Прикладная математика и механика. Том XVIII, 1954
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭФРОСА

Д. И. Шилькрут

(Львов)

Основной трудностью, с которой приходится сталкиваться при применении операционного исчисления, является нахождение «оригинала» по его операционному «изображению». Поэтому выработка новых приемов и преобразований, облегчающих в ряде случаев нахождение оригинала по его изображению, значительно расширяет область применения операционного исчисления.

В настоящей работе рассматривается одно новое преобразование — преобразование параметров, которое является обобщением известного преобразования Эфроса.

1. Преобразование Эфроса, как известно, заключается в следующем. Если:

а) существует оригинал $\varphi(t)$ операционного изображения $F(p)$,

б)
$$\int_0^\infty |\varphi(t)|\, e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty$$

в) аналитическая функция $q(p)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}(p) > \sigma_0$ и в той же полуплоскости удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}\,[q(p)] \geqslant \sigma_0 \tag{1.1}$$

г) функция $u(p)$ ограничена в полуплоскости $\mathrm{Re}(p) > \sigma_0$, то существует оригинал $\Phi(t)$ сложного изображения

$$u(p)\frac{F[q(p)]}{q(p)}$$

который определяется интегралом

$$\Phi(t) = \frac{d}{dt}\int_0^\infty \psi(\tau, t)\, \varphi(\tau)\, d\tau \tag{1.2}$$

где

$$\psi(\tau, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{u(p)\, e^{-\tau q(p)}}{p}\, \frac{e^{pt}}{p}\, dp, \qquad \sigma > \sigma_0 \tag{1.3}$$

2. Рассмотрим преобразование параметров. Пусть $\varphi(t, \lambda, \mu, \ldots)$ является оригиналом операционного изображения $F(p, \lambda, \mu, \ldots)$, где эти функции предполагаются определенными в некоторой области G изменения параметров $\lambda, \mu, \ldots$ в полуплоскости $\mathrm{Re}(p) > \gamma > 0$ и при $t \geqslant 0$.

Если для функций комплексного переменного $u(p)$, $\delta(p)$, $\varepsilon(p), \ldots$ выполняются условия:

а) значения функций $\delta(p)$, $\varepsilon(p), \ldots$ не выходят из области G при $\mathrm{Re}(p) > \gamma$,

б) функция $S[p, \delta(p), \varepsilon(p), \ldots]$ представима интегралом Лапласа, где

$$S(p) = u(p)\frac{F[p, \delta(p), \varepsilon(p), \ldots]}{p} \tag{2.1}$$

в) выполняется неравенство

$$| u(p) | \, | \varphi(t, \delta(p), \varepsilon(p) \dots) | < M e^{\sigma_0 t}$$

где

$$M > 0, \quad \operatorname{Re}(p) > \gamma, \quad t \geqslant 0, \quad \sigma_0 < \gamma$$

то оригинал $\Phi(t)$ изображения $u(p) F[p, \delta(p), \varepsilon(p) \dots]$ может быть представлен в следующем виде:

$$\Phi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{u(p) \varphi[\tau, \delta(p), \varepsilon(p), \dots]}{p^2} e^{p(t-\tau)} dp \right\} d\tau \tag{2.2}$$

Доказательство. Из условия (б) следует, что

$$S(p) = \int_0^\infty \Phi(\tau) e^{-p\tau} d\tau \tag{2.3}$$

Тогда $\Phi(t)$ может быть представлена в виде контурного интеграла:

$$\Phi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{S(p)}{p^2} e^{pt} dp \right\} \tag{2.4}$$

С другой стороны, можно записать

$$S(p) = u(p) \int_0^\infty \varphi[\tau, \delta(p), \varepsilon(p), \dots] e^{-p\tau} d\tau \tag{2.5}$$

так как

$$\frac{F(p, \lambda, \mu, \dots)}{p} = \int_0^\infty \varphi(\tau, \lambda, \mu, \dots) e^{-p\tau} d\tau \tag{2.6}$$

Подставляя $S(p)$ из (2.5) в (2.4), получаем

$$\Phi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \int_0^\infty \frac{u(p) \varphi[\tau, \delta(p), \varepsilon(p), \dots]}{p^2} e^{p(t-\tau)} d\tau \, dp \right\} \tag{2.7}$$

Из условия (в) вытекает абсолютная сходимость интеграла (2.7) при любом фиксированном t. Вследствие этого допустимо изменение порядка интегрирования в (2.7). Меняя порядок интегрирования в (2.7) и применяя лемму Жордана [1], что можно сделать при выполнении условия (в), получаем для $\Phi(t)$ формулу (2.2).

Преобразование параметров и идея замены параметров операторами могут быть применены по крайней мере для тех же целей, что и преобразование Эфроса, т. е. для нахождения оригиналов сложных изображений через оригиналы более простых изображений; для вывода новых соотношений между специальными функциями; для решения систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с разностными ядрами. Рассмотрим ряд примеров.

3. Найдем оригинал $\Phi(t)$ изображения $p / (p + \ln p)$, где ветвь $\ln p$ выбрана таким образом, чтобы значение логарифма положительного числа было вещественным.

Оригинал $\varphi(t, \lambda)$ изображения $p / (p + \lambda)$ равняется $e^{-\lambda t}$. Тогда, применяя преобразование параметров, можно записать

$$\Phi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{-\tau \ln p} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p^2} dp \, d\tau = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{p^{\tau+1}} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} dp \, d\tau =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\tau+1}}{\Gamma(\tau+2)} d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} d\tau \tag{3.1}$$

Аналогичным образом можно найти оригинал $\Phi_\nu(t)$ изображения $p/(p+\ln p)^\nu$, где $\nu>0$. Имеем

$$\Phi_\nu(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t \frac{\tau^{\nu-1}(t-\tau)^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}\,d\tau \tag{3.2}$$

4. Идея замены параметров операторами позволяет вычислить ряд интегралов от специальных функций. В соотношении

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos\omega x dx=\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega^2} \tag{4.1}$$

заменим параметр λ оператором $\sqrt{p}$. Тогда получим

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{p}}\cos\omega x\,dx=\frac{\sqrt{p}}{p+\omega^2} \tag{4.2}$$

Соотношение (4.2) представляет собой равенство двух изображений. Так как из равенства изображений следует равенство их оригиналов почти для всех t, то получим следующее равенство:

$$\int_0^\infty \operatorname{erf}c\,\frac{x}{2\sqrt{t}}\cos\omega x dx=\frac{e^{-\omega^2 t}\operatorname{erf}(i\omega\sqrt{t})}{i\omega} \tag{4.3}$$

Следует отметить, что изложенный способ вычисления интегралов при помощи замены параметров соответствующими операторами принадлежит А. М. Эфросу и А. М. Данилевскому [1], но самое преобразование параметров ими не рассматривалось.

5. Рассмотрим пример применения преобразования параметров к решению краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с разностными ядрами.

В качестве примера рассмотрим вопрос о решении динамических задач для не вполне упругой среды.

Уравнения динамики не вполне упругой изотропной среды имеют вид [3]:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i(x_1,x_2,x_3,t)-\int_0^t[\varphi(t-\tau)+\psi(t-\tau)]\frac{\partial\theta(x_1,x_2,x_3,\tau)}{\partial x_i}d\tau-$$

$$-\int_0^t\psi(t-\tau)\Delta u_i(x_1,x_2,x_3,\tau)d\tau+\rho\left(X_i(x_1,x_2,x_3,t)-\frac{\partial^2 u_i(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t^2}\right)=0 \tag{5.1}$$

$$(i=1,2,3)$$

Здесь через $u_i(x_1,x_2,x_3,t)$ обозначены смещения в направлении оси ox_i; через $\varphi(t-\tau)$ и $\psi(t-\tau)$ — экспериментально определяемые функции, характеризующие отклонения механических свойств среды от совершенной упругости; λ, μ — мгновенные модули упругости, ρ — плотность, $X_i(x_1,x_2,x_3,t)$ — компоненты объемных сил,

$$\theta(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{i=1}^3\frac{\partial u_i(x,x_2,x_3,t)}{\partial x_i} \tag{5.2}$$

Для решения соответствующей краевой задачи для системы уравнений (5.1) применим операционное исчисление.

Тогда для определения изображений $v_i(x_1,x_2,x_3,p)$ компонентов смещений $u_i(x_1,x_2,x_3,t)$ получим систему дифференциальных уравнений

$$[\delta(p)+\varepsilon(p)]\frac{\partial Q(x_1,x_2,x_3,p)}{\partial x_i}+\varepsilon(p)\Delta v_i(x_1,x_2,x_3,p)-\rho p^2 v_i(x_1,x_2,x_3,p)=$$

$$=-\rho[S_i(x_1,x_2,x_3,p)+p^2 f_i(x_1,x_2,x_3)+p\Phi_i(x_1,x_2,x_3,p)]\qquad(i=1,2,3) \tag{5.3}$$

Здесь

$$\delta(p) = \lambda - \frac{F(p)}{p}, \qquad \varepsilon(p) = \mu - \frac{\Psi(p)}{p} \tag{5.4}$$

через $F(p)$ и $\Psi(p)$ обозначено изображение функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, через $S_i(x_1, x_2, x_3, p)$ — соответственно изображения функций $X_i(x_1, x_2, x_3, t)$, а через $Q(x_1, x_2, x_3, p)$ — операционное изображение функций (5.2), $f_i(x_1, x_2, x_3)$ и $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$ — начальные значения перемещений и их скоростей. Аналогичным образом преобразуются и соответствующие граничные условия задачи.

Полученная система уравнений (5.3) отличается от преобразованных операционными методами уравнений динамики упругой среды только тем, что вместо констант λ и μ, которые стоят в преобразованных уравнениях динамики упругой среды, в уравненения (5.3) вставлены операторы $\delta(p)$ и $\varepsilon(p)$. В таком случае для нахождения решений системы (5.3) применимо преобразование параметров (при соответствующих ограничениях).

Применяя преобразование параметров, получаем

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{w_j[x_1, x_2, x_3, \tau, \delta(p), \varepsilon(p)]}{p^2} e^{p(t-\tau)}\, dp\right\} d\tau \tag{5.5}$$

$$(j = 1,2,3)$$

где $w_j(x_1, x_2, x_3, t, \lambda, \mu)$ являются решением той же динамической задачи, но для упругой среды.

Формула (5.5) есть аналитическое выражение так называемого «принципа Вольтерра» для динамических задач. Для статических задач этот принцип был сформулирован Ю. Н. Работновым [5]. Этот принцип заключается в том, что для нахождения решения некоторой задачи для не вполне упругой среды достаточно заменить в решении той же задачи для упругой среды константы λ и μ операторами $\delta(p)$ и $\varepsilon(p)$ и выполнить соответствующие операции.

Изложенные приемы решения системы уравнений (5.1) являются эвристическим средством, и поэтому после получения решения необходимо доказать, что оно действительно является искомым решением. Подобное положение имеет место всегда при применении операционного исчисления.

Решение динамических задач для не вполне упругой среды в форме (5.5) позволяет рассмотреть теорему существования и единственности решений этих задач.

Поступила 10 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Эфрос А. М. и Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы, ДНТВУ, 1937.
2. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат, 1951
3. Гоголадзе В. Г. Некоторые задачи наследственной упругости. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 87, 1938.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление. Гостехиздат, 1950.
5. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, т XII, вып. 1, 1948.