{(s-1)}, w^{(s-1)}, \mu) \qquad (s = 1, 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

причем

$$R_p^\circ = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_q^\circ}{dt} &= \mu(a_{q1}v_1^\circ + \cdots + a_{q,k-l}v_{k-l}^\circ)\mu\varphi_q(t) + \mu f_q(t, w^\circ) \\
\frac{dw_j^\circ}{dt} &= q_{j1}w_1^\circ + \cdots + q_{jm}w_m^\circ + \psi_j(t)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Так как по условию уравнения (3.13), (6.10) и (6.12) не имеют корней с равными нулю вещественными частями, то каждая из систем (6.14) и (6.15) допускает одно и только одно почти периодическое решение. Сходимость процесса докажется так же, как и в § 2.

Переходя в полученном решении к старым переменным, мы получим почти периодическое решение уравнений (4.7), которое в первом приближении совпадает с решением $M_i = f_i$, $z_j = z_j^\circ(t)$ системы (6.1), вернее, с тем из этих решений, для которого параметры $H_1, \ldots, H_l$ удовлетворяют уравнениям (6.11). Этому решению отвечает почти периодическое решение исходных систем (1.1) и (4.1), отличающееся от уже найденных в § 3 и 4.

Допустим, что функции P_i в уравнениях (6.1) линейны. В этом случае все предыдущие рассуждения сохранят силу также и в том случае, когда решения (6.2) не периодичны, а почти периодичны. Случай, когда первая группа уравнений (6.1) линейна, как раз имеет место для уравнений (3.21).

2°. К рассмотренному в предыдущем пункте случаю приведется отыскание почти периодических решений системы (1.1) при выполнении условий теоремы II, за исключением условия относительно корней уравнения (3.6). А именно, предположим, что уравнение (3.6) имеет чисто мнимые корни, но не имеет корня, равного нулю.

В этом случае уравнения (1.1) также приведутся к виду (3.28), для которых, однако, нельзя будет найти почти периодическое решение приемом, указанным в § 3, так как система (3.29) не будет иметь почти периодических решений.

Однако в рассматриваемом случае для соответствующей первой группы уравнений (6.1) будет существовать семейство почти периодических решений и почти периодическое решение системы (3.28) можно будет найти по указанному в предыдущем пункте правилу.

§ 7. Некоторое обобщение принципа усреднения. Рассмотрим систему

$$\frac{dy_s}{dt} = \mu Y_s(t, y_1, \ldots, y_n, \mu) \tag{7.1}$$

где функции Y_s почти периодичны относительно t. Принцип усреднения, разработанный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, заключается, как известно, в том, что вместо системы (7.1) рассматривается усредненная система

$$\frac{dy_s}{dt} = \mu Y_s{}^\circ(y, \ldots, y_n) = \mu \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Y_s(t, y_1, \ldots, y_n, 0)\, dt \tag{7.2}$$

При этом показано[1], что при весьма общих предположениях относительно Y_s уравнения (7.2) могут быть использованы для приближенного вычисления решений уравнений (7.1) не только на конечном интервале изменения t, но и для приближенного вычисления основных стационарных решений, когда приходится рассматривать t на всей вещественной оси. В частности, показано, что стационарным квазистатическим решениям системы (7.2) соответствуют стационарные почти периодические решения системы (7.1).

К системе (7.1) приводятся многие важные задачи. В частности, к этому виду могут быть приведены уравнения (1.1) в том случае, когда порождающая система (1.2) имеет почти периодическое решение

$$x_s{}^\circ = \varphi_s(t, h_1, \ldots, h_n) \tag{7.3}$$

зависящее от n произвольных постоянных. При этом мы предполагаем, что не только функции X_s', но и функции X_s почти периодичны относительно t. Функциональный определитель $\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) / \partial(h_1, \ldots, h_n)$ предполагается, разумеется, отличным от нуля при любом значении t, для чего достаточно, чтобы он был отличным от нуля хотя бы для одного какого-нибудь значения $t = t_0$. Мы будем дополнительно предполагать, что этот определитель в некоторой области H изменения параметров h_s превосходит при любом t некоторое положительное число α. В таком случае система уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial h_i} \psi_{\alpha j} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, определяет систему почти периодических функций ψ_{sj}. Эти функции при всяком фиксированном j образуют частное почти периодическое решение системы линейных уравнений с почти периодическими коэффициентами

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{\partial X_1{}^\circ(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial \varphi_s} u_1 + \cdots + \frac{\partial X_n{}^\circ(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial \varphi_s} u_n$$

сопряженной с системой в вариациях уравнений (1.2) для решения (7.3).

---

[1] В работе [1] система (7.1) рассматривается не только в случае почти периодических Y_s, но и при более общих предположениях, что существуют пределы, фигурирующие в (7.2).

Будем теперь рассматривать соотношения (7.3) как преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $h_1, \ldots, h_n$ и выразим в этих новых переменных уравнения (1.1). Тогда, принимая во внимание, что функции φ_s являются решением уравнений (1.2), получим

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial h_\alpha} \frac{dh_\alpha}{dt} = \mu X_s'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \mu)$$

Отсюда

$$\frac{dh_s}{dt} = \mu \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \mu) \psi_{\alpha s} \tag{7.4}$$

Полученные уравнения имеют вид (7.1), и мы можем к ней применить все результаты Н. И. Боголюбова. Отсюда, в частности, получается важное дополнение к теореме II § 3.

Допустим, что при выполнении условий теоремы II, число k параметров h_i равно n. Тогда эта теорема остается справедливой, если не только функции X_s', но и функции X_s и порождающее решение φ_s являются произвольными почти периодическими функциями t при условии, что $\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) / \partial(h_1, \ldots, h_n) > \alpha > 0$.

В самом деле, на основании (3.4) значения параметров h_i, удовлетворяющие уравнениям (3.5), определяют квазистатическое решение усредненной системы (7.4). Этому решению отвечает, на основании результатов Н. Н. Боголюбова, почти периодическое решение полной системы (7.4) при указанных общих предположениях относительно X_s'.

Однако во многих важных случаях, в частности, во всех тех, которые явились предметом настоящего исследования, уравнения движения не могут быть приведены к виду (7.1), но они могут быть приведены к виду

$$\frac{dy_i}{dt} = \mu Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_m, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{7.5}$$

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1} z_1, + \cdots + q_{jm} z_m + f_j(t) + \mu z_j(t, y, z, \mu) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

где все входящие в правые части функции почти периодичны относительно t, а q_{jr} — постоянные такие, что все собственные значения матрицы $\| q_{jr} \|$ имеют отличные от нуля вещественные части.

Для уравнения (7.5) примем в качестве усредненной системы уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \mu P_i(y_1, \ldots, y_k) = \mu \lim_{i \to \infty} \frac{1}{t} \int_0 Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, z_1^\circ, \ldots, z_m^\circ, 0)\, dt$$

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1} z_1 + \cdots + q_{jm} z_m + f_j(t)$$

где $z_j^\circ = z_j^\circ(t)$ — единственное почти периодическое решение второй группы этих уравнений. Из настоящей работы вытекает, что при достаточно широких предположениях почти периодическим решениям усредненных уравнений, соответствующим либо квазистатическим, либо периодическим (входящим в состав семейств, зависящих от произвольных постоянных) решениям первой группы этих уравнений, соответствуют при достаточно малом μ почти периодические решения полной системы (7.5). В этом и заключается обоснование сформулированного обобщенного принципа усреднения.

§ 8. **О практическом вычислении полученных почти периодических решений.** Действительное вычисление найденных выше почти периодических решений легко осуществляется и приводит к сравнительно простым выкладкам лишь в том случае, когда рассматриваемая система квазилинейна и коэффициенты p_{sj} в уравнениях (4.1) постоянны. В общем же случае уравнений (1.1) необходимо знать общее решение уравнений в вариациях порождающей системы, для чего необходимо знать не только порождающее решение, но общий интеграл порождающей системы. Для практики, однако, часто достаточно знать нулевое приближение искомого почти периодического решения. Если порождающее решение будет изолированным, то оно и является этим нулевым приближением. Если же порождающее решение принадлежит семейству и ищется почти периодическое решение, определяемое теоремой II, то необходимо еще произвести определение параметров порождающего решения, для чего необходимо составить уравнения (3.5), т. е. вычислить функции (3.4). Для этого необходимо знать функции ψ_{sj}, т. е. периодические решения системы (3.3), сопряженной с системой в вариациях (2.2). Эти функции могут быть сразу определены, если для порождающей системы (1.2) известно k первых интегралов вида

$$F_i(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) = \text{const}$$

где F_i либо вовсе не содержат t, либо являются периодическими функциями последнего периода ω. В самом деле, соотношения

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F_i(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial \varphi_\alpha} y_\alpha = \text{const}$$

являются, как известно, первыми интегралами уравнений в вариациях (2.2). Но тогда мы можем положить

$$\psi_{si} = \frac{\partial F_i(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial \varphi_s}$$

так как эти функции периодичны и являются решениями уравнений, сопряженных с уравнениями в вариациях.

Поступила 11 IX 1954

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН УССР, 1945.
2. Малкин И. Г. К теории периодических решений Пуанкаре. ПММ, т. XII, вып. 6, 1949.
3. Малкин И. Г. О резонансе в квазигармонических системах. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
4. Бирюк Г. И. Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. XCVI, вып. 1, 1954.