Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ОСЕВОГО СЖАТИЯ И ВНЕШНЕГО НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Х. М. Муштари, А. В. Саченков

(Казань)

В работе рассматривается определение верхней границы критических нагрузок при совместном действии на цилиндрическую или коническую оболочку кругового сечения сжимающего усилия, равномерно распределенного по торцевым сечениям, и всестороннего внешнего нормального давления. Исходными уравнениями служат дифференциальные уравнения нейтрального равновесия конических оболочек [1], применявшиеся к решению задачи устойчивости конической оболочки при кручении и при осевом сжатии [2]; при решении задачи удается удовлетворить всем граничным условиям в отличие от работы[3], где на выполнение граничных условий не обращается внимание, и работы [4], в которой выполнена лишь часть граничных условий при решении задачи по методу Галеркина. Для определения критического внешнего нормального давления при одновременном действии продольного сжатия приводятся приближенные формулы. Заметим, что формулы, предложенные в работе[5], не являются обоснованными и в ряде случаев могут привести к существенной погрешности в величине критической нагрузки.

1. Обозначения. Примем следующие обозначения: 2γ — угол конусности; r — расстояние по образующей от вершины конуса до точки срединной поверхности; r_0 — расстояние до меньшего из оснований; L — длина оболочки по образующей; $2h$ — толщина оболочки; φ — угол между аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета; n — число волн, образующихся по окружности при выпучивании оболочки; w — нормальное перемещение точки срединной поверхности при выпучивании; p_0 — внешнее нормальное давление, действующее как на боковую поверхность, так и на основания рассматриваемого отсека оболочки; T_0 — добавочное сжимающее усилие, приложенное к меньшему из торцевых нормальных сечений; T_{10}, T_{20} — погонные мембранные усилия до выпучивания, определяемые по безмоментной теории; T_1, T_2, S — дополнительные мембранные усилия, появляющиеся при выпучивании; ε_2 — дополнительное кольцевое удлинение; E — модуль упругости; σ — коэффициент поперечного расширения;

$$K = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}, \qquad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \quad \text{(жесткости обшивки)} \tag{1.1}$$

$$\tau = 1 + \frac{L}{r_0}, \qquad t = \ln\tau, \qquad m_1 = \frac{m\pi}{t} \quad (m\text{ — целое число})$$

$$R_0 = r_0 \operatorname{tg}\gamma, \qquad \nu = \frac{(1-\sigma)}{2}, \qquad \mu_1 = 1 - 2\nu^2 \tag{1.2}$$

$$\mu_2 = \nu^2 - 3\nu^4, \qquad \varphi_1 = \varphi\sin\gamma, \qquad n_1 = \frac{n}{\sin\gamma}\,.$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\nu h^2 (1-\tau^{2\nu-2})}{3r_0^2 \operatorname{ctg}^2\gamma (1-\sigma^2)(1-\nu)(\tau^{2\nu}-1)}, \qquad D' = \frac{(1+2\nu) Eh (\tau^{2\nu}-1)}{[\nu r_0 \operatorname{tg}^3\gamma (\tau^{(1+2\nu)}-1)]} \tag{1.3}$$

$$\lambda = \frac{T_0(1+2\nu)(1-\tau^{(2\nu-1)})}{p_0 R_0 (1-2\nu)(\tau^{(1+2\nu)}-1)}, \qquad \lambda_1 = \frac{0.5+\lambda[m_1^2+0.25(1+2\nu)^2]}{m_1^2}$$

$$\eta^2 = \frac{\varepsilon^2 (m_1^2+\nu^2) m_1^4}{[m_1^2+(1-\nu)^2][m_1^4+\mu_1 m_1^2+\mu_2]}$$

$$K' = \frac{D'(m_1^2+0.25(1+2\nu)^2)(m_1^4+\mu_1 m_1^2+\mu_2)}{[m_1^4(m_1^2+\nu^2)]} \tag{1.4}$$

$$\delta_1 = \sqrt[4]{3}\,\frac{1}{\sqrt{\eta}}$$

2. Выполнение краевых условий и интегрирование уравнения совместности деформаций. Дифференциальные уравнения после введения функции напряжения будут [1]

$$Dr\,\Delta\Delta w - \operatorname{ctg}\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - r\left[T_{10}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + T_{20}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2}\right)\right] = 0 \tag{2.1}$$

$$r\Delta\Delta f + 2Eh \operatorname{ctg}\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0$$

где

$$\Delta(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(\ )}{\partial \varphi_1^2}$$

$$T_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2}, \qquad T_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \qquad S = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\right) \tag{2.2}$$

$$T_{10} = -\frac{p_0 r \operatorname{tg}\gamma}{2} - \frac{T_0 r_0}{r}, \qquad T_{20} = -p_0 r \operatorname{tg}\gamma \tag{2.3}$$

Если концы оболочки шарнирно закреплены, то на краях $r = r_0$ и $r = r_0 + L$ должны удовлетворяться условия

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2}\right) = 0 \tag{2.4}$$

$$T_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0$$

Введем следующие подстановки:

$$z = \ln\frac{r}{r_0}, \qquad f = F\cos n_1\varphi_1, \qquad w = e^{\nu z} w_1 \cos n_1\varphi_1, \qquad t = \ln\left(1+\frac{L}{r_0}\right) \tag{2.5}$$

Тогда, учитывая (2.3), уравнения (2.1) приведем к виду

$$\frac{d^4F}{dz^4} - 4\frac{d^3F}{dz^3} + (4-2n_1^2)\frac{d^2F}{dz^2} + 4n_1^2\frac{dF}{dz} + (n_1^4-4n_1^2)F + $$
$$+ 2Ehr_0 \operatorname{ctg}\gamma e^{(1+\nu)z}\left[\frac{d^2w_1}{dz^2} + (2\nu-1)\frac{dw_1}{dz} + (\nu^2-\nu)w_1\right] = 0$$

$$e^{(\nu-4)z}\left\{\frac{d^4w_1}{dz^4} - 4(1-\nu)\frac{d^3w_1}{dz^3} + K_{1n}\frac{d^2w_1}{dz^2} + K_{2n}\frac{dw_1}{dz} + K_{3n}w_1 - \right.$$
$$-\frac{r_0\operatorname{ctg}\gamma}{D}e^{(1-\nu)z}\left(\frac{d^2F}{dz^2}-\frac{dF}{dz}\right) + \frac{p_0\operatorname{tg}\gamma}{D}r_0^3e^{3z}\left[\frac{1}{2}\frac{d^2w_1}{dz^2} + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{dw_1}{dz} - K_{4n}w_1\right] +$$
$$\left. + \frac{T_0r_0^2}{D}e^z\left[\frac{d^2w_1}{dz^2} + (2\nu-1)\frac{dw_1}{dz} + (\nu^2-\nu)w_1\right]\right\} = 0 \tag{2.6}$$

где

$$K_{1n} = 6\nu^2 - 12\nu + 4 - 2n_1^2.$$
$$K_{2n} = 4\nu^3 - 12\nu^2 + 8\nu + 4n_1^2(1-\nu) \tag{2.7}$$
$$K_{3n} = \nu^4 - 4\nu^3 + 4\nu^2 - n_1^2(4 - 4\nu + 2\nu^2) + n_1^4$$
$$K_{4n} = n_1^2 - \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\nu^2$$

Краевые условия (2.4) принимают вид:

$$w_1 = 0, \qquad \frac{d^2w_1}{dz^2} = 0 \tag{2.8}$$

при $z = 0$ и $z = t$

$$\frac{dF}{dz} - n_1^2F = 0, \qquad \frac{d^2F}{dz^2} - \frac{dF}{dz} = 0 \tag{2.9}$$

Решение краевой задачи ищем, задаваясь формой волнообразования

$$w_1 = A_0 \sin m_1 z \tag{2.10}$$

При этом краевые условия (2.8) будут выполняться.

Из первого уравнения системы (2.6) находим

$$F = A_1e^{n_1z} + A_2e^{-n_1z} + B_1e^{(n_1+2)z} + B_2e^{(2-n_1)z} +$$
$$+ 2A_0Ehr_0 \operatorname{ctg}\gamma e^{(1+\nu)z}(\Phi_{mn}\sin m_1z + \chi_{mn}\cos m_1z) \tag{2.11}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные,

$$\Phi_{mn} = [(m_1^2 + \nu - \nu^2)\varphi_{mn} - 4(\nu - 2\nu^2)m_1^2\psi_{mn}] : (\varphi_{mn}^2 + 16m_1^2\nu^2\psi_{mn}^2)$$
$$\chi_{mn} = m_1[(1-2\nu)\varphi_{mn} + 4\nu(m_1^2 + \nu - \nu^2)\psi_{mn}] : (\varphi_{mn}^2 + 16m_1^2\nu^2\psi_{mn}^2)$$
$$\varphi_{mn} = (m_1^2 + n_1^2)^2 - 2(1+\nu^2)n_1^2 + 2(1-3\nu^2)m_1^2 + (\nu^2-1)^2$$
$$\psi_{mn} = m_1^2 + n_1^2 + 1 - \nu^2 \tag{2.12}$$

Выполняя условия (2.9), приходим к системе уравнений для определения A_1, A_2, B_1 и B_2.

Как было показано в работе [1], принятые исходные уравнения применимы лишь в случае недлинной тонкой оболочки, выпучивание которой происходит с образованием значительного числа волн по окружности.

Поэтому при приближенном определении гиперболических членов выражения (2.11) можно положить

$$\operatorname{sh} n_1t \approx \operatorname{ch} n_1t$$

тем более что, как оказывается в дальнейшем, эти члены незначительно влияют на величину критической нагрузки. Таким образом, находим

$$A_1 \approx -\frac{\Phi_6 + n_1\Phi_5}{2(n_1^2 - n_1)\operatorname{sh} n_1t}e^{(1+\nu)t}, \qquad A_2 \approx \frac{\Phi_6 - n_1\Phi_5}{n_1^2 + n_1}$$
$$B_1 \approx \frac{\Phi_5}{2(n_1+1)\operatorname{sh} n_1t}e^{(\nu-1)t}, \qquad B_2 \approx \frac{\Phi_5}{n_1 - 1} \tag{2.13}$$

где

$$\Phi_5 = 0.25(\Phi_4 - n_1^2\chi_{mn}), \qquad \Phi_6 = 0.5(2\Phi_2 - n_1^2\chi_{mn} - \Phi_4)$$
$$\Phi_4 = (1+\nu)\Phi_2 + m_1\Phi_1, \qquad \Phi_3 = (1+\nu)\Phi_1 - m_1\Phi_2$$
$$\Phi_1 = (1+\nu)\Phi_{mn} - m_1\chi_{mn}, \qquad \Phi_2 = (1+\nu)\chi_{mn} + m_1\Phi_{mn} \tag{2.14}$$

3. Характеристическое уравнение. Подставляя (2.10) и (2.11) во второе уравнение системы (2.6), интегрируем это уравнение по методу Бубнова-Галеркина, умножая его на $e^{(2+\nu)z}\sin m_1 z\,dz$.

Таким образом, приходим к характеристическому уравнению

$$P-Q-R+T=0 \tag{3.1}$$

где

$$P=\frac{m_1\varepsilon^2\left[m_1^4+4(\nu-1)^2m_1^2-m_1^2K_{1n}+(1-\nu)K_{2n}+K_{3n}\right]}{m_1^2+(1-\nu^2)}$$

$$Q=\frac{p_0m_1}{D'}\left[\frac{0.5m_1^2-1.5\nu(1+\nu)-0.25+n_1^2}{m_1^2+0.25(1+2\nu)^2}+\frac{\lambda\left[m_1^2+3\nu(1-\nu)-0.5\right]}{m_1^2+0.25(1-2\nu)^2}\right]$$

$$\begin{aligned}R=\frac{4\nu}{(\tau^{2\nu}-1)}\Bigg\{&-\frac{(\Phi_6+n_1\Phi_5)e^{2\nu t}}{m_1^2+(n_1+\nu-1)^2}+\frac{(\Phi_6-n_1\Phi_5)}{m_1^2+(n_1+\nu-1)^2}+\\&+\frac{\Phi_5e^{2\nu t}(n_1+2)}{m_1^2+(n_1+1+\nu)^2}+\frac{\Phi_5(n_1-2)}{m_1^2+(n_1-1-\nu)^2}\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$T=\frac{m_1(\Phi_1-\Phi_3)+\nu(\Phi_4-\Phi_2)}{m_1^2+\nu^2}$$

Это уравнение можно сильно упростить для широкого класса тонких оболочек, удовлетворяющих условию

$$t=\ln\left(1+\frac{L}{r_0}\right)\leqslant 1,\qquad L\leqslant 1.72r_0$$

Тогда по (1.2) имеем $m_1^2\geqslant\pi^2$. Кроме того, для тонких недлинных оболочек $n_1^2\gg 1$. При этом, сохраняя лишь главные члены в выражениях величин (2.12), (2.14) и (3.2), имеем

$$\frac{R}{T}\approx\frac{4\nu\left[\sigma n_1^4-2\sigma n_1^3-m_1^2n_1^2+2(1-\sigma)m_1^4\right]}{m_1^2\left[m_1^2+(n_1+\nu+1)^2\right]\left[m_1^2+(n_1+\nu-1)^2\right]}$$

Вычисления по этой формуле с учетом выражения P и полученного в дальнейшем решения показывают, что, допуская погрешность в величине критической нагрузки на 2—3% в сторону ее завышения, величиной R в уравнении (3.1) можно пренебречь. В остальных членах уравнения также будем пренебрегать величинами порядка единицы по сравнению с n_1^2. Это дает дополнительную погрешность в 1—2%.

Заметим, что максимальная погрешность допускается на границе области, когда оболочка становится довольно длинной и для устойчивости нуждается в поперечных подкреплениях. С уменьшением t допускаемая погрешность быстро падает до 1—2%. Таким образом, критическую нагрузку будем определять из приближенного уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{p_0}{D'}\left(\frac{n_1^2+0.5m_1^2}{m_1^2+0.25(1+2\nu)^2}+\frac{\lambda m_1^2}{m_1^2+0.25(1-2\nu)^2}\right)=\\&=\frac{\varepsilon^2(m_1^2+n_1^2)^2}{m_1^2+(1-\nu)^2}+\frac{m_1^4+\mu_1m_1^2+\mu_2}{(m_1^2+n_1^2)^2(m_1^2+\nu^2)}\end{aligned} \tag{3.3}$$

В частном случае продольного сжатия $m_1^2 \gg 1$ и, учитывая обозначения (1.3) и (1.4) при $p_0 = 0$, находим

$$\frac{T_0(1+2\nu)(1-\tau^{(2\nu-1)})}{D'(1-2\nu)(\tau^{(1+2\nu)}-1)} = \frac{\varepsilon^2(m_1^2+n_1^2)^2}{m_1^2} + \frac{m_1^2}{(m_1^2+n_1^2)^2}$$

Следовательно, критическое сжимающее усилие равно

$$T_0 = \frac{(1-2\nu)}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \frac{\sqrt{KD(1-\sigma^2)(\tau^{2\nu}-1)(1-\tau^{(2\nu-2)})}}{R_0(1-\tau^{(2\nu-1)})} \tag{3.4}$$

Отклонение, даваемое этой формулой от аналогичной точной формулы, полученной Штаерманом, не превышает 4—5% при $t \leqslant 1$.

4. Определение критической нагрузки. Пользуясь обозначениями (1.4) и, кроме того,

$$\delta = \frac{m_1^2+n_1^2}{m_1} \tag{4.1}$$

уравнение (3.3) приводим к виду

$$p_0 = \frac{K'}{\lambda_1 - 1 + \delta / m_1}\left(\eta^2\delta^2 + \frac{1}{\delta^2}\right) \tag{4.2}$$

Из условия $\partial p_0 / \partial\delta = 0$ находим

$$\eta^2\delta^4 = \left[3 + \frac{2(\lambda_1-1)m_1}{\delta}\right] : \left[1 + 2(\lambda_1 - 1)\frac{m_1}{\delta}\right] \tag{4.3}$$

При этом путем простых, но довольно кропотливых вычислений можно показать, что $\partial p_0 / \partial m_1 > 0$.

Такое монотонное возрастание величины p_0 при увеличении m_1 объясняется тем, что величины K', λ_1 и η^2 мало изменяются при увеличении m_1, благодаря чему, как видно из (4.2), минимум p_0 достигается для каждого фиксированного δ при наибольшем из значений δ / m_1, допускаемых краевыми условиями. Поэтому

$$m = 1, \qquad m_1 = \pi / t \tag{4.4}$$

При $\lambda_1 = 1$ из (4.3) находим

$$\delta = \delta_1 = \sqrt[4]{3} : \sqrt{\eta} \tag{4.5}$$

Если $m_1^2 \gg 1$, это решение имеет место в случае, когда до выпучивания осевое напряжение равно кольцевому.

В общем случае

$$\delta = \frac{\delta_1}{1+\beta} \tag{4.6}$$

причем β удовлетворяет уравнению

$$\frac{2(1-\lambda_1)m_1}{\delta_1} = \frac{[1-(1+\beta)^4]}{(1+\beta)[1-{}^1/_3(1+\beta)^4]} \tag{4.7}$$

Отсюда следует, что

$$-0.2 \leqslant \beta \leqslant 0.2, \quad \text{если} \quad 0.86 \geqslant 2(1-\lambda_1)\frac{m_1}{\delta_1} \geqslant -2.93 \tag{4.8}$$

При этом за β можно принять меньший по модулю корень уравнения

$$\beta^2\left[9-4(1-\lambda_1)\frac{m_1}{\delta_1}\right]+\beta\left[6-2(1-\lambda_1)\frac{m_1}{\delta_1}\right]+2(1-\lambda_1)\frac{m_1}{\delta_1}=0 \tag{4.9}$$

а приближенное значение критического давления равно

$$p_{0,k}=1.31K'\eta^{3/2}m_1(1.33+2\beta^2):\left[1+\frac{m_1}{\delta_1}(\lambda_1-1)(1+\beta)\right] \tag{4.10}$$

Вблизи своего минимума значение p_0 изменяется медленно, поэтому критическое значение давления, определенного при β, найденном из (4.9), даже на границах области (4.8) отличается от его значения при β, удовлетворяющем условию минимизации (4.7), менее чем на 0.6%, хотя погрешность в величине β достигает 13%.

Для оболочек, удовлетворяющих условию

$$0.49\geqslant 2(1-\lambda_1)\frac{m_1}{\delta_1}\geqslant -0.83 \tag{4.11}$$

т. е. при $-0.1\leqslant\beta\leqslant 0.1$, допуская погрешность в сторону завышения около 1%, в (4.10) можно положить $\beta=0$. Таким образом, приходим к простой формуле

$$p_{0,k}=\frac{1.74K'm_1\eta^{3/2}}{1+(m_1/\delta_1)(\lambda_1-1)} \tag{4.12}$$

Здесь и в (4.10) величины K', m_1, η, δ_1 и λ_1 определяются по формулам (4.4), (4.5) и (1.1)—(1.4).

При $\lambda=0$, $\lambda_1=0.5$ отсюда получается следующая формула для случая всестороннего сжатия

$$p_{0,k}=\frac{1.74K'm_1\eta^{3/2}}{1-0.5m_1/\delta_1} \tag{4.13}$$

В частном случае цилиндрической оболочки радиуса R имеем

$$\gamma=0,\qquad t\approx\frac{L\sin\gamma}{R},\qquad m_1=\frac{\pi R}{L\sin\gamma},\qquad K'=\frac{2Eh}{R\sin^2\gamma}$$

$$\lambda_1=0.5+\lambda,\qquad \lambda=\frac{T_0}{p_0R},\qquad \eta=\frac{h\sin^2\gamma}{R\sqrt{3(1-\sigma^2)}}$$

По формуле (4.12) находим величину критического всестороннего давления при одновременном действии осевого сжимающего усилия T_0:

$$p_0=\frac{4.85Eh}{L(1-\sigma^2)^{3/4}}\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}:\left[1+\frac{1.82\sqrt{hR}}{L(1-\sigma^2)^{1/4}}\left(\frac{T_0}{p_0R}-0.5\right)\right] \tag{4.14}$$

причем должно выполнятся условие

$$0.265\geqslant(1-2\lambda)\frac{\sqrt{hR}}{L}\geqslant -0.45 \tag{4.15}$$

Заметим, что (4.14) равносильно уравнению

$$\frac{T}{T_{0,m}}+\frac{p_0}{p_{0,m}}=1 \tag{4.16}$$

где

$$T_{0m}=\frac{2.68Eh^2}{R\sqrt{(1-\sigma^2)}},\qquad p_{0m}=\frac{4.85Eh}{L(1-\sigma^2)^{3/4}}\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}:\left[1-\frac{0.91\sqrt{hR}}{L(1-\sigma^2)^{1/4}}\right] \tag{4.17}$$

Это последнее уравнение приближенно выполняется лишь при условии (4.15). Кроме того, необходимо учесть то обстоятельство, что оболочка может потерять устойчивость «хлопком» от осевого сжатия. Поэтому наши формулы не следует применять в том случае, когда суммарное осевое усилие $T_0 + {}^1/_2 p_0 R$ не меньше, чем нижняя граница критического осевого усилия $T_{1н}$, которая как известно [6], определяется по формуле

$$T_{1н}\approx\frac{0.78Eh^2}{R} \tag{4.18}$$

Пусть, далее, $T_0 + {}^1/_2 p_0 R \leqslant 0.78Eh^2/R$. Тогда по (4.16)

$$p_0 \geqslant p_{0m}\left(1-\frac{0.78Eh^2}{RT_{0m}}\right):\left(1-\frac{p_{0m}R}{2T_{0m}}\right) \tag{4.19}$$

Следовательно,

$$1-\frac{2T_0}{p_0R}\geqslant 2-\frac{1.56Eh^2(1-p_{0m}R/2T_{0m})}{p_{0m}R^2(1-0.78Eh^2/RT_{0m})}$$

или, учитывая (4.17), имеем, полагая $\sigma=0.3$ и пренебрегая во второстепенных членах hR/L^2 по сравнению с единицей:

$$(1-2\lambda)\frac{\sqrt{hR}}{L}\geqslant\frac{2.78\sqrt{hR}}{L}-0.42>-0.45$$

т. е. условие (4.15) выполняется.

Формула (4.12), определяющая критическое нормальное давление при одновременном действии осевого сжатия, может быть сильно упрощена при условии $m_1 \geqslant \pi$. При $0.25 \leqslant \sigma \leqslant 0.33$ (как это обычно имеет место для металлов) с учетом принятых обозначений после несложных вычислений и пренебрежений второстепенными членами она приводится к виду

$$p_{0k}=4.85\frac{(2-\sigma)(\tau^{(1-\sigma)}-1)^{1/4}(1-\tau^{-(1+\sigma)})^{3/4}}{\sqrt{1+\sigma}(1-\sigma^2)(\tau^{(2-\sigma)}-1)\ln\tau}\,\frac{E\operatorname{tg}\gamma\,(h/R_0)^{5/2}}{[1+\theta(\lambda-0.5)]} \tag{4.20}$$

где

$$\tau=1+\frac{L}{r_0},\qquad \lambda=\frac{(2-\sigma)T_0(1-\tau^{-\sigma})}{p_0R_0\sigma(\tau^{(2-\sigma)}-1)}$$

$$\theta=\frac{1.82}{\sqrt{1+\sigma}}\left\{\frac{[1-\tau^{-(1+\sigma)}]}{[\tau^{(1-\sigma)}-1]}\right\}^{1/4}\sqrt{\frac{h}{R_0}}\,\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\ln\tau} \tag{4.21}$$

Заметим, что при переходе от формулы (4.12) к упрощенной формуле (4.20) мы уменьшили критическое давление самое большее на 5% (при $t=1$), но формула (4.12) в свою очередь была выведена из характеристического уравнения (3.1) путем упрощений, завышающих искомое давление на 2—3%. Таким образом, формула (4.20) в конечном счете дает верхнюю границу критического давления с занижением, менее чем на 3%.

Кроме того, не следует забывать, что формула (4.12), а значит, и формула (4.20) выведены для области изменения параметров оболочки, определяемой неравенствами (4.11), которые после упрощения принимают вид:

$$0.49 \geqslant (1-2\lambda)\,\theta \geqslant -0.83 \qquad (4.22)$$

Поступила 2 VII 1954

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложенями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия Казанского физ.-мат. об-ва, 1938, т. XI; ПММ, т. II, вып. 4, 1939.
2. Муштари Х. М. Приближенное решение некоторых задач устойчивости тонкостенной конической оболочки кругового сечения. ПММ, т. VII, 1943.
3. Pflüger A. Stabilität dünner Kegelschalen. Ingenieur Archiv, Bd. VIII, 1937.
4. Трапезин И. И. Об устойчивости тонкостенной конической оболочки круглого сечения при нагрузках, симметричных относительно ее оси. Труды Московского ордена Ленина авиационного ин-та им. С. Орджоникидзе, № 17, 1952.
5. Ebner. Theoretische und experimentelle Untersuchung über das Einbeulen zylindrischer Tanks durch Unterdruck. Stahlbau, Bb. 21, H. 9, S. 153—159, 1952.
6. Michielsen H. E. The Behavior of thin cyrindrical shells after Buckling under axial compression. Journal of the aeronautical Sciences, vol. 15, 1948.