

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ

Л. А. Дорфман

(Ленинград)

В статье Г. Ю. Степанова, помещенной в т. XVII, вып. 6 настоящего журнала [1], дается решение задачи о построении решетки с распределением скорости, заданным на окружности решетки кругов в случае дозвукового потенциального течения газа.

В практике отработки решеток профилей распределение скоростей задается по поверхности профиля и требуется найти соответствующую форму профиля.

Приведем решение указанной обратной задачи для решетки профилей. При этом, как и в работе [1], используется известное приближение Чаплыгина, разработанное и примененное к решению задач обтекания Л. И. Седовым [2].

Разыскиваем в плоскости  $z$  решетку профилей с шагом  $i\pi$ , которая имела бы заданное распределение скоростей  $v(s)$  по профилю, а также заданные скорости  $v_1 e^{i\alpha_1}$  и  $v_2 e^{i\alpha_2}$  в потоке газа в бесконечности до решетки и за ней. Величины скоростей  $v_1$  и  $v_2$  при этом связаны уравнением неразрывности

$$v_1 \rho_1 \cos \alpha_1 = v_2 \rho_2 \cos \alpha_2 \quad (1)$$

и должны быть согласованы с распределением скоростей по величине циркуляции

$$\Gamma = \pi (v_2 \sin \alpha_2 - v_1 \sin \alpha_1) = \int_0^L v(s) ds \quad (2)$$

Связь между плотностью  $\rho$  и скоростью  $v$  в приближении Чаплыгина имеет вид:

$$v^2 = a_0^2 \left[ \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 - 1 \right] \quad (3)$$

где постоянная  $a_0$  выбирается из условия наилучшего приближения этой связи к физическим условиям задачи.

Газовому потоку в плоскости  $z = x + iy$  (фиг. 1) ставится в соответствие фиктивное движение несжимаемой жидкости в плоскости  $t$ , так что в соответствующих точках равны между собой (с точностью до постоянного слагаемого) комплексные потенциалы  $w$  и углы наклона  $\alpha$  скоростей к действительной оси, а величины скоростей связаны соотношением

$$v = \frac{V}{1 - \lambda V^2} \quad \left( \lambda = \frac{1}{4a_0^2} \right) \quad (4)$$

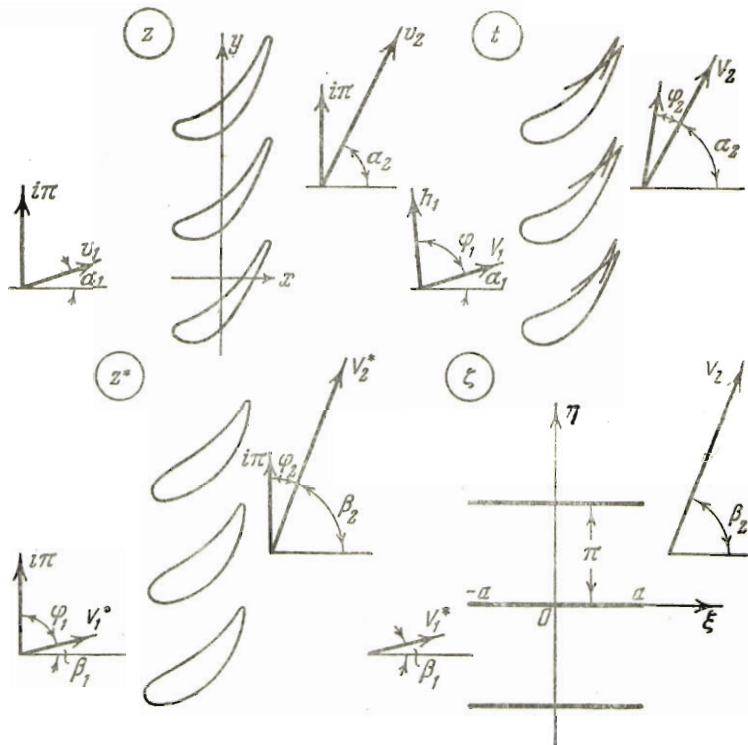
где  $V$  — скорость в плоскости  $t$ .

Тогда комплексные координаты  $z$  и  $t$  связаны формулой

$$dz = dt - \lambda \overline{\left( \frac{dw}{dt} \right)^2} dt \quad \left( \frac{dw}{dt} = \bar{V} = V e^{-i\alpha} \right) \quad (5)$$

Применим метод Л. И. Седова [2]. Введем комплексное переменное  $z^*$ , определив функцию  $t(z^*)$  так, чтобы внешность искомой решетки в плоскости  $z$  отобрази-

лась взаимнооднозначно на внешность некоторой решетки профилей в плоскости  $z^*$  с тем же шагом  $i\pi$ . О выборе этой решетки будет сказано ниже. В плоскости  $z^*$  комплексный потенциал  $w(z^*) = \varphi + i\psi$  определяет собой течение несжимаемой жидкости через эту решетку профилей. Образ решетки в плоскости  $t$  имеет различ-



Фиг. 1

ные периоды  $h_1$  и  $h_2$ , величины которых определяются применением формулы (5) в бесконечностях справа и слева от решетки:

$$i\pi = h_1 - \lambda (V_1 e^{i\alpha_1})^2 \bar{h}_1 = h_2 - \lambda (V_2 e^{i\alpha_2})^2 \bar{h}_2$$

что дает [1]

$$h_1 = \frac{1 - \lambda (V_1 e^{i\alpha_1})^2}{1 - \lambda^2 V_1^4} i\pi, \quad h_2 = \frac{1 - \lambda (V_2 e^{i\alpha_2})^2}{1 - \lambda^2 V_2^4} i\pi \quad (6)$$

Для того чтобы соответствие плоскостей  $z$  и  $z^*$  было взаимнооднозначным, необходимо и достаточно, чтобы периоды решетки в плоскости  $z^*$  слева и справа совпадали и были равны, например,  $i\pi$ ; при этом будет

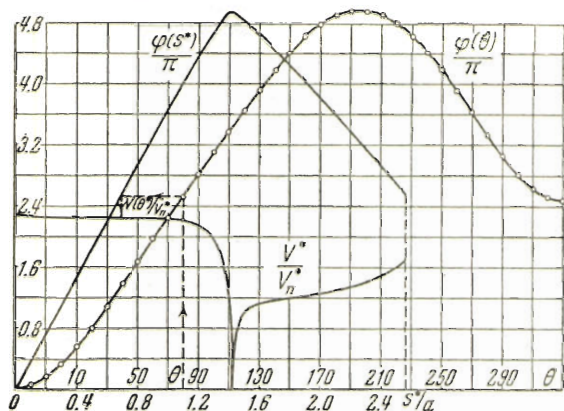
$$\frac{dt}{dz^*} \Big|_{z^* \rightarrow -\infty} = \frac{h_1}{i\pi}, \quad \frac{dt}{dz^*} \Big|_{z^* \rightarrow +\infty} = \frac{h_2}{i\pi} \quad (7)$$

Тогда соответствующее течение несжимаемой жидкости в плоскости  $z^*$  имеет на бесконечностях скорости:

$$\bar{V}_1^* = \frac{dw}{dz^*} \Big|_{z^* \rightarrow -\infty} = \frac{h_1}{i\pi} \bar{V}_1, \quad \bar{V}_2^* = \frac{dw}{dz^*} \Big|_{z^* \rightarrow +\infty} = \frac{h_2}{i\pi} \bar{V}_2$$

Отсюда следует, что в плоскостях  $t$  и  $z^*$  равны между собой углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  между направлениями скоростей на бесконечностях и соответствующих им периодов (фиг. 1).

Отобразим внешность решетки профилей в плоскости  $z^*$  на внешность решетки пластин без выноса в плоскости  $\zeta$ . Значение параметра  $a$  этой решетки пластин определяется следующим образом.



Фиг. 2

В соответствующих точках плоскостей  $z$ ,  $z^*$  и  $\zeta$  потенциалы между собой равны, распределение потенциалов по искомому профилю определяется выражением

$$\varphi(s) = \int_{\varphi}^s v(s) ds \quad (9)$$

Поэтому циркуляция  $\Gamma$  в плоскости  $z^*$  и  $\zeta$ , а также приращение  $\Delta$  потенциалов между точками разветвления потока в этих плоскостях равны соответствующим величинам в плоскости  $z$ :

$$\Gamma = \int_0^L v(s) ds, \quad \Delta = \varphi_{сх} - \varphi_{вх} = \int_{s_{вх}}^{s_{сх}} v(s) ds$$

Соответствующие значения углов потока  $\beta_1$  и  $\beta_2$  в бесконечностях в плоскостях  $z^*$  и  $\zeta$  находятся при помощи формул (6).

Определив величины  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\bar{\Gamma} = \Gamma : \pi V_n^*$ ,  $\bar{\Delta} = \Delta : \pi V_n^*$ , где  $V_n^*$  — расходящая составляющая скорости течения от решетки в плоскости  $z^*$  (и  $\zeta$ ), находим соответствующее значение параметра  $a$  из уравнений [8]

$$\operatorname{ch} a = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi + (\operatorname{tg} \beta_{\infty} \operatorname{sh} \xi + \frac{1}{2} \bar{\Gamma} \operatorname{ch} \xi)^2} \quad \xi = \xi_{сх}, \quad \bar{\xi} = \xi_{вх} \quad (10)$$

$$\bar{\Delta} = \varphi_{сх} - \varphi_{вх} \quad (11)$$

где

$$\varphi_{\pm} = \xi \pm \operatorname{tg} \beta_{\infty} \operatorname{arc} \cos \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{ch} a} \pm \frac{\bar{\Gamma}}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{sh} a}, \quad \xi = a \cos \theta \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \beta_{\infty} = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)$$

Определив  $a$ , вычисляем распределение потенциалов по пластине  $\varphi(\theta)$  и, сопоставив его с  $\varphi(s)$ , а также с  $\varphi(s^*)$ , находим из условия равенства потенциалов в соответственных точках (фиг. 2) значения  $v(\theta)$ ,  $V^*(\theta)$ .

Для вычисления координат точек профиля

$$x(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\varphi/d\theta}{v(\theta)} \cos \beta(\theta) d\theta, \quad y(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\varphi/d\theta}{v(\theta)} \sin \beta(\theta) d\theta \quad (13)$$

достаточно еще определить соответствующие углы  $\beta(\theta)$  наклона касательной к профилю искомой решетки в соответствующих точках. Для их определения рассмотрим аналитическую вне решетки пластин функцию

$$F(\zeta) = \ln \frac{dt}{dz^*} = \ln \left| \frac{dt}{dz^*} \right| + i \arg \frac{dt}{dz^*} = S(\xi, \eta) + iT(\xi, \eta) \quad (14)$$

При этом величина  $S(\xi, \eta)$  известна на поверхности пластины, так как

$$\left| \frac{dt}{dz^*} \right| = \frac{V^*(\theta)}{V(\theta)}, \quad (15)$$

С другой стороны

$$\arg \frac{dt}{dz^*} = \arg \frac{dz}{dz^*} = \beta(\theta) - \beta^*(\theta) \quad (16)$$

Таким образом, для решения задачи следует найти по известным предельным значениям  $S(\xi)$  действительной части аналитической функции  $F(\zeta)$  предельные значения  $T(\xi)$  ее мнимой части. Функция  $F(\zeta)$  принимает в бесконечностях справа и слева от решетки различные значения:

$$F(-\infty) = \ln \frac{h_1}{i\pi}, \quad F(+\infty) = \ln \frac{h_2}{i\pi} \quad (17)$$

В этом случае<sup>[3]</sup>

$$T_{\pm}(\xi_0) = T_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a (S_+ - S_-) \operatorname{cth}(\xi - \xi_0) d\xi \mp \mp \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 \xi_0}}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{S_+ + S_-}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 \xi}} \frac{d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)} \quad (18)$$

где  $T_0$  — действительная часть постоянной.

$$F_0 = \frac{1}{2} [F(+\infty) + F(-\infty)] = S_0 + iT_0 \quad (19)$$

Интегралы формулы (18) вычисляются способом, изложенным в [3].

В отношении выбора решетки профилей в плоскости  $z^*$  следует заметить, что достаточно взять любую решетку, построенную для обтекания с углами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и имеющую соответствующий параметр  $a$ , равный найденному выше по условиям задачи.

В заключение заметим, что если метод согласования распределения скорости с параметрами потока вдали от решетки, принятый в [1], приводит к построению решетки с распределением скоростей, которое может значительно отличаться от заданного (см. фиг. 6 статьи [1]), то предложенный в настоящей статье метод дает строгое решение обратной задачи.

Поступила 8 VI 1954

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Построение решетки с распределением скорости, заданным на окружности решетки кругов. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
3. Дорфман Л. А. Расчет безвихревого обтекания решеток профилей и построение решеток по заданному распределению скоростей на профилях. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.