

О СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И МАЛЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

А. А. Ильюшин
(Москва)

В работе рассматриваются общие свойства соотношений между напряжениями и малыми деформациями в сплошных средах, которые в исходном состоянии являются квазиизотропными и однородными в окрестности каждой точки. Разработка теории пластичности при сложном нагружении, в частности, связана в первую очередь с выяснением этих свойств. Ранее были даны тензорно-линейные уравнения весьма общего типа, устанавливающие характер указанных соотношений^[1]. Однако уравнения столь сложной структуры были использованы лишь для доказательства единства различных теорий пластичности в случае простого нагружения, но для сложного нагружения вид их не упрощался.

Различные процессы нагружения элемента тела приобретают геометрическую наглядность, если вместо девиатора деформаций ввести вектор деформации в пятимерном евклидовом пространстве \mathcal{E}_5 . Направляющие тензоры деформаций, скоростей деформаций и т. п. приобретают смысл единичных векторов, связанных с траекторией нагружения, а внутренние геометрические параметры — длина дуги, кривизна и кручения траектории нагружения — становятся естественными числовыми характеристиками сложного нагружения. Ряд фактов свидетельствует о том, что связь между вектором напряжения и вектором деформации в \mathcal{E}_5 должна быть инвариантна относительно преобразований вращения или вращения и отражения координатного репера, и на этом основании формулируется постулат изотропии. Если естественный репер, аналогичный трехграннику Френе, при движении по траектории нагружения изменяется непрерывно, то получается простая связь между векторами напряжений и деформаций.

Далее обсуждаются опытные факты: истокообразный характер зависимости напряжений от деформаций; явление, называемое «запаздыванием», определяющее основное отличие механических свойств пластически деформируемых твердых тел от свойств вязкой жидкости. Они приводят к гипотезам, позволяющим дать в первом приближении простейшие формулировки основных соотношений теории пластичности при сложных нагружениях.

§ 1. Замечания о теориях пластичности. В связи с разработкой теории малых упруго-пластических деформаций и анализом опытных данных по проверке различных теорий пластичности было введено понятие простого нагружения, как процесса однородного деформирования первоначально квазиизотропного тела, в течение которого направляющий тензор деформаций во времени остается постоянным^[1]. Обозначая ∂_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) компоненты девиатора деформаций

$$\begin{aligned} \partial_{11} &= e_{xx} - e, & \partial_{12} &= \partial_{21} = \frac{1}{2} e_{xy} \\ \partial_{22} &= e_{yy} - e, & \partial_{23} &= \partial_{32} = \frac{1}{2} e_{yz} \\ \partial_{33} &= e_{zz} - e, & \partial_{31} &= \partial_{13} = \frac{1}{2} e_{zx} \end{aligned} \quad (1.1)$$

и ∂_u — их интенсивность:

$$\partial_u^2 = \sum_{i, j=1, 2, 3} \partial_{ij}^2 \quad (1.2)$$

направляющий тензор (или тензор подобия) запишем в виде $\vartheta_{ij}^* = \vartheta_{ij} / \vartheta_u$. Аналогично запишем направляющий тензор напряжений в виде $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} / \sigma_u$, причем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= X_x - \sigma, & \sigma_{12} &= \sigma_{21} = X_y \\ \sigma_{22} &= Y_y - \sigma, & \sigma_{23} &= \sigma_{32} = Y_z \\ \sigma_{33} &= Z_z - \sigma, & \sigma_{31} &= \sigma_{13} = Z_x \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\sigma_u^2 = \sum_{i, j=1, 2, 3} \sigma_{ij}^2$$

Отмечено, что для простого нагружения, когда $d\vartheta_{ij}^* / dt = 0$, направляющий тензор любой матрицы, получаемой путем любой линейной операции по параметру t над ϑ_{ij} , совпадает с ϑ_{ij}^* , например $\varepsilon_{ij}^* = \vartheta_{ij}^*$, где ε_{ij} — девиатор скоростей деформаций, ε_{ij}^* — его направляющий тензор:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{d\vartheta_{ij}}{dt}, \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_u}, \quad \varepsilon_u^2 = \sum_{i, j=1, 2, 3} \varepsilon_{ij}^2 \quad (1.4)$$

Обнаружено, что если $d\vartheta_{ij}^* / dt = 0$ или если $d\sigma_{ij}^* / dt = 0$, где t — время или другой взаимно однозначно связанный с временем параметр, то все тензорно-линейные теории пластичности (теории Сен-Венана, Леви, Мизеса, теория Хенки-Мизеса, теория Прандтля-Рейсса, теории Прагера и др.) тождественно совпадают между собой, находятся во вполне удовлетворительном согласии с опытом и образуют единую теорию малых упруго-пластических деформаций, основные законы которой выражаются формулами

$$\sigma_{ij}^* = \vartheta_{ij}^*, \quad \sigma = 3Ke, \quad \sigma_u = F(\vartheta_u) \quad (1.5)$$

Теоремой о простом нагружении установлено, что условия $\partial\vartheta_{ij}^* / \partial t = 0$, а следовательно, $\partial\sigma_{ij}^* / \partial t = 0$ будут выполнены в каждой точке неоднородно деформируемого тела с достаточной степенью точности, если произвольные в различных точках тела произвольной формы внешние нагрузки будут изменяться во времени пропорционально общему параметру, монотонно возрастающему со временем.

Связь между направляющими тензорами напряжений и деформаций или другими тензорами, указанным выше линейным образом составленными из девиатора деформаций, мы называем законом, устанавливающим направление течения. В теории течения Сен-Венана, Леви, Мизеса вопрос о направлении течения решается соотношением

$$\sigma_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^* \quad (1.6)$$

Для теорий течения смешанного типа характерное решение того же вопроса дается уравнением

$$\sigma_{ij}^* = \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} \right)^* \quad (1.7)$$

Недостаточность существующих теорий пластичности для произвольных процессов сложного нагружения отмечалась. Рассмотрим, например, малые деформации тонкостенной трубы из отожженной меди, подвергаемой растя-

жению и кручению. Удлиним трубу на 10% и, оставляя затем ее длину неизменной, начнем закручивать с некоторой угловой скоростью. Пока деформация сдвига остается весьма малой, осевое напряжение, очевидно, будет весьма значительным; между тем из теории течения (1.6) получаем, что оно должно сразу исчезнуть. Продолжая закручивание до деформаций порядка 0,3—0,6%, заметим, что осевое напряжение практически исчезнет, т. е. явление, отражаемое формулой (1.6), произойдет с запаздыванием; между тем по теории деформаций (1.5) осевое напряжение должно быть в 10—20 раз больше касательного. Значит, и формулы (1.5) и (1.6) существенно расходятся с данными опыта. Произведем другой опыт растяжения трубы с постоянной скоростью при одновременном действии крутящего момента. Заметим, что как угодно малому конечному крутящему моменту будет соответствовать определенная конечная скорость закручивания. Если мгновенно прекратить действие крутящего момента, продолжая растяжение, то скорость пластической деформации кручения исчезнет не мгновенно. Между тем из (1.7) следует, что скорость пластической деформации кручения сразу же обращается в нуль. Таким образом, выявляется неточность теорий течения смешанного типа.

Трудности разработки теории пластичности для общего случая сложного нагружения первоначально квазиизотропного тела вытекают из сложности физического явления. При простом нагружении направляющий тензор деформаций элемента тела остается неизменным во времени, главные оси деформаций и направления сдвигов октаэдрических площадок неизменны относительно физических частиц (кристаллитов). Конечно, и при простом нагружении в зернах различной кристаллической ориентации пластическая деформация наступает не одновременно и направления сдвигов различны. Но благодаря статистическому усреднению по совокупности большого числа зерен, составляющих элемент тела в смысле механики сплошной среды, и вследствие того, что пластическая деформация при простом нагружении сводится к сдвигам в одном и том же октаэдре, заключающем одни и те же зерна, получается естественное следствие: направления октаэдрических сдвигов и октаэдрических касательных напряжений совпадают, каково бы ни было сложное напряженное состояние элемента тела, при котором происходит простое нагружение.

При сложном нагружении элемента тела со временем [изменяется как самый октаэдр, т. е. его ориентация относительно физических частиц, так и направления сдвигов на его гранях, и потому вопрос о направлении течения сильно усложняется. Направляющий тензор напряжений теперь должен зависеть от истории изменения направляющего тензора деформаций и характеристик интенсивности деформаций. Однако вследствие первоначальной изотропии тела и его однородности и при сложном нагружении должна иметь место в некотором смысле инвариантность зависимостей между напряжениями и деформациями.

Чтобы выяснить свойства этих зависимостей, необходимо, кроме величин направляющих тензоров, ввести все другие величины, характеризующие процессы сложного нагружения.

§ 2. Вектор деформации и геометрическая трактовка процесса деформации. Идея представления деформации в виде вектора девятимерного пространства принадлежит Прагеру [2]. Однако, кроме наглядного представления о некоторых теориях пластичности, эта идея пока не давала существенных результатов. Между тем процессы пластических деформаций с нашей точки зрения могут быть [изображены и детально охарактеризованы в пятимерной гиперплоскости этого пространства, причем геометрические образы и параметры, а также аффинные преобразования в ней приобретают определенный физический смысл.

Пластические деформации определяются девятиатомом деформаций ε_{ij} (1.1), т. е. симметричной матрицей второго ранга, причем сумма диагональных элементов ее равна нулю

$$\sum_{i=1, 2, 3} \varepsilon_{ii} = 0 \quad (2.1)$$

Введем пятимерный ортогональный декартов репер E , т. е. пять взаимно ортогональных линейно независимых единичных векторов (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5), исходящих из общего начала координат O , и назовем вектором деформации в пятимерном евклидовом пространстве \mathcal{E}_5 величину

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^5 \varepsilon_j e_j \quad (2.2)$$

Рассмотрим произвольную физическую точку M в изучаемом нами теле и зафиксируем относительно физического элемента определенную систему ортогональных координат (x, y, z) реального пространства, т. е. будем считать, что эти оси не изменяются в процессе деформации. Пусть ε_{ij} (1.1) есть значение девятиатом деформаций в момент времени t относительно выбранной системы координат реального пространства.

Теорема 1. В пространстве \mathcal{E}_5 бесчисленным множеством способов может быть построен вектор деформации ε , тождественный девятиатому деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$, рассчитанному относительно фиксированной системы координат (x, y, z) .

Вектор $\varepsilon(t)$ и тензор $\varepsilon_{ij}(t)$ мы называем тождественными, если их основные квадратичные формы для всякого t тождественно совпадают и между их компонентами существуют взаимно однозначные соотношения. Таким образом, при условии (2.1) должно быть

$$\sum_{ij=1, 2, 3} \varepsilon_{ij}^2 \equiv \sum_{i=1} \varepsilon_i^2 \quad (2.3)$$

Поскольку $\varepsilon_{ij}(t)$, $i \neq j$ связаны между собой только соотношениями сопряженности $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, т. е. представляют три линейно независимые величины и произведения их в (2.3) не входят, то можно положить

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{12} \sqrt{2}, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{23} \sqrt{2}, \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_{31} \sqrt{2}.$$

После этого остается удовлетворить тождеству

$$\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \quad (2.4)$$

при условии (2.1). Произведя линейное преобразование

$$\varepsilon_{11} = a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{22} = a_{21} \varepsilon_1 + a_{22} \varepsilon_2$$

где a_{ij} не зависит от t , из (2.4) находим общее решение

$$\begin{aligned} \vartheta_{11} &= \vartheta_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\alpha \pm \frac{1}{6}\pi\right) + \vartheta_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\alpha \pm \frac{1}{6}\pi\right) \\ \vartheta_{22} &= \pm \vartheta_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \alpha \mp \vartheta_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

где α — произвольное число и выбор знаков произволен, т. е. в (2.5) можно взять всюду либо верхние, либо нижние знаки.

Решая (2.5) относительно ϑ_1 , ϑ_2 и учитывая выбранные значения ϑ_3 , ϑ_4 , ϑ_5 , находим следующие выражения компонент вектора деформаций (2.2):

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \vartheta_{11} \sqrt{2} \cos \alpha \pm \vartheta_{22} \sqrt{2} \sin\left(\alpha \pm \frac{1}{6}\pi\right) \\ \vartheta_2 &= \vartheta_{11} \sqrt{2} \sin \alpha \mp \vartheta_{22} \sqrt{2} \cos\left(\alpha \pm \frac{1}{6}\pi\right) \\ \vartheta_3 &= \vartheta_{12} \sqrt{2}, \quad \vartheta_4 = \vartheta_{23} \sqrt{2}, \quad \vartheta_5 = \vartheta_{31} \sqrt{2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Произвол в выражениях первых двух компонент вектора ϑ , связанный с наличием параметра α , в некоторых частных случаях процессов деформирования позволяет от пространства \mathcal{E}_5 перейти к пространству с меньшим числом измерений. Например, в случае одновременного растяжения и кручения тонкостенных труб в (2.6) удобно взять нижние знаки и положить $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. Получим в общем случае

$$\vartheta_1 = \vartheta_{11} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \vartheta_2 = (\vartheta_{22} - \vartheta_{33}) \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \vartheta_3 = \vartheta_{12} \sqrt{2}, \quad \vartheta_4 = \vartheta_{23} \sqrt{2}, \quad \vartheta_5 = \vartheta_{31} \sqrt{2} \quad (2.6')$$

а для рассматриваемого примера, выбирая ось x по образующей, y — по направляющей, ось z — по радиусу цилиндра, получим $\vartheta_1 \neq 0$, $\vartheta_3 \neq 0$, $\vartheta_2 = \vartheta_4 = \vartheta_5 = 0$, т. е. гиперплоскостью, в которой будет изображаться деформация трубы, будет обычная плоскость двух измерений (ϑ_1 , ϑ_3). Выражения (2.6) доказывают теорему.

Заметим, что тождеству (2.3) можно удовлетворить бесчисленным множеством других более общих линейных преобразований всех компонент девиатора ϑ_{ij} через все компоненты вектора ϑ .

Первое основное следствие теоремы 1 состоит в том, что модуль вектора деформации равен интенсивности деформаций девиатора ϑ_{ij} . Оно очевидно на основании (1.2), (2.2) и (2.3):

$$\vartheta_u = |\vartheta| = \sqrt{\vartheta^2} \quad (2.7)$$

Второе основное следствие этой теоремы состоит в том, что если происходит произвольный заданный процесс сложного нагружения элемента тела, т. е. компоненты девиатора ϑ_{ij} заданы, как некоторые функции времени t , то конец вектора ϑ в пространстве \mathcal{E}_5 описывает определенную кривую, которую мы будем называть траекторией нагружения. Справедливость этого следствия вытекает из (2.2) и (2.6), где параметр α считается постоянным:

$$\vartheta = \vartheta(t) \quad (2.8)$$

Третье следствие: единичный вектор деформации e_5 в пространстве \mathcal{E}_5 эквивалентен направляющему тензору деформаций ϑ_{ij}^* , т. е. они связаны

взаимно однозначным соотношением. Действительно, вектор \mathfrak{e} можно записать в виде

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_u \mathbf{e}_3 \quad (2.9)$$

Отсюда

$$\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^5 \frac{\mathfrak{e}_i}{\mathfrak{e}_u} \mathbf{e}_i \quad (2.10)$$

Деля равенства (2.6) на \mathfrak{e}_u и учитывая, что $\mathfrak{e}_{ij}/\mathfrak{e}_u = \mathfrak{e}_{ij}^*$, видим что направляющие косинусы вектора \mathbf{e}_3 , т. е. величины $\mathfrak{e}_i/\mathfrak{e}_u$ ($i=1, \dots, 5$) взаимно однозначно связаны с направляющим тензором \mathfrak{e}_{ij}^* .

§ 3. Внутренние геометрические параметры траектории нагружения. На фиг. 1 изображена траектория нагружения в пространстве \mathcal{E}_5 , причем точка O соответствует естественному недеформированному состоянию элемента тела, точка Q' с векторами \mathfrak{e}' и \mathbf{e}_3' соответствует состоянию деформаций в момент времени $t' < t$ и точка Q с векторами \mathfrak{e} и \mathbf{e}_3 — состоянию в рассматриваемый момент t . Введем единичный вектор касательной траектории нагружения \mathbf{p}_1 на основании равенства

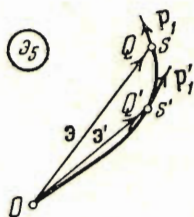
$$d\mathfrak{e} = \mathbf{p}_1 ds \quad (3.1)$$

где ds — дифференциал дуги траектории, $d\mathfrak{e}$ — дифференциал вектора деформации, так что $d\mathfrak{e}/dt$ и ds/dt есть вектор скорости и скорость нагружения. Так как репер $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5)$ неподвижен в \mathcal{E}_5 , то из (2.2) имеем

$$d\mathfrak{e} = \sum_{i=1}^5 d\mathfrak{e}_i \mathbf{e}_i \quad (3.2)$$

и поэтому

$$ds^2 = \sum_1^5 d\mathfrak{e}_i^2 \quad (3.3)$$



Фиг. 1

Деля последнее на dt^2 и учитывая выражение (1.4) девиатора скоростей деформаций ϵ_{ij} и соотношения (2.6), заключаем, что скорость нагружения равна интенсивности скоростей деформаций ϵ_u :

$$\frac{ds}{dt} = \left[\sum_1^5 \left(\frac{d\mathfrak{e}_i}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} = \epsilon_u \quad (3.4)$$

Следовательно, для дифференциала дуги траектории нагружения имеем два эквивалентных выражения:

$$ds = \epsilon_u dt = \left(\sum_1^5 d\mathfrak{e}_i^2 \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Поскольку для рассматриваемой нами фиксированной точки тела интенсивность скоростей деформаций ϵ_u в процессе нагружения является определенной функцией времени t , значит, вместо времени t в качестве параметра можно взять длину пути нагружения

$$s = \int_0^t \epsilon_u dt \quad (3.6)$$

Этот параметр из других соображений был ранее введен Одквистом^[2].

Единичный вектор касательной к траектории нагружения \mathbf{p}_1 эквивалентен направляющему тензору скоростей деформаций. Действительно, из (3.1) и (3.5) имеем

$$\mathbf{p}_1 = \frac{d\mathfrak{a}}{ds} = \frac{1}{\varepsilon_u} \frac{d\mathfrak{a}}{dt} \quad (3.7)$$

Дифференцируя (2.6) по t и деля на ε_u , видим, что между \mathbf{p}_1 и ε_{ij}^* (1.4) существует взаимнооднозначное соответствие.

Теперь можно в каждой точке траектории нагружения построить естественный пятимерный ортогональный декартовый репер, подобный трехгранному Френе для кривых в трехмерном пространстве. Для этого необходимо рассмотреть бесконечно малую окрестность точки Q на траектории, причем в качестве первого орта репера естественно принять единичный вектор касательной \mathbf{p}_1 , который определяется формулой (3.7).

Все производные вектора \mathfrak{a} по дуге s , очевидно, являются величинами, связанными с внутренней геометрией траектории нагружения.

Теорема 2. Траектория нагружения в окрестности точки $Q(s)$ определяется единственным естественным ортогональным репером и характеризуется четырьмя параметрами кривизны и кручения.

Действительно, в общем случае сложного нагружения в произвольной точке $Q(s)$ траектории, пять первых производных вектора \mathfrak{a} по s представляют пять линейно независимых векторов и потому их совокупность является пятимерным неортогональным репером:

$$\mathbf{R} \left(\frac{d^n \mathfrak{a}}{ds^n} \right) \quad (n=1, \dots, 5) \quad (3.8)$$

Первый вектор этого репера является единичным вектором касательной к траектории и потому может быть принят за вектор естественно ортогонального репера \mathbf{P} ($\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$):

$$\mathbf{p}_1 = \frac{d\mathfrak{a}}{ds}, \quad \mathbf{p}_1^2 = \sum_{n=1}^5 \left(\frac{d^n \mathfrak{a}}{ds} \right)^2 = 1 = \kappa_1^2 \quad (3.9)$$

Поскольку второй вектор репера \mathbf{R} связан с первым соотношением

$$\frac{d^2 \mathfrak{a}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{p}_1}{ds}$$

то он ортогонален к \mathbf{p}_1 , и потому, обозначая его модуль через κ_2 :

$$\kappa_2^2 = \sum_{n=1}^5 \left(\frac{d^2 \mathfrak{a}_n}{ds^2} \right)^2 = \left(\frac{d^2 \mathfrak{a}}{ds^2} \right)^2 \quad (3.10)$$

мы строим второй единичный вектор репера \mathbf{P}

$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\kappa_2} \frac{d^2 \mathfrak{a}}{ds^2} \quad (3.11)$$

Это есть вектор главной нормали траектории нагружения, а величина $\kappa_2 = \kappa$ есть кривизна траектории нагружения.

Последние три вектора репера \mathbf{P} можно построить следующим однотипным образом через три последних вектора репера \mathbf{R} : разложить к

ждый новый вектор репера \mathbf{R} по осям уже введенных векторов репера \mathbf{P} и добавить новый вектор репера \mathbf{P} , умноженный на некоторый коэффициент, который будет, очевидно, проекцией рассматриваемого вектора репера \mathbf{R} на направление нового введенного вектора репера \mathbf{P} .

Для общности проведем такое построение всех векторов репера \mathbf{P} , включая \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Согласно сказанному положим

$$\frac{d^m \vartheta}{ds^m} = \sum_{i=1}^m A_{mi} \mathbf{p}_i \quad (m = 1, \dots, 5) \quad (3.12)$$

причем репер \mathbf{P} удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{p}_i^2 = 1, \quad \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j = 0, \quad (i, j = 1, \dots, 5; i \neq j) \quad (3.13)$$

Модули компонент репера \mathbf{R} , т. е. векторов (3.12), можно назвать компонентами кривизны траектории и обозначить через

$$\kappa_m^2 = \left(\frac{d^m \vartheta}{ds^m} \right)^2 = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{d^m \vartheta_i}{ds^m} \right)^2 \quad (m = 1, \dots, 5) \quad (3.14)$$

причем иметь в виду, что $\kappa_1 = 1$. Каждый вновь вводимый вектор \mathbf{p}_m репера \mathbf{P} согласно (3.12) определяется уравнением

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{A_{mm}} \left(\frac{d^m \vartheta}{ds^m} - \sum_{i=1}^{m-1} A_{mi} \mathbf{p}_i \right) \quad (3.15)$$

Коэффициенты A_{mi} получаются из (3.12) путем скалярного умножения на \mathbf{p}_i ($i \leq m-1$), а A_{mm} — возведения в квадрат (3.15):

$$A_{mi} = \mathbf{p}_i \frac{d^m \vartheta}{ds^m}, \quad A_{mm}^2 = \left(\frac{d^m \vartheta}{ds^m} - \sum_{i=1}^{m-1} A_{mi} \mathbf{p}_i \right)^2 \quad \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, m-1 \\ m=1, 2, \dots, 5 \end{array} \right) \quad (3.16)$$

Если в первую формулу (3.16) внести выражение \mathbf{p}_i согласно (3.15)

$$\mathbf{p}_i = \frac{1}{A_{ii}} \left(\frac{d^i \vartheta}{ds^i} - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \mathbf{p}_j \right)$$

и учесть, что согласно (3.16)

$$\mathbf{p}_j \frac{d^m \vartheta}{ds^m} = A_{mj}$$

то после простых преобразований получим

$$A_{mi} = \frac{1}{A_{ii}} \left(\kappa_{mi} - \sum_{j=1}^{i-1} A_{mj} A_{ij} \right), \quad A_{mm}^2 = \kappa_m^2 - \sum_{j=1}^{m-1} A_{mj}^2 \quad \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, m-1 \\ m=1, 2, \dots, 5 \end{array} \right) \quad (3.17)$$

причем введены обозначения

$$\kappa_{mi} = \frac{d^m \vartheta}{ds^m} \frac{d^i \vartheta}{ds^i} = \sum_{n=1}^5 \frac{d^m \vartheta_n}{ds^m} \frac{d^i \vartheta_n}{ds^i}, \quad \kappa_{mm} = \kappa_m^2 \quad \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, m-1 \\ m=1, 2, \dots, 5 \end{array} \right) \quad (3.18)$$

Если дифференцировать (3.14) и (3.18) один раз по s , то легко найти соотношения

$$\kappa_{mm-1} = \kappa_{m-1} \frac{d\kappa_{m-1}}{ds}, \quad \kappa_{mi} = \frac{d\kappa_{m-1, i}}{ds} - \kappa_{m-1, i+1} \quad (i = 1, \dots, m-2) \quad (3.19)$$

Соотношения (3.17), (3.19) являются рекуррентными и определяют все коэффициенты A_{mi} через параметры кривизны κ_n ($n = 1, \dots, 5$). Матрица A_{mi} является треугольной, поэтому вычисление ее указанным способом элементарно. Приводим значения κ_{mi} , A_{mi} :

$$\begin{aligned}
 m = 1 & \\
 & \kappa_{11} = 1, \quad A_{11}^2 = 1 \\
 m = 2 & \\
 & \kappa_{21} = 0, \quad A_{21} = 0 \\
 & \kappa_{22} = \kappa_2^2, \quad A_{22}^2 = \kappa_2^2 \\
 m = 3 & \\
 & \kappa_{31} = -\kappa_2^2, \quad A_{31} = -\kappa_2^2 \\
 & \kappa_{32} = \kappa_2 \kappa_2', \quad A_{32} = \kappa_2' \\
 & \kappa_{33} = \kappa_3^2, \quad A_{33}^2 = \kappa_3^2 - \kappa_2^4 - \kappa_2'^2 \\
 m = 4 & \\
 & \kappa_{41} = -3\kappa_2 \kappa_2', \quad A_{41} = -3\kappa_2 \kappa_2' \\
 & \kappa_{42} = (\kappa_2 \kappa_2')' - \kappa_3^2, \quad A_{42} = \frac{1}{\kappa_2} [(\kappa_2 \kappa_2')' - \kappa_3^2] \\
 & \kappa_{43} = \kappa_3 \kappa_3', \quad A_{43} = \frac{1}{A_{33}} [\kappa_3 \kappa_3' + \kappa_3^2 \kappa_2' - 3\kappa_2^3 \kappa_2' - \kappa_2 (\kappa_2 \kappa_2')'] \\
 & \kappa_{44} = \kappa_4^2, \quad A_{44}^2 = \kappa_4^2 - A_{41}^2 - A_{42}^2 - A_{43}^2 \\
 m = 5 & \\
 & \kappa_{51} = -4(\kappa_2 \kappa_2')' + \kappa_3^2, \quad A_{51} = -4(\kappa_2 \kappa_2')' + \kappa_3^2 \\
 & \kappa_{52} = (\kappa_2 \kappa_2')'' - 3\kappa_3 \kappa_3', \quad A_{52} = \frac{1}{\kappa_2} [(\kappa_2 \kappa_2')'' - 4\kappa_3 \kappa_3'] \\
 & \kappa_{53} = (\kappa_3 \kappa_3')' - \kappa_4^2, \quad A_{53} = \frac{1}{A_{33}} (\kappa_{53} - A_{51} A_{31} - A_{52} A_{32}) \\
 & \kappa_{54} = \kappa_4 \kappa_4', \quad A_{54} = \frac{1}{A_{44}} (\kappa_{54} - A_{51} A_{41} - A_{52} A_{42} - A_{53} A_{43}) \\
 & \kappa_{55} = \kappa_5^2, \quad A_{55}^2 = \kappa_5^2 - A_{51}^2 - A_{52}^2 - A_{53}^2 - A_{54}^2
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

где штрих означает производную по s .

Найдем теперь представление любой производной вектора деформации \mathfrak{e} по s порядка > 5 в репере \mathbf{P} , поскольку представление первых пяти производных дано (3.12), (3.20). Для этого выразим сначала шестую производную в виде

$$\frac{d^6 \mathfrak{e}}{ds^6} = \sum_{m=1}^5 A_{6m} \mathbf{p}_m \tag{3.21}$$

где, очевидно,

$$A_{6m} = \mathbf{p}_m \frac{d^6 \mathfrak{e}}{ds^6} \tag{3.22}$$

Внося сюда \mathbf{p}_m (3.15), получим

$$A_{6m} = \frac{1}{A_{mm}} \left(\kappa_{6m} - \sum_{i=1}^{m-1} A_{mi} A_{6i} \right) \quad (m=1, \dots, 5) \tag{3.23}$$

где

$$\kappa_{6m} = \frac{d^m \mathfrak{e}}{ds^m} \frac{d^6 \mathfrak{e}}{ds^6} = \sum_{n=1}^5 \frac{d^m \mathfrak{e}_n}{ds^m} \frac{d^6 \mathfrak{e}_n}{ds^6}$$

причем κ_{6m} легко выразить через таблицу (3.20)

Действительно, дифференцируя по s известные величины κ_{5m} ($m=1, \dots, 5$), получаем

$$\kappa_{6m} = (\kappa_{5m})' - \kappa_{5,m+1} \quad \kappa_{65} = \kappa_5 \kappa_5' \quad (m=1, \dots, 4) \quad (3.24)$$

Значит (3.23) есть рекуррентная формула, определяющая все A_{6m} через A_{ij} ($m, i, j \leq 5$), которые уже определены через четыре основных параметра кривизны $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5$.

Теперь любая производная порядка выше 5 определяется путем простого дифференцирования формулы (3.21); например седьмая производная будет равна

$$\frac{d^7 \varrho}{ds^7} = \sum_{n=1}^5 \left(p_n \frac{dA_{6n}}{ds} + A_{6n} \frac{dp_n}{ds} \right) \quad (3.25)$$

Однако для этого нужно знать выражения первых производных векторов репера P . Из (3.12), (3.21) следует

$$\frac{d}{ds} \left(\sum_{i=1}^m A_{mi} p_i \right) = \sum_{i=1}^{m+1} A_{m+1,i} p_i, \quad \frac{d}{ds} \left(\sum_{i=1}^5 A_{5i} p_i \right) = \sum_{i=1}^5 A_{6i} p_i \quad (m=1, 2, 3, 4) \quad (3.26)$$

Легко видеть, что это рекуррентные формулы, аналогичные формулам Френе, выражающие первые производные всех векторов репера P через векторы этого репера.

Запишем выражения производных векторов репера P в виде

$$\frac{dp_m}{ds} = \sum_{j=1}^5 P_{mj} p_j \quad (m=1, \dots, 5) \quad (3.27)$$

Тогда формулы (3.26) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} A_{mm} \frac{dp_m}{ds} &= A_{mm} \sum_{j=1}^5 P_{mj} p_j = \\ &= A_{m+1,m+1} p_{m+1} + \sum_{j=1}^m (A_{m+1,j} - A_{mj}') p_j - \sum_{j=1}^5 p_j \sum_{i=i}^{m-1} A_{mj} p_{ij} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Приравнивая коэффициенты левой и правой части при одинаковых векторах p_j , получаем рекуррентные формулы для коэффициентов P_{mj} :

$$\begin{aligned} j > m+1, \quad A_{mm} P_{mj} &= - \sum_{i=1}^{m-1} A_{mi} P_{ij} \\ j = m+1, \quad A_{mm} P_{m,m+1} &= A_{m+1,m+1} - \sum_{i=1}^{m-1} A_{mi} P_{i,m+1} \\ j < m+1, \quad A_{mm} P_{mj} &= A_{m+1,j} - A_{mj}' - \sum_{i=1}^{m-1} A_{mi} P_{ij} \quad (m, j=1, \dots, 5) \end{aligned} \quad (3.29)$$

причем последняя формула справедлива, включая значение $m=5$.

Формулы (3.27) дают преобразование репера P при переходе от точки s к точке $s + ds$.

Поскольку в точке $s + ds$ репер является также ортогональным, то

$$(p_m + dp_m)(p_n + dp_n) = 0, \quad p_m dp_m = 0$$

и потому для любых m, n

$$P_m \frac{dp_n}{ds} + P_n \frac{dp_m}{ds} = 0 \quad (m, n = 1, \dots, 5) \quad (3.30)$$

Внося сюда значения (3.27), находим основное свойство матрицы коэффициентов P_{mj} :

$$P_{mj} = -P_{jm}, \quad P_{mm} = 0 \quad (m, j = 1, \dots, 5) \quad (3.31)$$

т. е. она является антисимметричной.

Из (3.20), (3.29) и (3.31) следует, что среди коэффициентов P_{mj} есть только четыре независимых, отличных от нуля: $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45}$, которые выражаются через параметры кривизны $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5$. Обозначая новые параметры кривизны и кручения

$$\begin{aligned} P_{12} &= -P_{21} = \kappa \\ P_{23} &= -P_{32} = \tau_1 \\ P_{34} &= -P_{43} = \tau_2 \\ P_{45} &= -P_{54} = \tau_3 \end{aligned} \quad \text{остальные } P_j = 0 \quad (3.32)$$

находим их выражения через A_{ij} или параметры кривизны κ_n ($n = 2, 3, 4, 5$):

$$\kappa = \kappa_2, \quad \tau_1 = \frac{A_{33}}{\kappa_2} = \frac{1}{\kappa_2} \sqrt{\kappa_3^2 - \kappa_2^4 - \kappa_2'^2}, \quad \tau_2 = \frac{A_{44}}{A_{33}}, \quad \tau_3 = \frac{A_{55}}{A_{44}} \quad (3.33)$$

Обобщенные формулы Френе (3.27) теперь принимают вид:

$$\frac{dp_m}{ds} = -P_{m-1,m} p_{m-1} + P_{m,m+1} p_{m+1}, \quad P_{01} = P_{56} = 0 \quad (m = 1, \dots, 5) \quad (3.34)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{ds} &= \kappa p_2, & \frac{dp_4}{ds} &= -\tau_2 p_3 + \tau_3 p_5 \\ \frac{dp_2}{ds} &= -\kappa p_1 + \tau_1 p_3, & \frac{dp_5}{ds} &= -\tau_3 p_4 \\ \frac{dp_3}{ds} &= -\tau_1 p_2 + \tau_2 p_4, \end{aligned}$$

Естественными уравнениями траектории нагружения называются уравнения

$$\kappa = \kappa(s), \quad \tau_n = \tau_n(s) \quad (n = 1, 2, 3) \quad (3.35)$$

Если (3.35) заданы, то система (3.34) определяет вращение репера P при переходе от точки $O(s=0)$ к точке s .

Значит, репер P [выражается через его значение $P^\circ(s=0)$ в виде

$$P = (\Pi_{mi}) P^\circ \quad (3.36)$$

т. е.

$$p_m = \sum_{i=1}^5 \Pi_{mi} p_i^\circ \quad (m = 1, \dots, 5)$$

где матрица (Π_{mi}) является функционалом параметров (3.35), удовлетворяет системе (3.34) и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \Pi_{mi}^2 &= 1, & \sum_{i=1}^5 \Pi_{mi} \Pi_{ni} &= 0, & m \neq n \\ (\Pi_{mm})_{s=0} &= 1, & (\Pi_{mn})_{s=0} &= 0, & m \neq n \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ее детерминант

$$|\Pi_{mi}| = +1 \quad (3.38)$$

Репер P° определяется через R° соотношением (3.12) и, следовательно, на основании (2.2) связан с репером E соотношениями

$$\sum \left(\frac{d^m \partial_i}{ds^m} \right)_{s=0} e_i = \sum (A_{mi})_{s=0} P_i^\circ \quad (3.39)$$

или

$$\left(\frac{d^m \partial_i}{ds^m} \right)_{s=0} E = (A_{mi})_{s=0} P^\circ \quad (3.39')$$

Естественные уравнения траектории нагружения (3.35) определяют ее лишь относительно репера P° . Переход к реперу E (3.39) содержит матрицу $(d^m \partial_i / ds^m)_{s=0}$, которая не выражается через параметры кривизны и кручения.

§ 4. Вращения и отражения траектории нагружения. Рассмотрим в пространстве \mathcal{S}_5 некоторую определенную траекторию (2.8) и совокупность всех других траекторий, которые по своим внутренним геометрическим свойствам тождественно совпадают с (2.8).

Поскольку внутренние свойства траектории определяются матрицей (A_{mi}) , связывающей репер R с репером P (3.12):

$$R = (A_{mi}) P \quad (4.1)$$

или, что то же, матрицей P_{ij} , связывающей производные векторов p_n репера P с самими векторами p_n (3.27), а матрицы (A_{mi}) , (P_{mi}) выражаются только через четыре параметра кривизны κ_n ($n = 2, 3, 4, 5$), то речь идет о совокупности траекторий нагружения, которые получаются из (2.8) путем преобразований, оставляющих инвариантными параметры кривизны. Поскольку κ_n^2 — однородные квадратичные формы, а именно квадраты векторов $d^n \partial / ds^n$ (3.14), то преобразования, о которых идет речь, суть линейные однородные преобразования, сохраняющие инвариантным квадрат вектора ∂ и, значит, величину интенсивности деформаций

$$\partial_u^2 = \partial^2 = \sum_{n=1}^5 \partial_n^2 \quad (4.2)$$

Такие преобразования называются вращениями и отражениями траектории нагружения и имеют вид:

$$\partial = (\alpha_{mi}) \partial', \quad \partial_m = \sum_{i=1}^5 \alpha_{mi} \partial_i' \quad (m = 1, \dots, 5) \quad (4.3)$$

где квадратная ортогональная матрица

$$(\alpha_{mi}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{15} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{51} & \dots & \alpha_{55} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

обладает следующими свойствами: обратная матрица $(\alpha_{mi})^{-1}$ равна транспонированной матрице

$$(\alpha_{mi})^{-1} = (\alpha_{mi})^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{51} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{15} & \dots & \alpha_{55} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

причем

$$\sum_{m=1}^5 \alpha_{mi}^2 = \sum_{i=1}^5 \alpha_{mi}^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^5 \alpha_{mi} \alpha_{ni} = \sum_{i=1}^5 \alpha_{im} \alpha_{in} = 0 \quad (m \neq n) \quad (4.6)$$

Преобразование (4.3) можно считать также преобразованием компонент вектора ε при переходе от репера $\mathbf{E}(e_1, \dots, e_5)$ к другому пятимерному ортогональному декартову реперу $\mathbf{E}'(e'_1, \dots, e'_5)$, в котором

$$\varepsilon = \sum_1^5 \vartheta_n e_n = \sum_1^5 \vartheta'_n e'_n \quad (4.7)$$

Действительно, если направляющие косинусы вектора e'_m репера \mathbf{E}' относительно \mathbf{E} обозначим c_{mi} , так что

$$e'_m = \sum_{i=1}^5 c_{mi} e_i \quad (m = 1, \dots, 5), \quad \text{или} \quad \mathbf{E}' = (c_{mi}) \mathbf{E} \quad (4.8)$$

то из (4.7) и (4.8) получим компоненты ε в осях репера \mathbf{E} ,

$$\vartheta_m = \sum_{i=1}^5 c_{im} \vartheta'_i \quad (m = 1, \dots, 5) \quad (4.9)$$

Сравнивая (4.4) и (4.9), находим

$$c_{im} = \alpha_{mi} \quad (4.10)$$

т. е. матрица (c_{im}) является транспонированной по отношению к матрице (α_{mi}) , задание одной из них определяет другую и потому обе точки зрения эквивалентны. Заметим, что преобразование репера \mathbf{E} к реперу \mathbf{P}^o (3.39) принадлежит к рассматриваемому классу преобразований.

Определитель матрицы (4.5) по абсолютной величине равен единице:

$$|\alpha_{mi}| = \pm 1 \quad (4.11)$$

что очевидно на основании (4.6), если этот определитель возвести в квадрат. Преобразования, для которых $|\alpha_{mi}| = +1$, называются вращениями, преобразования же, для которых $|\alpha_{mi}| = -1$, называются отражениями.

Соотношения (4.6), среди которых имеем 15 независимых уравнений, содержащих 25 параметров α_{ij} , показывают, что репер \mathbf{E}' относительно \mathbf{E} имеет 10 степеней свободы, т. е. рассматриваемый нами класс преобразований траекторий нагружения имеет 10 произвольных параметров.

Приведем без доказательства три важные для теории сложного нагружения теоремы Картана [3] применительно к пространству \mathcal{E}_5 .

Теорема 1к. Симметрией относительно гиперплоскости Γ четырех измерений, проходящей через начало координат и имеющей уравнение с нормированными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^5 \gamma_i \vartheta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^5 \gamma_i^2 = 1 \quad (4.12)$$

называется преобразование, дающее зеркальное отражение в Γ точек пространства \mathcal{E}_5 , расположенных по одну сторону Γ . Преобразование симметрии имеет четыре независимых параметра γ_i , определяющих положение Γ , и имеет вид (4.3), причем

$$\alpha_{mi} = \delta_{mi} - 2\gamma_m \gamma_i, \quad \delta_{mi} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = m \\ 0 & \text{при } i \neq m \end{cases} \quad (4.13)$$

Простое доказательство этого основано на том, что согласно (4.12) вектор γ перпендикулярен Γ и, значит, компланарен вектору $\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}$. Простейшие симметрии есть изменения знаков компонент вектора \mathfrak{a} на обратные.

Рассмотрим, наряду с преобразованием (4.3), преобразование того же класса с матрицей (α_{mi}') :

$$\mathfrak{a}' = (\alpha_{mi}') \mathfrak{a}'' \quad (4.14)$$

Внося это выражение в (4.4), находим

$$\mathfrak{a} = (\alpha_{mi}'') \mathfrak{a}'' = (\alpha_{mi}) (\alpha_{mi}') \mathfrak{a}'' \quad (4.15)$$

Преобразование (α_{mi}'') называется произведением преобразований (α_{mi}) и (α_{mi}') . Элементы матрицы находятся по известным формулам

$$\alpha_{mi}'' = \sum_{j=1}^5 \alpha_{mj} \alpha_{ji}' \quad (4.16)$$

причем матрица (α_{mi}'') также обладает свойством (4.6) и в этом смысле произведения преобразований образуют группу.

Теорема 2к. Всякое преобразование (α_{mi}) (4.3) является произведением не более пяти симметрий, причем четное число симметрий дает вращение, нечетное число симметрий — отражение.

Простым вращением в плоскости двух фиксированных векторов например векторов $\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n$ репера \mathbf{E} , называется преобразование, вида (4.4) при следующих значениях элементов матрицы (α_{ij}) :

$$\begin{aligned} \alpha_{mm} &= \alpha_{nn} = \cos \beta_{mn} \\ \alpha_{nm} &= -\alpha_{mn} = \sin \beta_{mn} \\ \alpha_{ij} &= 0, \quad i, j \neq m, n, \quad i \neq j \\ \alpha_{ii} &= 1, \quad i \neq m, n \end{aligned} \quad (4.17)$$

где β_{mn} — фиксированное число, называемое углом вращения. Всего в пространстве \mathcal{E}_5 существует десять независимых простых вращений в десяти двумерных плоскостях:

$$\begin{aligned} (1.2) \quad (1.3) \quad (1.4) \quad (1.5) \\ (2.3) \quad (2.4) \quad (2.5) \\ (3.4) \quad (3.5) \\ (4.5) \end{aligned} \quad (4.17)'$$

что соответствует десяти степеням свободы вращения репера \mathbf{E} .

Теорема 3к. Всякое вращение есть произведение не более двух простых вращений, всякое отражение есть произведение не более двух простых вращений и одной симметрии относительно гиперплоскости, содержащей плоскости простых вращений.

§ 5. Постулат изотропии. Рассмотрим теперь процесс деформирования сплошной среды в окрестности произвольной точки M , считая, что в начальный момент времени среда в окрестности M является изотропной и однородной. Происходящую в следующие моменты времени деформацию предполагаем малой. Такой процесс характеризуется вектором деформации $\mathfrak{a}(t)$, т. е. траекторией нагружения, свойства которой уже выяснены.

Вектором напряжения σ в точке M тела назовем совокупность величины, построенную в пятимерном ортогональном репере при помощи девиатора напряжений (1.3) по такому же правилу, как вектор деформации \mathfrak{a} построен при помощи девиатора деформаций, т. е. по формулам (2.6):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{11} \sqrt{2} \cos \alpha \pm \sigma_{22} \sqrt{2} \sin \left(\alpha \pm \frac{1}{6} \pi \right) \\ \sigma_2 &= \sigma_{11} \sqrt{2} \sin \alpha \mp \sigma_{22} \sqrt{2} \cos \left(\alpha \mp \frac{1}{6} \pi \right) \\ \sigma_3 &= \sigma_{12} \sqrt{2}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23} \sqrt{2}, \quad \sigma_5 = \sigma_{31} \sqrt{2}\end{aligned}\quad (5.1)$$

причем α — тот же самый угол, который входит в формулы (2.6). В частности, при $\alpha = 1/6 \pi$ и нижнем знаке формул (5.1) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{11} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sigma_2 = (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sigma_3 &= \sigma_{12} \sqrt{2}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23} \sqrt{2}, \quad \sigma_5 = \sigma_{31} \sqrt{2}\end{aligned}\quad (5.1)'$$

Свойства пространства Σ_5 вектора σ вполне аналогичны \mathcal{E}_5 и поэтому репер E является общим, но Σ_5 и \mathcal{E}_5 не совпадают.

В репере E векторы напряжений и деформаций имеют вид:

$$\sigma = \sum_1^5 \sigma_n e_n, \quad \mathfrak{a} = \sum_1^5 \mathfrak{a}_n e_n \quad (5.2)$$

Если напряжения возникают вследствие деформаций и зависят от процесса деформации, времени t и температуры $T(t)$, значит, существует функциональная зависимость напряжения от реперов E и P , вектора \mathfrak{a} и времени t или, поскольку репер P определяется вектором \mathfrak{a} , напряжение σ может функционально зависеть только от репера E , вектора деформации $\mathfrak{a}(t)$ и времени t .

В каждый момент времени t , т. е. в каждой точке траектории нагружения, в которой вектором $\mathfrak{a}(t)$ определен репер P , можно построить единственный вектор напряжения σ/σ_n , причем ориентация его в репере P зависит как от вектора \mathfrak{a} (репера P), так и от исходного репера E .

Ряд соображений, вытекающих из однородности и изотропии тела в окрестности любой его точки M до деформации, позволяет выдвинуть следующее общее для различных сред положение, которое мы для краткости назовем постулатом изотропии.

В каждой точке Q траектории нагружения вектор напряжения σ функционально и непрерывно зависит только от вектора деформаций \mathfrak{a} и времени t , но не зависит от выбора первоначального репера E . Значит, ориентация вектора σ в репере P , имеющем начало в точке Q , зависит только от внутренних геометрических и кинематических параметров траектории нагружения.

Функциональная зависимость σ от ϑ , которую условно запишем в виде

$$\sigma = S[\vartheta] \quad (5.3)$$

инвариантна относительно преобразований вращения или вращения и отражения репера E , т. е. преобразований вида

$$\sigma = (\alpha_{mi}) \sigma', \quad \vartheta = (\alpha_{mi}) \vartheta' \quad (5.4)$$

где (α_{mi}) — квадратная ортогональная матрица (4.4), не зависящая от времени. Таким образом, (5.3) обладает свойством

$$(\alpha_{mi}) S[\vartheta] = S[(\alpha_{mi}) \vartheta] \quad (5.5)$$

Прямым следствием постулата изотропии, уточняющим вид функционала S для аналитических траекторий нагружения, является формула

$$\sigma = \sum_{m=1}^5 S_m p_m \quad (5.6)$$

где p_m — векторы репера P и S_m — компоненты σ в репере P , которые функционально зависят только от инвариантных кинематических и геометрических параметров траектории нагружения. Геометрическими параметрами траектории нагружения являются, как уже говорилось, длина дуги и параметры кривизны и кручения

$$s, \kappa, \tau_1, \tau_2, \tau_3 \quad (5.7)$$

а кинематическими — их производные по времени, причем главным кинематическим параметром является скорость нагружения:

$$\varepsilon_u = \frac{ds}{dt} \quad (5.8)$$

Действительно, всякая производная по времени от вектора деформации ϑ выражается через геометрический и основной кинематический параметры по формуле

$$\frac{d}{dt} = \varepsilon_u \frac{d}{ds} \quad (5.9)$$

Однако формула (5.6) может считаться общим выражением постулата изотропии только для аналитических траекторий нагружения, т. е. таких, когда вектор деформации в любой точке $s' \leq s$ траектории нагружения представим рядом Тейлора

$$\vartheta(s') = \sum \frac{(s' - s)^n}{n!} \frac{d^n \vartheta(s)}{ds^n} \quad (5.10)$$

Рассмотрим линейный функционал более общего вида, введенный нами ранее [1]:

$$\begin{aligned} S[\vartheta] = & \dots B_n \frac{d^n \vartheta}{ds^n} + \dots + B_1 \frac{d\vartheta}{ds} + B_0 \vartheta + \int_0^s B_{-1} \vartheta' ds' + \quad (5.11) \\ & + \dots + \int_0^s \int_0^{s'} \dots \int_0^{s^{(n)}} B_{-n} \vartheta^{(n)} ds' \dots ds^{(n)} + \dots + \int_0^s B_{11} \frac{d\vartheta(s')}{ds'} ds' + \dots \end{aligned}$$

где $B_n, B_{-n}, B_{11}, \dots$ — функционалы геометрических и кинематических инвариантных параметров траектории нагружения. Он обладает свойством (5.5) и его истокообразная часть при некоторых условиях может быть свернута на основании формулы Дирихле. Например,

$$\begin{aligned} \vartheta &= \int_0^s \mathbf{p}_1(s') ds' \\ \int_0^s B_{-1} \vartheta(s') ds' &= \int_0^s B_{-1}^{(1)} \mathbf{p}_1(s') ds' \\ \int_0^s \int_0^{s_1} B_{-2} \vartheta(s'') ds'' ds' &= \int_0^s B_{-2}^{(2)} \mathbf{p}_1(s) ds' \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

где $B_{-n}^{(n)}$ выражается через B_{-n} при помощи квадратур. Следовательно, (5.11) преобразуется к виду

$$\sigma = \dots B_n \frac{d^n \vartheta}{ds^n} + \dots + B_1 \frac{d\vartheta}{ds} + \int_0^s B \mathbf{p}_1 ds' \tag{5.12}$$

где функционал B линейно выражается через $B_{-n}^{(n)}$.

Как уже установлено выше, чтобы репер \mathbf{P} существовал в каждой точке траектории нагружения и движение его по траектории было непрерывным, необходимо существование пяти первых производных по s (по t) от вектора деформации ϑ .

Если траектория нагружения является аналитической кривой, то все векторы $d^n \vartheta / ds^n$ могут быть получены из (3.24) и на основании (3.34) будут представлены в репере \mathbf{P} .

Значит, сумма первых слагаемых (5.12), содержащих производные, также будет представлена в репере \mathbf{P} .

Если воспользоваться разложением типа (5.10) для вектора $\mathbf{p}_1(s')$, то и последний, истокообразный член суммы (5.12) будет представлен в репере \mathbf{P} и формула (5.12) тождественно совпадает с (5.6).

Если вектор $\mathbf{p}_1(s')$ при движении по траектории изменяется не непрерывно (ϑ всегда непрерывен), то (5.11) при достаточно общих предположениях принимает следующий вид:

$$\sigma = \int_0^s \int_0^{s'} \dots \int_0^{s^{(IV)}} ds^{(V)} \dots ds^{(IV)} \sum_{m=1}^5 B_m \mathbf{p}_m(s^{(V)}) \tag{5.13}$$

причем кратность интегралов для вектора \mathbf{p}_m может быть понижена до $\leq m$ -кратности ($m = 1, \dots, 5$).

Для неаналитических траекторий нагружения, а также не имеющих непрерывного репера \mathbf{P} , наряду с (5.6), (5.12), (5.13), возможны, конечно, еще линейные функционалы более общего вида, удовлетворяющие постулату изотропии.

В пояснение постулата изотропии приводим следующие соображения.

Теорема 3. Преобразование поворота осей координат x, y, z (1, 2, 3), относительно которых определены девиаторы напряжений и деформаций

в точке M тела, принадлежит к группе вращений траекторий нагружения и вектора напряжений в пространстве \mathcal{E}_5 .

Пусть таблица косинусов углов между осями x, y, z (1, 2, 3) и x', y', z' (1', 2', 3') дана в виде

$$\begin{array}{c|ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 2 & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ 3 & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array} \quad (5.14)$$

причем l_{ij} выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по формулам (6.10), в которых α_{ij} надо заменить на l_{ij} .

Формулы преобразования девиаторов $\partial_{ij}, \sigma_{ij}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial_{mn} &= \sum_{i,j=1,2,3} \partial_{ij}' l_{mi} l_{nj} \\ \sigma_{mn} &= \sum_{i,j=1,2,3} \sigma_{ij}' l_{mi} l_{nj} \end{aligned} \quad (m, n=1, 2, 3) \quad (5.15)$$

и они получаются из условия инвариантности квадратичной формы Коши. Преобразования (5.7), как известно, имеют два инварианта девиатора, в том числе квадратичные инварианты

$$\sum \partial_{ij}^2 = \sum \partial_{ij}'^2, \quad \sum \sigma_{ij}^2 = \sum \sigma_{ij}'^2 \quad (5.16)$$

По построению векторов ∂ и σ формулы преобразования (2.6) и (5.1) таковы, что условия (5.16) тождественны условиям инвариантности квадратов векторов ∂ и σ и, следовательно, теорема доказана. Коэффициенты α_{mi} преобразований (5.4), соответствующие (5.15), имеют следующие выражения при $\alpha = 1/6 \pi$ и нижнем знаке в формулах (2.6), (5.1):

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{2}(3l_{11}^2 - 1), & \alpha_{22} &= \frac{1}{2}(l_{22}^2 + l_{33}^2 - l_{23}^2 - l_{32}^2), & \alpha_{33} &= l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21} \\ \alpha_{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(l_{12}^2 - l_{13}^2), & \alpha_{13} &= \sqrt{3}l_{11}l_{12}, & \alpha_{14} &= \sqrt{3}l_{12}l_{13}, & \alpha_{15} &= \sqrt{3}l_{13}l_{11} \\ \alpha_{23} &= l_{21}l_{22} - l_{31}l_{32}, & \alpha_{24} &= l_{22}l_{23} - l_{32}l_{33}, & \alpha_{25} &= l_{23}l_{21} - l_{33}l_{31} \\ \alpha_{34} &= l_{12}l_{23} + l_{13}l_{22}, & \alpha_{35} &= l_{13}l_{21} + l_{11}l_{23} \\ \alpha_{45} &= l_{23}l_{31} + l_{21}l_{33} \end{aligned} \quad (5.17)$$

причем недостающие α_{ij} со смешанными ($i > j$) индексами получаются из α_{ji} путем замены l_{mn} на l_{nm} , а α_{44} и α_{55} получаются из α_{33} круговой перестановкой индексов у величин l .

Для преобразований (5.4), где (α_{mi}) определяется формулами (5.17), постулат изотропии безусловно справедлив, так как выбор первоначальных осей x, y, z в теле не может влиять на физические свойства тела.

Теорема 4. Постулат изотропии справедлив для всякой первоначально квазиизотропной среды в случае простого нагружения во всем пространстве \mathcal{E}_5 , а в случае сложного нагружения, по крайней мере в малой окрестности \mathcal{E}_5 , около начала координат $O(s=0)$.

Действительно, для простого нагружения квазиизотропных твердых, сыпучих, жидких и газообразных тел вектор деформации имеет вид:

$$\vartheta = s \mathbf{p}_1^\circ$$

где \mathbf{p}_1° не зависит от $s(t)$ и может иметь любое направление в \mathcal{E}_s . Значит, главные оси деформаций в теле неподвижны, на главных площадках деформаций касательные напряжения не возникают, а на главных площадках сдвигов векторы касательных напряжений возникают в направлении векторов сдвигов. Следовательно,

$$\sigma = \sigma_u \mathbf{p}_1^\circ$$

Если при сложном нагружении точка $O(s=0)$ не является особой, то в ее окрестности

$$\vartheta = s \mathbf{p}_1^\circ + \frac{s^2}{2} \kappa(0) \mathbf{p}_2^\circ + \dots$$

нагружение будет мало отличаться от простого. Значит, и в этом случае постулат изотропии справедлив.

Теорема 5. Все основные известные теории механики сплошных первоначально изотропных (изотропных до деформации) сред подтверждают постулат изотропии.

Вопрос о том, что тензорно-линейное уравнение общего вида охватывает все основные известные теории механики сплошной, первоначально изотропной среды, уже освещался. Учитывая, что вектор ϑ из девiatorа ϑ_{ij} получается линейным преобразованием, заключаем, что указанное уравнение по существу совпадает с (5.11). Следовательно, теорема верна. Для примера укажем, что свойства вязких жидкостей и газов, а также пластических и сыпучих сред, для которых направление течения определяется по теории Сен-Венана, Леви, Мизеса, описывается уравнением

$$\sigma = \sigma_u \mathbf{p}_1 \tag{5.18}$$

упругие свойства — уравнением

$$\sigma = 2G \int_0^s \mathbf{p}_1 ds$$

и т. п.

Приведенные теоремы свидетельствуют только о том, что постулат изотропии находится в согласии с известными фактами, но не служат его доказательством. При построении механической теории деформаций конкретной сплошной изотропной среды, например теории пластичности металлов при сложном нагружении, теории ползучести и др., необходимы прямые опыты по проверке постулата. Основное, что подлежит проверке, это независимость единичного вектора напряжения σ/σ_u от репера \mathbf{E} , т. е. определенная ориентация σ/σ_u в репере \mathbf{P} , связанная только с внутренней геометрией траектории нагружения. Проверка этого обстоятельства не требует конкретного математического выражения типа (5.6) или (5.13). Если указанное свойство подтверждается, значит, для траекторий нагружения с непрерывным репером \mathbf{P} связь между σ и ε имеет вид (5.6) или (5.13) и делом дальнейших опытов будет выяснение функционалов S_m ($m = 1, \dots, 5$), т. е. построение теории значительно упростится.

§ 6. Плоское напряженное состояние. Общий случай плоского напряженного состояния может быть исследован путем опытов с тонкостенными трубами, подвергаемыми одновременному действию растягивающей силы P_x , внутреннего давления q и крутящего момента M . Направляя оси x, y, z (1, 2, 3) соответственно по образующей, направляющей и нормали к поверхности, для напряжений и деформаций получим формулы

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{P_x}{2\pi ah}, & Y_y &= \frac{qa}{h}, & X_y &= \frac{M}{2\pi a^2 h}, & Z_z &= X_z = Y_z = 0 \\ e_{xx} &= \frac{\Delta l}{l}, & e_{yy} &= \frac{\Delta a}{a}, & e_{zz} &= \frac{\Delta h}{h}, & e_{xy} &= \frac{\varphi a}{l}, & e_{xz} &= e_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

где h, a, l — толщина стенки, средний радиус, [длина расчетного участка трубы, $\Delta h, \Delta a, \Delta l$ — их изменения, φ — угол закручивания на длине l .

Компоненты векторов напряжений и деформаций в пространстве \mathcal{E}_5 будут [при $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ и нижнем знаке в (2.6), (5.1)]

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}(X_x - \frac{1}{2}Y_y), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_y, \quad \sigma_3 = \sqrt{2}X_y, \quad \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad (6.2)$$

$$\vartheta_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}[e_{xx} - \frac{1}{2}(e_{yy} + e_{zz})], \quad \vartheta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{yy} - e_{zz}), \quad \vartheta_3 = \frac{e_{xy}}{\sqrt{2}}, \quad \vartheta_4 = \vartheta_5 = 0 \quad (6.3)$$

и, следовательно, векторы ϑ и σ расположены в трехмерной гиперплоскости пространства \mathcal{E}_5 , т. е. в обычном трехмерном евклидовом пространстве \mathcal{E}_3 .

Нагружение состоит в непрерывном изменении сил P_x, q и M или деформаций $\Delta l, \Delta a, \varphi$, или любых трех из этих величин, т. е. в конечном счете вектора ϑ , конец которого описывает траекторию нагружения.

Длина дуги траектории нагружения определяется по формуле

$$s = \int_0^t \varepsilon_u dt = \int_0^Q \sqrt{d\vartheta_1^2 + d\vartheta_2^2 + d\vartheta_3^2} \quad (6.4)$$

и ее внутренними геометрическими параметрами, кроме s , являются обычные кривизна κ и кручение $\tau_1 = \tau$, причем из формул (3.14), (3.20), (3.33) имеем

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{1}{\varepsilon_u^4} \left[\sum_1^3 \left(\frac{d^2 \vartheta_m}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{d\varepsilon_u}{dt} \right)^2 \right] = \sum_1^3 \left(\frac{d^2 \vartheta_m}{ds^2} \right)^2 \\ \tau &= \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d\vartheta}{ds}, \frac{d^2 \vartheta}{ds^2}, \frac{d^3 \vartheta}{ds^3} \right), \quad \tau_2 = \tau_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Круглая скобка в выражении τ означает детерминант третьего порядка, каждая строка которого состоит из проекций указанных в скобках векторов на соответствующее направление (первая строка имеет индекс 1 и т. д.).

Дифференцирование по s связано с дифференцированием по времени t очевидными формулами

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\varepsilon_u} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{\varepsilon_u} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\varepsilon_u} \frac{d}{dt} \right)$$

Репер P в рассматриваемом случае (плоской задачи) совпадает с обычным трехгранником Френе, его орты являются векторами касательной, главной

нормали и бинормали траектории нагружения и формулы (3.34) совпадают с известными формулами Френе

$$\frac{dp_1}{ds} = \kappa p_2, \quad \frac{dp_2}{ds} = -\kappa p_1 + \tau p_3, \quad \frac{dp_3}{ds} = -\tau p_2 \quad (6.6)$$

Если материал трубы, наряду с другими свойствами, в процессе деформации обладает упругостью на сдвиг, то условием активности процесса деформации (условием нагружения) будет $\sigma d\theta > 0$:

$$\sum \sigma_m \frac{d\theta_m}{ds} = \sigma p_1 > 0 \quad (6.7)$$

Проверка постулата изотропии сводится к экспериментальному доказательству того, что представление вектора напряжения σ в репере P (5.6), имеющее в случае плоской задачи вид:

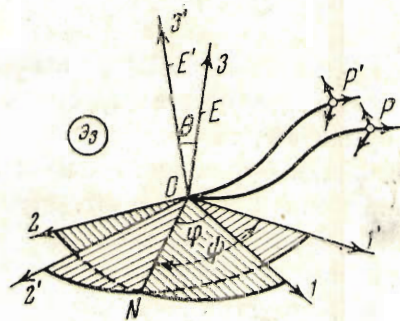
$$\sigma = S_1 p_1 + S_2 p_2 + S_3 p_3 \quad (6.8)$$

инвариантно относительно вращений или отражений и отражений траектории нагружения в \mathcal{E}_3 , т. е. что компоненты S_1, S_2, S_3 зависят только от длины дуги, кривизны и кручения и их изменений по траектории и во времени, а если материал трубы не обладает вязкостью и ползучестью, то S_m зависят только от s, κ и τ и их изменений по s в процессе нагружения.

Преобразования вращения и отражения в \mathcal{E}_3 определяются таблицей

	σ'_1, σ_1'	σ'_2, σ_2'	σ'_3, σ_3'
σ_1, σ_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
σ_2, σ_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
σ_3, σ_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(6.9)



Фиг. 2

Преобразование вращения есть поворот траектории нагружения как жесткого тела относительно начала координат, а преобразование отражения есть зеркальное отображение траектории нагружения относительно плоскости, проходящей через начало координат.

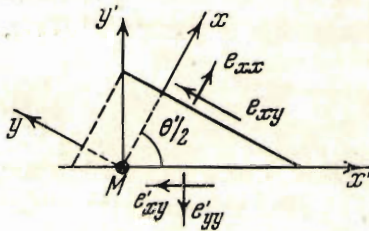
В общем случае вращения репера E относительно E' получаются три степени свободы, и потому α_{ij} (6.9) выражаются через три угла Эйлера в \mathcal{E}_3 (фиг. 2):

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, & \alpha_{12} &= \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \alpha_{13} &= -\sin \varphi \sin \psi & & \\ \alpha_{21} &= \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, & \alpha_{22} &= \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \alpha_{23} &= \cos \psi \sin \theta & & \\ \alpha_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, & \alpha_{32} &= -\cos \varphi \sin \theta, & \alpha_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \quad (6.10)$$

Вращение же E' относительно E , тождественное с преобразованием поворота осей координат x, y относительно x', y' на угол $\theta/2$ (фиг. 3), как легко видеть, определяется так:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \theta', & \alpha_{12} &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta', & \alpha_{13} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta' \\ \alpha_{21} &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta', & \alpha_{22} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos \theta', & \alpha_{23} &= \frac{1}{2} \sin \theta' \\ \alpha_{31} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta', & \alpha_{32} &= -\frac{1}{2} \sin \theta', & \alpha_{33} &= \cos \theta' \end{aligned} \quad (6.11)$$

Как видим, (6.11) получается из (6.10) при $\varphi = \psi = 1/3\pi$, $\theta' = \theta$ и при $\varphi = \psi = -1/3\pi$, $\theta' = -\theta$, т. е. репер E при этом может совершать вращение относительно узловых линий ON_1 или ON_2 , сохраняя постоянными углы собственного вращения и прецессии $\varphi = \psi = \pm 1/3\pi$ соответственно. Для таких движений постулат изотропии будет выполняться тождественно и потому в опытах его нужно проверять только на движениях, отличающихся от вращений (6.11) т. е., при φ и ψ , одновременно не равных $\pm 1/3\pi$.



Фиг. 3

Практически проверка постулата сводится к следующему: изменяем, например, деформации трубы со временем по какому-нибудь определенному закону, так что компоненты вектора деформации ε являются определенными функциями времени: $\varepsilon_m = f_m(t)$, $m = 1, 2, 3$. Из опыта находим напряжения σ , значит, вектор напряжения $\sigma_m = F_m(t)$, $m = 1, 2, 3$. После этого делаем опыт с новой трубой для чего выбираем в пределах от 0 до 2π два произвольных угла, отличных от $\varphi = \psi = \pm 1/3\pi$, и в пределах от 0 до π произвольный угол θ (например, $\varphi = 1/2\pi$, $\psi = 1/3\pi$, $\theta = 1/4\pi$) и по формулам (6.10) находим числа $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{33}$. При помощи таблицы (6.9) строим функции

$$\varepsilon_1' = \sum_{m=1}^3 \alpha_{1m} f_m(t) \equiv f_1'(t), \quad \varepsilon_2' = \dots = f_2'(t), \quad \varepsilon_3' = \dots = f_3'(t)$$

и проводим опыт, осуществляя во времени эти деформации и измеряя напряжения X_x, Y_y, X_y . По формулам (6.2) мы найдем опытные значения напряжений, которые отметим двумя штрихами:

$$\sigma_1'' = F_1''(t), \quad \sigma_2'' = F_2''(t), \quad \sigma_3'' = F_3''(t)$$

Вычислим по данным первого опыта величины

$$\sigma_1' = \sum_{m=1}^3 \alpha_{1m} F_m \equiv F_1'(t), \quad \sigma_2' = \dots = F_2'(t), \quad \sigma_3' = \dots = F_3'(t)$$

Если получим совпадения $F_m' = F_m''$ для одинаковых t , значит, постулат для выбранных φ, ψ, θ подтвержден.

При расчете степени точности этих равенств ошибки в долях единицы следует вычислять по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \frac{F_m' - F_m''}{F_u''}, & F_u'' &= \left(\sum_1^3 F_m''^2 \right)^{1/2} \\ \Delta &= \frac{F_u' - F_u''}{F_u''}, & F_u' &= \left(\sum_1^3 F_m'^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Изменяя углы φ , ψ , θ , путем ряда опытов можно проверить постулат изотропии для выбранной выше траектории нагружения $f_m(t)$; рассматривая аналогично другие траектории, можно проверить его в общем случае плоской задачи. Аналогичные испытания должны быть проведены с преобразованиями отражения. Если постулат подтвержден, значит связь между напряжениями и деформациями имеет вид (6.8) и результаты всех проведенных опытов можно использовать для установления вида функционалов S_1 , S_2 , S_3 . Заметим, что, поскольку реперы P и R связаны линейными соотношениями и коэффициенты A_{mi} являются определенными функционалами κ и τ , соотношение (6.8) может быть записано в другом виде (сохраняя прежние обозначения для новых коэффициентов):

$$\sigma = S_1 \frac{d\vartheta}{ds} + S_2 \frac{d^2\vartheta}{ds^2} + S_3 \frac{d^3\vartheta}{ds^3} \quad (6.13)$$

Если изучаемое вещество не обладает свойствами вязкости и ползучести, то S_m будут зависеть только от s , κ , τ и линейных операторов от них, являющихся дифференциальными и интегродифференциальными инвариантами типа

$$\frac{d^n \kappa}{ds^n}, \quad \frac{d^n \tau}{ds^n}, \quad \int_0^s C(s, s', \kappa, \kappa', \tau, \tau' \dots) ds'.$$

в противном случае в S_m явно войдут еще $\epsilon_u = ds/dt$ и другие временные операторы от указанных величин, а также, может быть, и время t .

Наиболее простые опыты на сложное нагружение тонкостенных труб получаются при их растяжении и кручении без внутреннего давления. В этом случае $Y_y = 0$, $e_{yy} = e_{zz} \approx -1/2 e_{xx}$ и потому векторы напряжений и деформаций изображаются в плоскости листа \mathcal{E}_2 :

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} e_{xx}, & \vartheta_3 &= \frac{e_{xy}}{\sqrt{2}}, & \vartheta_2 &= \vartheta_4 = \vartheta_5 = 0 \\ \sigma_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} X_x, & \sigma_3 &= \sqrt{2} X_y, & \sigma_2 &= \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Преобразования вращения и отражения в \mathcal{E}_2 получаются по формулам

$$\vartheta_1 = \vartheta_1' \cos \varphi \mp \vartheta_3' \sin \varphi, \quad \vartheta_3 = \vartheta_1' \sin \varphi \pm \vartheta_3' \cos \varphi \quad (6.15)$$

причем верхний знак соответствует вращению на угол φ , нижний — отражению относительно линии, повернутой на угол $\varphi/2$. Преобразования поворотов осей x , y вида (6.11) выводят явление из пространства \mathcal{E}_2 в про-

странство \mathcal{E}_3 и потому всякое нетождественное преобразование (6.15) существенно для проверки постулата изотропии.

Формулы (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) в \mathcal{E}_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} \varrho_u &= \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_3^2}, & \sigma_u &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2} \\ ds &= \varepsilon_u dt = \sqrt{d\vartheta_1^2 + d\vartheta_3^2}, & s &= \int_0^t \varepsilon_u dt \\ \kappa^2 &= \left(\frac{d^2\vartheta_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\vartheta_3}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon_u^4} \left[\left(\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\vartheta_3}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d\varepsilon_u}{dt}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\tau \equiv \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{ds} = \kappa \mathbf{p}_2 = \frac{d^2\vartheta}{ds^2}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{ds} = -\kappa \mathbf{p}_1 = -\kappa \frac{d\vartheta}{ds}$$

Если постулат изотропии справедлив и репер $\mathbf{P}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ существует и непрерывен на траектории нагружения, то общий вид связи между напряжениями и деформациями (6.7) будет

$$\sigma = S_1 \mathbf{p}_1 + S_2 \mathbf{p}_2 = S_1 \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{1}{\kappa} S_2 \frac{d^2\vartheta}{ds^2} \quad (6.17)$$

где S_1, S_2 для веществ, не обладающих вязкостью и наследственностью, суть функционалы только кривизны траектории κ и длины дуги s . Если же траектория нагружения есть аналитическая кривая, то S_1, S_2 с достаточной точностью можно считать функциями только $s, \kappa, d\kappa/ds, \dots, d^n\kappa/ds^n$, где n — конечно.

Если траектория нагружения не является аналитической и $d\vartheta/ds, d^2\vartheta/ds^2$ имеют разрывы в конечном числе [точек (ϑ — непрерывен)], то достаточно общий истокообразный вид представления σ в репере \mathbf{P} будет

$$\frac{\sigma}{\sigma_u} = \int_0^s B(\kappa, \kappa', s, s') \mathbf{p}_1(s') ds' \quad (6.18)$$

причем B нормирована

$$\left(\int_0^s B \mathbf{p}_1(s') ds'\right)^2 = \left(\int_0^Q B (d\vartheta_1')^2\right)^2 + \left(\int_0^Q B (d\vartheta_3')^2\right)^2 = 1 \quad (6.19)$$

и σ_u — функционал κ и s .

Представляет интерес более простой случай, когда

$$B = N(\kappa, \kappa') K(s - s'), \quad \sigma_u = \sigma_u(\lambda) \quad (6.20)$$

$$\lambda = \int_0^s G(\kappa, \kappa') L(s - s') ds'$$

Предварительные опыты показывают, что основные явления пластичности при сложном нагружении тонкостенных труб могут быть записаны в таком виде даже в случае, если на траектории нагружения имеются угловые точки.

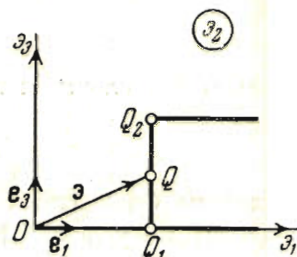
Рассмотрим трубы из первоначально изотропного и однородного вещества, не обладающего вязкостью, ползучестью и упрочнением, и возьмем B в еще более простом виде:

$$B = N(\kappa') K(s - s') \quad (6.21)$$

так что

$$\frac{\sigma}{\sigma_u} = \int_0^s N(\kappa') K(s - s') d\alpha' \quad (6.22)$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2 = \text{const}$$



Фиг. 4

Вид ядра $K(s - s')$ можно найти из опыта сложного нагружения трубы по прямолинейной траектории с угловыми точками, который для краткости назовем K -опытом. Кривизна κ в K -опытах равна нулю всюду, исключая угловые точки. На фиг. 4 изображен K -опыт, причем нагружение началось с растяжения от O до Q_1 , после чего удлинение трубы оставляется постоянным ($\vartheta_1 = s_0 = \text{const}$).

Для $s < s_0$ имеем $\kappa' = 0$, $d\alpha' = e_1 d\alpha_1'$, и потому из (6.22) имеем $\sigma_3 = 0$.

Для $s_0 < s < s_0 + \vartheta_3$ имеем $\kappa' = 0$, причем при $s' < s_0$, $d\alpha = e_1 d\alpha_1'$, при $s' > s_0$, $d\alpha = e_3 d\alpha_3'$. Отношение σ_1 к σ_3 согласно (6.22) не будет содержать $N(0)$, и мы получим

$$(\sigma_1 + \sigma_3) K_1(s - s_0) = \sigma_3 K_1(s), \quad K_1(s) = \int_0^s K(z) dz \quad (6.23)$$

Опыты с пластичными материалами показывают, что после некоторого угла закручивания, т. е. начиная с некоторого $s - s_0 \geq h$, растягивающее напряжение σ_1 в трубе пропадает, т. е. явление, которое после точки Q_1 в вязкой жидкости наступает сразу, в пластичных веществах наступает с некоторым запаздыванием. Это — совершенно общее свойство пластических веществ.

Следовательно, если $s \geq h$, то $K_1(s) = K_1(h) = \text{const}$, и так как $s - s_0 = \vartheta_3$, то из (6.23) имеем

$$K_1(\vartheta_3) = K_1(h) \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_3}$$

$$K(\vartheta_3) = \frac{K_1(h)}{(\sigma_1 + \sigma_3)^2} \left(\sigma_1 \frac{d\sigma_3}{d\vartheta_3} - \sigma_3 \frac{d\sigma_1}{d\vartheta_3} \right) \quad (6.24)$$

Поскольку σ_1, σ_3 как функции s или ϑ_3 известны из K -опыта, то (6.24) определяет ядро $K(s - s')$ с точностью до постоянного множителя, который связан с нормировкой $N(0) K_1(h)$ по формуле (6.19).

Величина следа запаздывания h для различных металлов составляет несколько «упругих деформаций» $e_s = \sigma_s / E$ и является основным линейным масштабом процесса сложного нагружения.

Нагружение является плавным, если

$$R \equiv \frac{1}{\kappa} \gg h \quad (6.25)$$

В случае плавных сложных нагружений связь между σ и ε может быть взята в виде (6.17) и даже в виде, принятом в теории Сен-Венана:

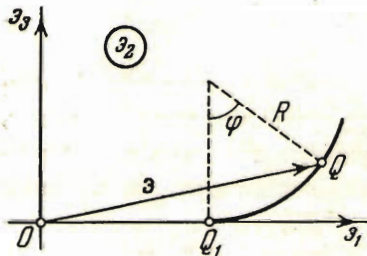
$$\frac{\sigma}{\sigma_u} = P_1 \equiv \frac{d\varepsilon}{ds} \quad (6.26)$$

и только для сложных нагружений, характеризующихся кривизной

$$R \equiv \frac{1}{\kappa} \sim h \quad (6.27)$$

необходима более сложная теория пластичности.

Учитывая условие пластичности $\sigma_u = \text{const}$, формулу (6.24) можно упростить:



Фиг. 5

$$K(\vartheta_3) = K_1(h) \frac{\sigma_u^2}{\sigma_1(\sigma_u^2 + 2\sigma_1\sigma_3)} \frac{d\sigma_3}{d\vartheta_3} \quad (6.28)$$

Продолжив K -опыт и проводя траекторию нагружения за пределы точки Q_2 , причем $Q_1 Q_2 > h$, для ядра K найдем новое выражение:

$$K(\vartheta_1) = -K_1(h) \frac{\sigma_u^2}{\sigma_3(\sigma_u^2 + 2\sigma_1\sigma_3)} \frac{d\sigma_1}{d\vartheta_1} \quad (6.29)$$

Если значения (6.28) и (6.29) совпадут с достаточной точностью, значит, гипотеза (6.22) подтверждается.

Для определения функции $N(\kappa)$ необходимо провести опыты на сложное нагружение другого характера, и их мы будем называть N -опытом. Путем простого нагружения дадим деформацию до точки Q_1 (фиг. 5), после чего проведем нагружение по кругу радиуса $R = 1/\kappa = \text{const}$.

Если $OQ_1 = s_0 > h$, $\varphi < \kappa h$, то из (6.22) легко получить формулу

$$\frac{N(\kappa)}{N(0)} = \frac{K_1(h) - K_1(R\varphi)}{K_2(R\varphi) \sin(\varphi - \psi) - K_3(R\varphi) \cos(\varphi - \psi)} \quad (6.30)$$

$$R\varphi = s - s_0, \quad \sigma_1 = \sigma_u \cos \psi, \quad \sigma_3 = \sigma_u \sin \psi$$

$$K_2(R\varphi) = \int_0^{R\varphi} K(z) \cos(\kappa z) dz, \quad K_3(R\varphi) = \int_0^{R\varphi} K(z) \sin(\kappa z) dz$$

Из опытов получим ψ как функцию φ , причем, поскольку в опыте $\kappa = \text{const}$, то входящая в выражении $N(\kappa)$ дробь не должна зависеть от φ .

Повторяя подобные опыты при различных R , получим график зависимости N от κ , если только формула (6.30) не будет противоречить N -опытам.

Поступила 24 IX 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ГТТИ, 1948.
2. Сборник статей Теория пластичности под ред. Ю. Н. Работнова. ГИИЛ, 1948.
3. Карган Э. Теория спинов. ГИИЛ, 1947.