

ОБ УДАРЕ ЭЛЛИпсоиДА ВРАЩЕНИЯ, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ
ВЕСЬМА ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Э. Л. Блох

(Москва)

В работе [1] дано решение задачи о горизонтальном ударе об идеальную жидкость плавающего на ее поверхности эллипсоида вращения.

Если рассматривать движение с весьма большим ускорением твердого тела, плавающего на поверхности тяжелой жидкости, то указанную выше задачу можно трактовать как предельный случай, соответствующий невесомой жидкости, при котором граничное условие для потенциала скорости возмущенного движения жидкости на ее поверхности принимает вид: $\varphi = 0$. Однако на практике значительный интерес представляет также и другой предельный случай, соответствующий весьма тяжелой жидкости, при котором граничное условие на поверхности имеет вид: $\partial\varphi/\partial z = 0$, где z — ось, нормальная поверхности жидкости.

Так как условие $\varphi = 0$ соответствует числу Фруда, равному ∞ , а условие $\partial\varphi/\partial z = 0$ числу Фруда, равному нулю, то совокупность результатов, отвечающих этим предельным случаям, позволяет судить о возможном диапазоне изменения коэффициентов присоединенных масс при ударе твердого тела, плавающего на поверхности тяжелой жидкости, когда число Фруда отлично от нуля и бесконечности.

При граничном условии $(\partial\varphi/\partial z)_{z=0}$ потенциал φ , так же как и при условии $\varphi = 0$ при $z = 0$, может быть аналитически продолжен сквозь поверхность жидкости, только в данном случае в точках, симметричных относительно нее, потенциал φ принимает одинаковые значения, т. е.

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, -z) \quad (0.1)$$

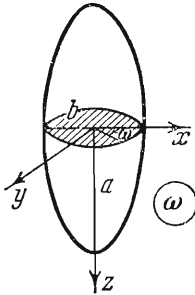
В этом случае для движений тела, которые в работе [1] были названы горизонтальными, т. е. поступательного движения вдоль осей x и y , расположенных на поверхности жидкости, и вращения тела вокруг оси z , задача сводится к полностью изученной [2] для эллипсоида вращения задаче о движении его в безграничной массе жидкости. Что касается движений, которые будем называть вертикальными, т. е. поступательного движения вдоль оси z и вращения вокруг осей x и y , то для них задачу следует решать так же, как решалась [1] задача о горизонтальных движениях при условии $\varphi = 0$ при $z = 0$. Продолжив аналитически потенциал φ сквозь поверхность жидкости, будем искать его во всей области D , внешней по отношению к телу, образованному смоченной его частью и ее зеркальным изображением относительно поверхности жидкости.

На смоченной поверхности тела должно выполняться условие $\partial\varphi/\partial n = V_n(M)$, где n — нормаль, направленная внутрь жидкости, $V_n(M)$ — проекция на нормаль скорости точек M , принадлежащих смоченной поверхности тела, поэтому в силу условия (0.1) для полной границы области D получаем условие

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_M = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n^1}\right)_{M^1} = V_n(M)$$

где M^1 — точки, симметричные точкам M относительно поверхности жидкости.

1. Эллипсоид, экваториальная плоскость которого совпадает с поверхностью жидкости. При изучении вертикальных движений эллипсоида вращения, экваториальная плоскость которого совпадает с поверхностью жидкости (фиг. 1), достаточно рассмотреть поступательное движение вдоль оси z и вращение вокруг одной из осей x и y . Вводя эллиптические координаты



Фиг. 1

$$\begin{aligned} x &= \kappa \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{\zeta^2 - 1} \cos \omega \\ y &= \kappa \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{\zeta^2 - 1} \sin \omega \\ z &= \kappa \zeta \mu \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \zeta > 1, \kappa = \sqrt{a^2 - b^2} \\ -1 \leq \mu \leq 1 \\ 0 \leq \omega \leq 2\pi \end{array} \right)$$

представим потенциал φ возмущенного движения жидкости, вызванного внезапным движением удлинённого эллипсоида ($a/b > 1$), в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) Q_n^m(\zeta) P_n^m(\mu) \quad (1.1)$$

где $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\zeta)$ — присоединённые функции Лежандра первого и второго рода. На поверхности эллипсоида $^{[1]} \zeta = \zeta_0$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \mu^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) \dot{Q}_n^m(\zeta_0) P_n^m(\mu) \dots \quad (1.2)$$

где

$$\dot{Q}_n^m = \frac{dQ_n^m}{d\zeta}, \quad \zeta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

При поступательном движении эллипсоида вдоль оси z со скоростью U_0 скорость $V_n(M)$ определяется равенством

$$V_n(M) = U_0 \cos \gamma = U_0 \mu \sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \mu^2}} \quad (\mu > 0)$$

и так как при $\mu < 0$ правая часть этого равенства меняет знак, то условие (0.2) можно записать в виде

$$\sum \sum (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) \dot{Q}_n^m(\zeta_0) P_n^m(\mu) = \kappa U_0 \mu \operatorname{sign} \mu$$

где $\operatorname{sign} \mu = 1$ при $\mu > 0$ и $\operatorname{sign} \mu = -1$ при $\mu < 0$. Отсюда следует, что $B_n^m = 0$ для всех n , а $A_n^m = 0$ для $m > 0$. Тогда, обозначая $A_n^0 = A_n$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \dot{Q}_n(\zeta_0) P_n(\mu) = \kappa U_0 \mu \operatorname{sign} \mu \quad \left(\begin{array}{l} P_n(\mu) = P_n^0(\mu) \\ Q_n(\zeta) = Q_n^0(\zeta) \end{array} \right)$$

и, значит,

$$A_{2\nu+1} = 0, \quad A_{2\nu} = \frac{4\nu+1}{Q_{2\nu}(\zeta_0)} U_0 \kappa J_{2\nu}, \quad J_{2\nu} = \int_0^1 \mu P_{2\nu}(\mu) d\mu = \frac{(-1)^{\nu+1} (2\nu+1)!!}{4\nu^2 - 1} \frac{(2\nu+2)!!}{(2\nu+2)!!}$$

Определив коэффициенты A_n^m и B_n^m и воспользовавшись известными выражениями для коэффициентов присоединённой массы, после вычислений получаем

$$\lambda_z = 3 \frac{b^2}{a^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu+1}{(4\nu^2-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!} \right]^2 F_{2\nu}(\zeta_0), \quad F_{2\nu}(\zeta_0) = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} \frac{Q_{2\nu}(\zeta_0)}{\dot{Q}_{2\nu}(\zeta_0)}$$

Так как $Q_n(\zeta) \rightarrow \frac{n!}{(2n+1)!!} \frac{1}{\zeta^{n+1}}$ при $\zeta \rightarrow \infty$, то $F_{2\nu}(\zeta_0) \rightarrow \frac{1}{2\nu+1}$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Таким образом, для сферы ($\zeta_0 = \infty$) коэффициент присоединённой массы λ_z равен:

$$\lambda_z = 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu+1}{(2\nu+1)(4\nu^2-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!} \right]^2 = 0.8308$$

Так как $Q_n(\zeta) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\zeta-1}$ при $\zeta \rightarrow 1$, то $F_{2\nu}(\zeta_0) \rightarrow \ln \frac{a}{b}$ при $\zeta \rightarrow 1$.

Таким образом, для эллипсоида весьма большого удлинения ($a \gg b$)

$$\lambda_z = 3 \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu+1}{(4\nu^2-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!} \right]^2 \approx \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b}$$

Рассматривая внезапное вращение эллипсоида вокруг оси y с угловой скоростью Ω , получим для скорости $V_n(M)$ выражение

$$V_n(M) = \kappa \Omega \frac{\mu \sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{\zeta_0^2-\mu^2}} \cos \omega \quad (\mu > 0)$$

Таким образом, для этого случая условие (0.2) можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) \dot{Q}_n^m(\zeta_0) P_n^m(\mu) = \kappa^2 \Omega \frac{\mu \sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{\zeta_0^2-1}} \cos \omega \operatorname{sign} \mu$$

Откуда получаем, что $B_n^m = 0$ для всех n , $A_n^m = 0$ для $m \neq 1$,

$$A_{2\nu}^1 = 0 \quad A_{2\nu+1}^1 = \kappa^2 \Omega \frac{(2\nu)!}{(2\nu+2)!} \frac{4\nu+3}{\dot{Q}_{2\nu+1}^1(\zeta_0)} \frac{1}{\sqrt{\zeta_0^2-1}} J_{2\nu+1}$$

где

$$J_{2\nu+1} = \int_0^1 \mu \sqrt{1-\mu^2} P_{2\nu+1}^1(\mu) d\mu = (-1)^{\nu+1} \frac{2\nu+2}{2\nu-1} \frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+4)!!}$$

Определив A_n^m и B_n^m , после вычислений находим величину коэффициента присоединенной массы λ_{yy} , равного в силу симметрии коэффициенту λ_{xx} :

$$\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \frac{15}{2} \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2(a^2+b^2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu+3}{4\nu^2-1} \frac{2\nu+2}{2\nu-1} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+4)!!} \right]^2 F_{2\nu+1}^1(\zeta_0)$$

где

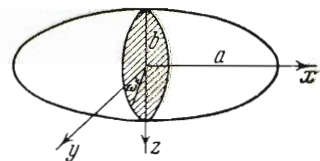
$$F_{2\nu+1}^1 = - \frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} \frac{Q_{2\nu+1}^1(\zeta_0)}{Q_{2\nu+1}^1(\zeta_0)}$$

Для сферы ($a=b$), естественно, получаем, что $\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = 0$, а для эллипсоида весьма большого удлинения, когда $\zeta_0 \rightarrow 1$ и $a \gg b$, в силу $F_{2\nu+1}^1(1) = 1$ находим

$$\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \frac{15}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu+3}{4\nu^2-1} \frac{2\nu+2}{2\nu-1} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+4)!!} \right]^2 = 1$$

2. Эллипсоид, экваториальная плоскость которого нормальна поверхности жидкости. При изучении вертикальных движений эллипсоида вращения, экваториальная плоскость которого нормальна поверхности жидкости (фиг. 2), достаточно рассмотреть поступательное движение вдоль оси z и вращение вокруг оси y , так как вращение вокруг оси x не вызывает возмущенного движения жидкости. В этом случае для удлиненного эллипсоида $a > b$ вводим эллиптические координаты ζ, μ, ω соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \kappa \zeta \mu \\ y &= \kappa \sqrt{\zeta^2-1} \sqrt{1-\mu^2} \cos \omega \\ z &= \kappa \sqrt{\zeta^2-1} \sqrt{1-\mu^2} \sin \omega \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} \zeta > 1, \quad \kappa = \sqrt{a-b^2} \\ -1 \leq \mu \leq 1 \\ 0 \leq \omega \leq 2\pi \end{aligned} \right)$$



Фиг. 2

Потенциал скорости ϕ и его нормальная производная на поверхности эллипсоида $\partial\phi/\partial n$ поперекнему выражаются соотношениями (1.1) и (1.2). При поступательном движении эллипсоида вдоль оси z со скоростью U_0 скорость $V_n(M)$ равна

$$V_n(M) = U_0 \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta_0^2-\mu^2}} \zeta_0 \sin \omega$$

и так как при $\omega > \pi$ правая часть меняет знак, то (0.2) можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega] \dot{Q}_n^m(\zeta_0) P_n^m(\mu) = \\ = \kappa U_0 \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega \operatorname{sign} \omega$$

где $\operatorname{sign} \omega = 1$ при $0 < \omega < \pi$, $\operatorname{sign} \omega = -1$ при $\pi < \omega < 2\pi$. Представляя $\operatorname{sign} \omega$ в виде

$$\operatorname{sign} \omega = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\omega}{2k+1}$$

получаем для определения A_n^m и B_n^m условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega] \dot{Q}_n^m(\zeta_0) P_n^m(\mu) = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{\kappa U_0 \zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \sqrt{1 - \mu^2} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega}{4k^2 - 1} \right]$$

Откуда следует, что $B_n^m = 0$ и $A_n^{2k+1} = 0$ для всех n и

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \dot{Q}_n(\zeta_0) P_n(\mu) = \frac{2}{\pi} \kappa U_0 \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \sqrt{1 - \mu^2} \\ \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{2k} \dot{Q}_n^{2k}(\zeta_0) P_n^{2k}(\mu) = -\frac{4}{\pi} \kappa U_0 \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{4k^2 - 1} \quad (k \geq 1)$$

и, значит,

$$A_{2\nu+1} = A_{2\nu+1}^{2k} = 0 \quad A_{2\nu} = \frac{2}{\pi} \kappa U_0 \frac{4\nu+1}{\dot{Q}_{2\nu}(\zeta_0)} \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} I_{2\nu} \\ A_{2\nu}^{2k} = -\frac{4}{\pi} \kappa U_0 \frac{4\nu+1}{4k^2 - 1} \frac{(2\nu - 2k)!}{(2\nu + 2k)!} \frac{\zeta_0}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k}(\zeta_0) \sqrt{\zeta_0^2 - 1}} J_{2\nu}^{2k}$$

где

$$J_{2\nu}^{2k} = \int_0^1 \sqrt{1 - \mu^2} P_{2\nu}^{2k}(\mu) d\mu = \frac{\pi}{2} \frac{4k^2 - 1}{2\nu - 1} \frac{(2\nu - 1)!!}{(2\nu + 2)!!} \frac{(2\nu + 2k - 1)!!}{(2\nu - 2k)!!} \\ I_{2\nu} = J_{2\nu}^{2k} \quad \text{при } k = 0$$

Вычисляя теперь коэффициент присоединенной массы λ_z , получаем

$$\lambda_z = 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu+1}{(2\nu+1)(4\nu^2-1)^2} \left[\frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu+2)!!} \right]^2 \alpha_{\nu}(\zeta_0) \quad (2.1)$$

где

$$\alpha_0(\zeta_0) = F_0(\zeta_0) \\ \alpha_{\nu}(\zeta_0) = (2\nu+1) \left\{ \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 F_{2\nu} + 2 \sum_{k=1}^{\nu} \frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!} \frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!} F_{2\nu}^{2k} \right\}, \\ F_{2\nu} = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 - 1} \frac{Q_{2\nu}(\zeta_0)}{Q_{2\nu}(\zeta_0)}, \quad F_{2\nu}^{2k} = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 - 1} \frac{Q_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)}{Q_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)} \quad (\nu \geq 1)$$

При $\zeta_0 \rightarrow \infty$, когда эллипсоид вырождается в сферу $F_{2\nu} = F_{2\nu}^{2k} = \frac{1}{2\nu+1}$ и

$$\alpha_{\nu}(\infty) = \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 + 2 \sum_{k=1}^{\nu} \frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!} \frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}$$

Непосредственно вычисляя стоящую в правой части конечную сумму для первых пяти значений ν , находим, что $\alpha_\nu(\infty)$ точно равно единице при $\nu \leq 5$. Так как при $\alpha_\nu(\infty) = 1$ приходим к полученному выше выражению для λ_z сферы, следует ожидать, что $\alpha_\nu(\infty) = 1$ и для всех значений ν .

Для эллипсоида весьма большого удлинения, когда $\zeta_0 \rightarrow 1$:

$$F_{2\nu}(\zeta_0) \rightarrow \ln \frac{a}{b}, \quad F_{2\nu}^{2k} \rightarrow \frac{1}{2k}$$

и коэффициент λ_z неограниченно растет с увеличением удлинения эллипсоида a/b .

При вращении эллипсоида вокруг оси y с угловой скоростью Ω

$$V_n(M) = \frac{\kappa \Omega}{\sqrt{\zeta_0^2 - \mu^2}} \mu \sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega$$

и условие (0.2) после соответствующих преобразований принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) \dot{Q}_n^m(\zeta_0) P_n^m(\mu) = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{\kappa^2 \Omega}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \mu \sqrt{1 - \mu^2} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega}{4k^2 - 1} \right] \end{aligned}$$

откуда следует, что $B_n^m = 0$ и $A_n^{2k+1} = 0$ для всех n и

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \dot{Q}_n(\zeta_0) P_n(\mu) &= \frac{2}{\pi} \frac{\kappa^2 \Omega}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \mu \sqrt{1 - \mu^2} \\ \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{2k} \dot{Q}_n^{2k}(\zeta_0) P_n^{2k}(\mu) &= -\frac{4}{\pi} \frac{\kappa^2 \Omega}{\sqrt{\zeta_0^2 - 1}} \frac{\mu \sqrt{1 - \mu^2}}{4k^2 - 1} \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} A_{2\nu} = A_{2\nu}^{2k} = 0 \\ A_{2\nu+1} = \frac{2}{\pi} \kappa^2 \Omega \frac{4\nu + 3}{\dot{Q}_{2\nu+1}(\zeta_0) \sqrt{\zeta_0^2 - 1}} I_{2\nu+1} \\ A_{2\nu+1}^{2k} = -\frac{4}{\pi} \kappa^2 \Omega \frac{4\nu + 3}{4k^2 - 1} \frac{(2\nu - 2k + 1)!}{(2\nu + 2k + 1)!} \frac{1}{\dot{Q}_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0) \sqrt{\zeta_0^2 - 1}} J_{2\nu+1}^{2k} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_{2\nu+1}^{2k} &= \int_0^1 \mu \sqrt{1 - \mu^2} P_{2\nu+1}^{2k}(\mu) d\mu = \frac{\pi}{2} \frac{4k^2 - 1}{2\nu - 1} \frac{(2\nu - 1)!!}{(2\nu + 4)!!} \frac{(2\nu + 2k + 1)!!}{-(2\nu - 2k)!!} \\ I_{2\nu+1} &= J_{2\nu+1}^{2k} \quad \text{при } k = 0 \end{aligned}$$

Определяя теперь коэффициент присоединенной массы, после соответствующих вычислений получим

$$\lambda_{yy} = 15 \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2(a^2 + b^2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4\nu + 3}{(2\nu - 1)^2} \left[\frac{(2\nu - 1)!!}{(2\nu + 4)!!} \right]^2 \beta_\nu(\zeta_0)$$

где

$$\beta_0(\zeta_0) = F_1(\zeta_0)$$

$$\beta_\nu(\zeta_0) = \left[\frac{(2\nu + 1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 F_{2\nu+1}(\zeta_0) + 2 \sum_{k=1}^{\nu} \frac{(2\nu + 2k + 1)!!}{(2\nu + 2k)!!} \frac{(2\nu - 2k + 1)!!}{(2\nu - 2k)!!} F_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0) (\nu \geq 1)$$

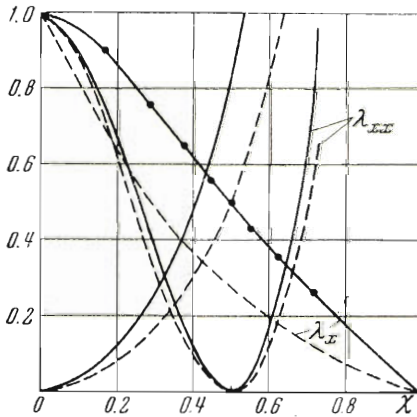
$$F_{2\nu+1} = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 - 1} \frac{Q_{2\nu+1}(\zeta_0)}{Q_{2\nu+1}'(\zeta_0)}, \quad F_{2\nu+1}^{2k} = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 - 1} \frac{Q_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)}{Q_{2\nu+1}^{2k}'(\zeta_0)}$$

Очевидно, что $\lambda_{yy} \rightarrow 0$ при $\zeta_0 \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow b$) и λ_{zz} , так же как и λ_z , неограниченно растет при $\zeta_0 \rightarrow 1$ ($b/a \rightarrow 0$), так как в этом случае $F_{2\nu+1} \rightarrow \ln(a/b)$. Равномерная сходимость найденных решений для потенциала скоростей φ в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$ для всех значений $\zeta_0 > 1$ доказывается легко [1]. При исследовании движений сплюснутого эллипсоида ($a < b$), как это показано в работе [1], все формулы для коэффициентов присоединенных масс, полученные для случая $a > b$, сохраняют свой вид, если в них функции $F_n^m(\zeta_0)$ заменить функциями

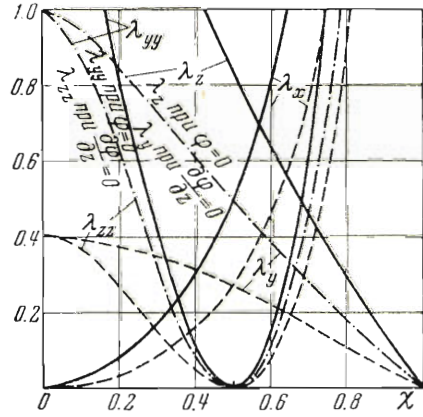
$$f_n^m(\zeta_0) = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 + 1} \frac{q_n^m(\zeta_0)}{q_n^m(\zeta_0)} \quad (0 < \zeta_0 < \infty)$$

$$q_n^m(\zeta) = (\zeta_0^2 + 1)^{m/2} \frac{d^m q_n(\zeta)}{d\zeta^m}, \quad q_n = i^{n+1} Q_n(i\zeta) \quad \left(\frac{a}{b} = \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 + 1}}\right)$$

Полученные результаты вместе с результатами работы [1] и известными [2] результатами исследования движения эллипсоида в безграничной массе жидкости позволяют сравнить коэффициенты присоединенной массы при ударе эллипсоида,



Фиг. 3



Фиг. 4

плавающего на поверхности невесомой жидкости ($\varphi = 0$ при $z = 0$) и весьма тяжелой жидкости ($\partial\varphi/\partial z = 0$ при $z = 0$). Соответствующее сравнение для эллипсоида, экваториальная плоскость которого совпадает с поверхностью жидкости, дано на фиг. 3, а для эллипсоида, экваториальная плоскость которого нормальна поверхности жидкости,—на фиг. 4, где коэффициенты присоединенной массы построены в зависимости от параметра

$$\chi = \frac{1}{1 + a/b}$$

характеризующего удлинение эллипсоида; при этом сплошные линии относятся к условию $(\partial\varphi/\partial z)_{z=0} = 0$, а пунктирные к условию $(\varphi)_{z=0} = 0$; кроме того $\lambda_x = \lambda_y$, $\lambda_{xx} = \lambda_{yy}$, $\lambda_{zz} = 0$ на фиг. 3 и $(\lambda_z)_{\varphi=0} = (\lambda_y)_{\partial\varphi/\partial z=0}$, $(\lambda_{yy})_{\varphi=0} = (\lambda_{zz})_{\partial\varphi/\partial z=0}$ на фиг. 4.

Поступила 18 V 1954

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Блох Э. Л. Горизонтальный удар эллипсоида вращения об идеальную жидкость при наличии свободной поверхности, ПММ т. XVII, вып 6, 1953.
- 2 Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика, ч. I. ОГИЗ, 1948.