Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ДАВЛЕНИЕ ШТАМПА, БЛИЗКОГО В ПЛАНЕ К КРУГОВОМУ, НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В. И. Моссаковский

(Москва)

1. На упругое полупространство $z \leqslant 0$ давит штамп, поверхность которого после вдавливания определяется уравнением $z = f$, а область контакта S близка к кругу. Относительно этой области будем предполагать, что она имеет центр симметрии, луч, проведенный из центра симметрии, пересекает границу только в одной точке.

Для решения задачи об определении давления под подошвой штампа без учета сил трения необходимо найти значения функции $p(\rho, \varphi) = u_z'(\rho, 0, \varphi)$ в области S, причем гармоническая в полупространстве $z \leqslant 0$ функция $u(\rho, z, \varphi)$ определяется граничными условиями

$$u(\rho, 0, \varphi) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\, p(\rho,\varphi) \text{ в } S, \qquad u_z'(\rho, 0, \varphi) = 0 \quad \text{вне } S \tag{1.1}$$

Эту задачу здесь решаем приближенно: именно будем удовлетворять условию (1.1) не во всей области S, а только внутри окружности, вписанной в S; условию вне S удовлетворяем точно [1].

Начало координат поместим в центре области контакта. Пусть в полярных координатах граница области контакта определяется уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, при этом через $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$ будем обозначать наибольшее и наименьшее расстояния от центра до границы области контакта.

Предположим, что функция $u(\rho, z, \varphi)$ может быть разложена в ряд

$$u(\rho, z, \varphi) = u_0(\rho, z) + u_{c1}(\rho, z)\cos\varphi + u_{s1}(\rho, z)\sin\varphi + \cdots \tag{1.2}$$

Очевидно, что все $u_n(\rho, 0)$ могут быть определены при $\rho \leqslant \rho_{\min}$, а $u_{nz}'(\rho, 0)$ при $\rho \geqslant \rho_{\max}$ (здесь и в дальнейшем c и s опускаются в тех случаях, когда утверждение нужно отнести и к u_{cn} и к u_{sn}).

Функции $u_n(\rho, 0)$, $u_{nz}'(\rho, 0)$ могут быть представлены в виде контурных интегралов [1]:

$$\begin{aligned} u_n(\rho, 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_n(s)\, \frac{2^{2-s}\,\Gamma(1/2 - 1/2 s + 1/2 n)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s + 1/2 n)}\, \rho^{s-1}\, ds \\ u_{nz}'(\rho, 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_n(s)\, \frac{2^{1-s}\,\Gamma(1 - 1/2 s + 1/2 n)}{\Gamma(1/2 s + 1/2 n)}\, \rho^{s-2}\, ds \end{aligned} \tag{1.3}$$

[1] На возможность такой приближенной постановки задачи о давлении штампа, близкого в плане к круговому, указал М. Я. Леонов в 1950 г. при чтении курса «Контактные задачи теории упругости» в Днепропетровском государственном университете.

В дальнейшем, наряду с пространством с координатами x, y, z или ρ, z, φ, будем рассматривать вспомогательную плоскость, в которой введены координаты ξ, η. В полуплоскости $\eta \leqslant 0$ введем гармоническую функцию $Q_n(\xi, \eta)$ так, чтобы при $0 < \xi < \infty$ выполнялось условие

$$Q_{n\eta}'(\xi, 0) = u_{nz}'(\xi, 0)\,\xi \tag{1.4}$$

Кроме того, будем считать, что $Q_n(\xi, \eta)$ является симметричной функцией относительно ξ при нечетном n и антисимметричной при четном.

Рассмотрим сначала случай четного n. Функции $Q_{n\xi}'(\xi, 0)$, $Q_{n\eta}'(\xi, 0)$ можно представить в виде [1]

$$Q_{n\xi}'(\xi, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_n(s)\frac{2^{2-s}\,\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 s)}\,\xi^{s-1}\,ds \tag{1.5}$$

$$Q_{n\eta}'(\xi, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_n(s)\frac{2^{2-s}\,\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)}\,\xi^{s-1}\,ds$$

Для выполнения условия (1.4) нужно положить

$$F_n(s)\frac{\Gamma(1 - 1/2 s + 1/2 n)}{\Gamma(1/2 s + 1/2 n)} = 2\Phi_n(s)\frac{\Gamma(1 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)} \tag{1.6}$$

Разложив функцию $f(x, y)$ в ряд Фурье:

$$f(x, y) = f_0(\rho) + f_{c1}(\rho)\cos\varphi + f_{s1}(\rho)\sin\varphi + \cdots \tag{1.7}$$

вместо первого условия (1.1) получим

$$u_n(\rho, 0) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} f_n(\rho) \quad \text{при} \quad \rho \leqslant \rho_{\min} \tag{1.8}$$

Подставив в (1.8) выражение для $u_n(\rho, 0)$ в виде контурного интеграла из (1.3) и пользуясь (1.6), будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_n(s)\frac{2^{1-s}\,\Gamma(1 - 1/2 s)\,\Gamma(1/2 - 1/2 s + 1/2 n)\,\Gamma(1/2 s + 1/2 n)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s)\,\Gamma(1/2 + 1/2 s + 1/2 n)\,\Gamma(1 - 1/2 s + 1/2 n)}\,\rho^{s-1}\,ds =$$
$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} f_n(\rho) \qquad (\rho \leqslant \rho_{\min}) \tag{1.9}$$

Используя формулу

$$\int_0^t \rho^{2\alpha-1}(t^2 - \rho^2)^{\beta-1}\,d\rho = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,t^{2\alpha+2\beta-2} \tag{1.10}$$

из (1.9) после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_n(s)\frac{2^{2-s}\,\Gamma(1/2 - 1/2 s)}{\Gamma(1/2 s)}\,\xi^{s-1}\,ds = \frac{E}{2(1-\nu^2)\pi}\,\varphi_n(\xi) + p_n(\xi) \quad (|\xi| < \rho_{\min}) \tag{1.11}$$

Здесь

$$\varphi_n(\xi) = \frac{C_n(\xi)}{\xi^n} + \int_\xi^{\rho_{\min}} T_n\left(\frac{\xi}{t}\right) C_n(t)\,\frac{dt}{t^{n+1}} \tag{1.12}$$

$$C_n(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{\xi^2 - z^2}}\,\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{f_n(\rho)\,\rho\,d\rho}{\sqrt{z^2 - \rho^2}} \tag{1.13}$$

$$T_n(t) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots(n-2)} + \frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-3)}{2\cdot 4\cdots(n-4)}\,t^2 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-2)}\,t^{n-2}$$

$$p_n(\xi) = \alpha_{n0} + \alpha_{n2}\xi^2 + \alpha_{n4}\xi^4 + \cdots + \alpha_{n,\,n-2}\,\xi^{n-2}$$

с неизвестными коэффициентами Сравнив (1.11) и (1.5), получим

$$Q_{n\xi}'(\xi, 0) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\,\varphi_n(\xi) + p_n(\xi) \qquad (-\rho_{\min} < \xi < \rho_{\min})$$

причем функция $\varphi_n(\xi)$ в интервале $0 < \xi < \rho_{\min}$ определяется из формул (1.11), (1.12), после чего значения в интервале $(-\rho_{\min} < \xi < 0)$ определяются из того условия, что функция $\varphi_n(\xi)$ является четвертой.

Для нечетных n, представив $Q_{n\xi}'(\xi, 0)$, $Q_{n\eta}'(\xi, 0)$ в виде

$$Q_{n\xi}'(\xi, 0) = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_n(s)\,\frac{2^{2-s}\Gamma(1-{}^1/_2 s)}{\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2 s)}\,\xi^{s-1}\,ds \tag{1.14}$$

$$Q_{n\eta}'(\xi, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_n(s)\,\frac{2^{2-s}\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2 s)}{\Gamma({}^1/_2 s)}\,\xi^{s-1}\,ds$$

и положив

$$F_n(s)\,\frac{\Gamma(1-{}^1/_2 s + {}^1/_2 n)}{\Gamma({}^1/_2 s + {}^1/_2 n)} = 2\Phi_n(s)\,\frac{\Gamma({}^1/_2 - {}^1/_2 s)}{\Gamma({}^1/_2 s)} \tag{1.15}$$

получим формулы, аналогичные (1.11), (1.12):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_n(s)\,\frac{2^{2-s}\Gamma(1-{}^1/_2 s)}{\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2 s)}\,\xi^{s-1}\,ds = \frac{E}{2(1-\nu^2)\pi}\,\varphi_n(\xi) + p_n(\xi) \tag{1.16}$$

где

$$\varphi_n(\xi) = \frac{C_n(\xi)}{\xi^n} + \int\limits_{\xi}^{\rho_{\min}} T_n\!\left(\frac{\xi}{t}\right) C_n(t)\,\frac{dt}{t^{n+1}} \tag{1.17}$$

причем

$$C_n(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int\limits_0^{\xi} \frac{z^{n+2}dz}{\sqrt{\xi^2 - z^2}}\,\frac{d}{dz}\int\limits_0^{z} \frac{f_n(\rho)\,d\rho}{\sqrt{z^2-\rho^2}}$$

$$T_n(t) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdots(n-3)}\,t + \frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-4)}{2\cdot 4\cdots(n-5)}\,t^2 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-3)}\,t^{n-2} \tag{1.18}$$

$$p_n(\xi) = \alpha_{n1}\xi + \alpha_{n3}\xi^2 + \cdots + \alpha_{n,\,n-2}\,\xi^{n-3}$$

с неизвестными коэффициентами. Сравнив (1.16) и (1.14), получим

$$Q_{n\xi}'(\xi, 0) = \frac{E}{2(1-\nu^2)\pi}\,\varphi_n(\xi) + p_n(\xi) \qquad (-\rho_{\min} < \xi < \rho_{\min})$$

При этом функция $\varphi_n(\xi)$ в интервале $0 < \xi < \rho_{\min}$ определяется по формулам (1.17), после чего значения в интервале $-\rho_{\min} < \xi < 0$ находятся из того условия, что $\varphi_n(\xi)$ при нечетном n является нечетной.

Введем функцию $Q(\xi, \eta, \varphi)$ соотношением

$$Q(\xi, \eta, \varphi) = Q_0(\xi, \eta) + Q_{c1}(\xi, \eta)\cos\varphi + Q_{s1}(\xi, \eta)\sin\varphi + \cdots \tag{1.19}$$

Все слагаемые правой части (1.19) являются гармоническими в полуплоскости $\eta \leqslant 0$ функциями. Таким образом, $Q(\xi, \eta, \varphi)$ — гармоническая в полуплоскости $\eta \leqslant 0$ функция при любом значении параметра φ. Из (1.4) имеем $Q_n'(\xi, 0, \varphi) = \xi u_z'(\rho, 0, \varphi)\,|_{\rho=\xi}$

и, следовательно, для нахождения $Q(\xi, \eta, \varphi)$ получаем условия

$$\begin{aligned} &(1) \qquad Q_\eta'(\xi, 0, \varphi) = 0, \qquad |\xi| \geqslant \rho(\varphi) \\ &(2) \qquad Q_\xi'(\xi, 0, \varphi) = \frac{E}{2(1-\nu^2)\pi} q(\xi, \varphi) + G(\xi, \varphi) \quad (\xi) < \rho_{\min} \end{aligned} \tag{1.20}$$

где

$$q(\xi, \varphi) = \varphi_0(\xi) + \varphi_{c1}(\xi)\cos\varphi + \varphi_{s1}(\xi)\sin\varphi + \cdots \tag{1.21}$$

$$G(\xi, \varphi) = \alpha_{c20}\cos 2\varphi + \alpha_{s20}\sin 2\varphi + \xi\alpha_{c31}\cos 3\varphi + \xi\alpha_{s31}\sin 3\varphi + \cdots \tag{1.22}$$

с неизвестными коэффициентами.

В случае когда $\rho(\varphi) = \rho_{\min}$ (что соответствует круговой области контакта), этих условий достаточно для нахождения значений $Q_\eta'(\xi, 0, \varphi)$ при $|\xi| < \rho_{\min}$ и, следовательно, для определения давления под штампом.

В общем случае будем решать задачу приближенно, а именно плавно продолжим значения $q(\xi, \varphi)$ из интервала $-\rho_{\min} < \xi < \rho_{\min}$ в остальную часть интервала $-\rho(\varphi) < \xi < \rho(\varphi)$.

Таким образом, для каждого значения φ мы приходим к смешанной задаче теории потенциала для полуплоскости. Эта задача решается эффективно [2], причем интересующие нас значения $Q_\eta'(\xi, 0, \varphi)$ в интервале определяются по формуле

$$Q_\eta'(\xi, 0, \varphi) = \qquad \text{при} -\rho(\varphi) < \xi < \rho(\varphi) \tag{1.23}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho(\varphi)^2 - \xi^2}} \int\limits_{-\rho(\varphi)}^{\rho(\varphi)} \frac{\sqrt{\rho(\varphi)^2 - t^2}}{t - \xi} \left[\frac{E}{2(1-\nu^2)\pi} q(t, \varphi) + G(t, \varphi)\right] dt + \frac{H(\varphi)}{\sqrt{\rho(\varphi)^2 - \xi^2}}$$

где $H(\varphi)$ — неизвестная функция от φ. Учитывая (1.4), получаем

$$p(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi\rho\sqrt{\rho(\varphi)^2 - \rho^2}} \int\limits_{-\rho(\varphi)}^{\rho(\varphi)} \frac{\sqrt{\rho(\varphi)^2 - t^2}}{t - \rho} \left[\frac{E}{2(1-\nu^2)\pi} q(t, \varphi) + G(t, \varphi)\right] dt + $$

$$+ \frac{H(\varphi)}{\rho\sqrt{\rho(\varphi)^2 - \rho^2}} \tag{1.24}$$

Функция $p(\rho, \varphi)$ в окрестности нулевой точки в случае гладкого штампа может быть разложена в ряд Тейлора

$$p(x, y) = A + Bx + Cy + \cdots \tag{1.25}$$

Следовательно, в разложении $p(\rho, \varphi)$ по степеням ρ должны отсутствовать члены $\rho^m \cos n\varphi$, $\rho^m \sin n\varphi$, когда $m < n$. Эти условия дают бесконечную систему алгебраических линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов α_{ik} и коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $H(\varphi)$.

2. В виде примера рассмотрим давление эллиптического в плане штампа на упругое полупространство. Уравнение границы в полярных координатах имеет вид:

$$\rho(\varphi) = \left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{-1/2} \tag{2.1}$$

где a и b — полуоси эллипса, и следовательно, имеет место

$$\left(1 - \frac{\rho^2}{\rho^2(\varphi)}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} \tag{2.2}$$

Так как в окрестности нулевой точки

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}=1+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}+\cdots \tag{2.3}$$

то в тех случаях, когда $p(\rho,\varphi)$ выражается формулой вида

$$p(\rho,\varphi)=\frac{F(\rho,\varphi)}{\sqrt{1-\rho^2/\rho^2(\varphi)}} \tag{2.4}$$

для выполнения условия (1.25) необходимо и достаточно, чтобы в разложении $F(\rho,\varphi)$ отсутствовали члены $\rho^m\cos n\varphi$, $\rho^m\sin n\varphi$, когда $m<n$.

Рассмотрим случай $f(\rho,\varphi)=C$, где C — постоянная. Из формул (1.12) (1.13), (1.21) получим

$$q(\xi,\varphi)=C \tag{2.5}$$

Интегралы вида

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,f(t)}{t-\xi}\,dt$$

легко вычисляются в конечном виде [2] (стр. 405), когда $f(t)$ — полином. В частности, имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,t^n}{t-\xi}\,dt=\xi^{n+1}-\frac{1}{2}\,\frac{\xi^{n-1}a^2}{1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{\xi^{n-3}a^4}{1\cdot 2}-\cdots \tag{2.6}$$

Полином в (2.6) оканчивается членом с ξ в первой или нулевой степени в зависимости от того, является число n четным или нечетным.

Из (1.24), воспользовались (2.5), (2.6), получим

$$p(\rho,\varphi)=\frac{CE}{2(1-\nu^2)\pi\rho(\varphi)}\,\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2/\rho^2(\varphi)}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi\rho\sqrt{\rho(\varphi)^2-\rho^2}}\int\limits_{-\rho(\varphi)}^{\rho(\varphi)}\frac{\sqrt{\rho(\varphi)^2-t^2}\,G(t,\varphi)\,dt}{t-\rho}+\frac{H(\varphi)}{\rho\sqrt{\rho(\varphi)^2-\rho^2}} \tag{2.7}$$

Учитывая (2.6), функцию $G(t,\varphi)$ возьмем в виде

$$G(t,\varphi)=\alpha_{c20}\cos 2\varphi+\alpha_{s20}\sin 2\varphi+\alpha_{c40}\cos 4\varphi+\alpha_{s40}\sin 4\varphi+\cdots \tag{2.8}$$

а $H(\varphi)$ положим равной нулю, тогда получим

$$p(\rho,\varphi)=\frac{E}{2\pi(1-\nu^2)\pi\sqrt{1-\rho^2/\rho^2(\varphi)}}\,\frac{c+\beta_{c20}\cos 2\varphi+\beta_{s20}\sin 2\varphi+\cdots}{\rho(\varphi)} \tag{2.9}$$

Для выполнения условия (1.25) должно выполняться

$$\frac{C+\beta_{c20}\cos 2\varphi+\beta_{s20}\sin 2\varphi+\cdots}{\rho(\varphi)}=D \tag{2.10}$$

Отсюда найдем

$$D=\frac{2\pi C}{J},\qquad J=\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{-1/2}d\varphi \tag{2.11}$$

Окончательно получаем

$$p(x,y)=\frac{CE}{(1-\nu^2)J}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y_2}{b^2}\right)^{-1/2} \tag{2.12}$$

В случае $f(\rho,\varphi)=A\rho\cos\varphi$ имеем

$$q(\xi,\varphi)=8A\xi\cos\varphi \tag{2.13}$$

В функции $G(t, \varphi)$ сохраним лишь члены, содержащие t в первой степени, а $H(\varphi)$ положим равной нулю. Для $p(\rho, \varphi)$ будем иметь

$$p(\rho, \varphi) = \frac{4E}{(1-\nu^2)\pi\sqrt{1-\rho^2/\rho^2(\varphi)}} \frac{\rho(A\cos\varphi + \gamma_{c31}\cos 3\varphi + \gamma_{s31}\sin 3\varphi + \cdots)}{\rho(\varphi)} \tag{2.14}$$

Для выполнения условия (1.25) должно выполняться

$$\frac{A\cos\varphi + \gamma_{c31}\cos 3\varphi + \gamma_{s31}\sin 3\varphi + \cdots}{\rho(\varphi)} = B\cos\varphi + C\sin\varphi \tag{2.15}$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \pi A &= B\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi + C\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \\ 0 &= B\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi + C\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi \end{aligned} \tag{2.16}$$

Отсюда имеем

$$C = 0, \qquad B = \frac{\pi A}{J_1} \qquad \left(J_1 = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{-1/2} d\varphi\right)$$

Окончательно для $p(x, y)$ получим формулу

$$p(x, y) = \frac{4EA}{(1-\nu^2)J_1}\, x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} \tag{2.17}$$

В общем случае, когда $f(x, y)$ представляет собой полином степени n от x и y, $q(\xi, \varphi)$ также представляет полином степени n от ξ. В функции $G(t, \varphi)$ нужно сохранить лишь члены, содержащие t в степени n и ниже. Таким образом, $p(x, y)$ в этом случае будет иметь вид:

$$p(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} P_n(x, y) \tag{2.18}$$

где $P_n(x, y)$ — некоторый полином степени n.

С другой стороны, в работе Л. А. Галина [3] показано, что давление, представленное формулой (2.19) под подошвой эллиптического в плане штампа, может возникать лишь в том случае, когда поверхность этого штампа после вдавливания определяется уравнением $z = f^*(x, y)$ где $f^*(x, y)$ — полином степени n. Поскольку полиномы $f(x, y)$ и $f^*(x, y)$ равны при $\rho \leqslant \rho_{\min}$, то ясно, что они и вообще равны. Следовательно, изложенный метод дает точное решение задачи об определении давления под подошвой эллиптического в плане штампа в том случае, когда $(f\,x, y)$ является полиномом, В частности, формулы (2.12), (2.17) совпадают с точными решениями

Поступила 1 VII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
3. Галин Л. А. О давлении штампа эллиптической формы в плане на упругое полупространство. ПММ, т. XI, в. 2, 1947.