

КОНЕЧНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОСЫ

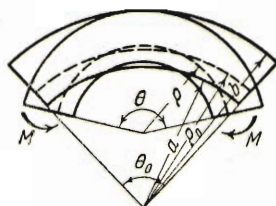
Л. А. Толоконников

(Ростов-на-Дону)

В работе рассматриваются симметричные деформации полосы, ограниченной дугами окружностей и отрезками радиусов. Предполагается, что внешние силы обеспечивают неизменность радиального и тангенциального главных направлений напряжений и деформаций в каждой точке полосы. Геометрические условия совместности деформаций и уравнения равновесия приводятся к одному дифференциальному уравнению, в котором искомой функцией и аргументом являются составляющие деформации. В частности, дается подробное решение задачи о плоском напряженном состоянии пластинки.

1. Условия совместности осесимметричной плоской деформации.

Рассмотрим осесимметричную деформацию части плоскости, ограниченной в естественном состоянии двумя дугами окружностей радиусов a и b , раствора θ_0 и двумя отрезками радиусов (фиг. 1). Перемещения точек из плоскости считаются отсутствующими. При осесимметричной деформации угол между тангенциальными и радиальными направлениями в каждой точке не изменяется. Поэтому деформированное состояние в любой точке полосы определяется через относительное радиальное ε_r и тангенциальное ε_θ удлинения.



Фиг. 1

Радиус произвольной окружности в естественном состоянии обозначим через r , а в деформированном состоянии R . «Угол раствора» полосы в деформированном состоянии обозначим θ .

Согласно определению относительных удлинений,

$$dR = (1 + \varepsilon_r) dr, \quad R\theta = r\theta_0 (1 + \varepsilon_\theta) \quad (1.1)$$

Предположим, что существует такая дуга окружности, которая не изменяет своей длины при деформации тела.

Обозначим радиусы ее в естественном и деформированном состояниях через ρ_0 и ρ соответственно, так что

$$\rho_0\theta_0 = \rho\theta \quad (1.2)$$

Эту окружность в дальнейшем будем называть нейтральной.

Радиус произвольной окружности после деформации можно определить при помощи одной из следующих формул:

$$R = \rho + \int_{\rho_0}^r (1 + \varepsilon_r) dr \quad \text{или} \quad R = \frac{\rho}{\rho_0} r (1 + \varepsilon_\theta) \quad (1.3)$$

Второе выражение получается из (1.1) и (1.2) и используется в дальнейшем.

Подставляя первое из этих выражений во второе из равенств (1.1), имеем

$$r\theta_0 (1 + \varepsilon_\theta) = \rho\theta + \theta \int_{\rho_0}^r (1 + \varepsilon_r) dr$$

Отсюда, дифференцируя по r и учитывая (1.2), получим

$$\rho_0 (1 + \varepsilon_r) - 1 = \rho \frac{d}{dr} (r\varepsilon_\theta) \quad (1.4)$$

— условие совместности деформаций.

2. Уравнение равновесия. Обозначим через σ_r и σ_θ радиальные и тангенциальные напряжения. Рассмотрим отдельно случай плоского деформированного состояния и обобщенного плоского напряженного состояния.

а) В случае плоской деформации условие равновесия сил, приложенных к деформированному элементу цилиндра единичной длины в направлении радиуса, имеет известный вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dR} + \frac{\sigma_r - \tau_\theta}{R} = 0$$

Соотношения (1.1) и (1.5) позволяют записать это уравнение в координатах естественного состояния — переменных Лагранжа

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_\theta} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.1)$$

Условие совместности деформаций (1.4) представим в форме

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{\rho_0}{\rho} (1 + \varepsilon_r) - (1 + \varepsilon_\theta) \quad (2.2)$$

Пользуясь этим соотношением, исключаем из уравнения (2.1) переменную r . Получим уравнение:

$$\left[\frac{\rho_0}{\rho} (1 + \varepsilon_r) - (1 + \varepsilon_\theta) \right] \frac{d\sigma_r}{d\varepsilon_\theta} + \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_\theta} \frac{\rho_0}{\rho} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \quad (2.3)$$

представляющее собой дифференциальное соотношение между деформациями ε_r и ε_θ , так как напряжения σ_r и σ_θ выражаются только через ε_r , ε_θ и механические характеристики материала. Получающееся после интегрирования (2.3) конечное соотношение между ε_r и ε_θ следует присоединить к (2.2) для определения ε_r , ε_θ как функции r . Так можно решить задачу о конечной деформации части цилиндрической трубы, не обращаясь к выражениям деформаций через перемещения, если только известны из опыта выражения напряжений σ_r и σ_θ через деформации ε_r , ε_θ .

б) Для случая обобщенного плоского напряженного состояния условие равновесия радиальных сил несколько усложняется за счет учета неравномерного при различных r изменения толщины пластинки вследствие осевой деформации ε_3 :

$$\frac{d}{dR} [\sigma_r (1 + \varepsilon_3)] + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{R} (1 + \varepsilon_3) = 0$$

Однако и это уравнение приводится к виду

$$\left[\frac{\rho_0}{\rho} (1 + \varepsilon_r) - (1 + \varepsilon_\theta) \right] \frac{d}{d\varepsilon_\theta} [\sigma_r (1 + \varepsilon_3)] + \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_\theta} \frac{\rho_0}{\rho} (\sigma_r - \sigma_\theta) (1 + \varepsilon_3) = 0 \quad (2.4)$$

обеспечивающему постановку задачи «в деформациях». Входящая в это уравнение осевая деформация ε_3 определяется через ε_r и ε_θ из условия

$$\sigma_3 = 0 \quad (2.5)$$

3. Граничные условия. На криволинейных частях контура при $r = a$, $r = b$ можно задавать либо тангенциальные деформации ε_θ , либо радиальные напряжения σ_r , что дает два условия для определения появляющихся при решении задачи постоянных.

На торцах можно удовлетворить граничным условиям лишь интегрально, задавая величины главного вектора и главного момента тангенциальных напряжений.

В случае плоской деформации

$$P = \int_a^b \sigma_\theta (1 + \varepsilon_r) dr, \quad M = \int_a^b \sigma_\theta R (1 + \varepsilon_r) dr \quad (3.1)$$

В случае обобщенного плоского напряжения состояния

$$P = \int_a^b \sigma_\theta (1 + \varepsilon_r) (1 + \varepsilon_3) dr, \quad M = \int_a^b \sigma_\theta R (1 + \varepsilon_r) (1 + \varepsilon_3) dr \quad (3.2)$$

Однако главный вектор тангенциальных напряжений нельзя задавать независимо от радиальных напряжений на криволинейных частях контура: необходимо удовлетворить условиям равновесия деформированной полосы как совершенно жесткого тела. Эти условия получим путем вычисления главного вектора по формулам (3.1) или (3.2) с использованием уравнения равновесия в форме (2.1), либо соответствующего уравнения равновесия при обобщенном плоском напряженном состоянии. После интегрирования по частям найдем:

для случая плоской деформации

$$P = \frac{\rho}{\rho_0} \sigma_r r (1 + \varepsilon_\theta) \Big|_a^b \quad (3.3)$$

для случая обобщенного плоского напряженного состояния

$$P = \frac{\rho}{\rho_0} r \sigma_r (1 + \varepsilon_3) (1 + \varepsilon_\theta) \Big|_a^b \quad (3.4)$$

Решение содержит неопределенные величины ρ , ρ_0 и две постоянные, получающиеся при интегрировании уравнений (2.4) и (1.4).

Недостающее четвертое условие для определения этих постоянных получим, требуя, чтобы, согласно предположениям, относительное удлинение окружности радиуса ρ_0 было равно нулю.

4. Упругое состояние тонкой пластинки при деформациях в ее плоскости. Пластика находится в плоском напряженном состоянии, поэтому из составляющих тензора напряжений отличными от нуля считаются только σ_r и σ_θ .

Вариация работы внутренних сил может быть представлена в форме ^[1]:

$$\delta A = \sigma_r (1 + \varepsilon_\theta) (1 + \varepsilon_3) \delta \varepsilon_r - \sigma_\theta (1 + \varepsilon_r) (1 + \varepsilon_3) \delta \varepsilon_\theta$$

Имея в виду высокоэластические материалы, считаем материал несжимаемым

$$(1 + \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_\theta)(1 + \varepsilon_3) = 1$$

а выражение упругого потенциала принимаем в форме

$$A = \frac{1}{2} E (\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2)$$

где E — модуль упругости материала.

Принятые гипотезы позволяют представить выражения истинных напряжений через деформации весьма просто:

$$\sigma_r = E (1 + \varepsilon_r) (\varepsilon_r + \frac{1}{2} \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = E (1 + \varepsilon_\theta) (\varepsilon_\theta + \frac{1}{2} \varepsilon_r) \quad (4.1)$$

Полагая для краткости

$$x = 1 + \varepsilon_\theta, \quad y = 1 + \varepsilon_r, \quad r = \rho_0 \gamma, \quad \rho = k r \quad (4.2)$$

подставим выражения (4.1) в уравнение (2.4), получим

$$(k y - x) \frac{dy}{dx} - k x + y + \frac{3}{2} (k - 1) = 0$$

Замена переменных

$$x = \xi + \frac{3}{2} \frac{k}{1+k}, \quad y = \xi \left(\eta + \frac{1}{k} \right) + \frac{3}{2} \frac{1}{1+k}$$

приводит это уравнение к интегрируемой форме

$$\xi \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \left(\eta + \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 - 1 = 0$$

Решение его после перехода к прежним переменным имеет вид

$$(y + x - \frac{3}{2})^{1+x} \left(y - x - \frac{3}{2} \frac{1-k}{1-k} \right)^{1-x} = C_1^2 \left(x = \frac{2}{k} \right) \quad (4.3)$$

Обращаясь к условию совместности деформаций (1.4), запишем его в переменных x , y

$$k y = x + r \frac{dx}{dr} \quad (4.4)$$

Исключая из (4.3) и (4.4) переменную y , находим уравнение для определения x как функции r :

$$\left[\frac{\gamma}{k} \frac{dx}{d\gamma} + x \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{3}{2} \right]^{1+\kappa} \left[\frac{\gamma}{k} \frac{dx}{d\gamma} - \frac{k-1}{k+1} \left(x + \frac{x}{k} - \frac{3}{2} \right) \right]^{1-\kappa} = C_1^2$$

Новая замена переменных

$$x \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \frac{3}{2} + C_1^2 e^u, \quad (1+k) \ln \gamma = v \quad (4.5)$$

позволяет представить предыдущее уравнение в форме, разрешенной относительно искомой функции

$$u = g \left(\frac{du}{dv} \right), \quad g(\zeta) = -\frac{1}{2} \ln (\zeta + 1)^{1+\kappa} \left(\zeta - \frac{k-1}{k+1} \right)^{1-\kappa} \quad (4.6)$$

Функция $g(\zeta)$ определена для всех значений ζ , удовлетворяющих условию

$$\zeta > \frac{k-1}{k+1} \quad (4.7)$$

Полагая $du/dv = t$, после дифференцирования (4.6) находим

$$tdv = g'(t) dt$$

Поэтому общий интеграл уравнения (4.6) можно представить в параметрической форме

$$v = \ln C_2' + \int \frac{1}{t} g'(t) dt, \quad u = g(t)$$

Выполняя квадратуру, после исключения параметра t и перехода к прежним переменным, получим

$$x = \frac{3}{2} \frac{k}{1+k} + C' \gamma^{-(1+k)} (-1 + C_2 \gamma^{2k}) \quad (4.8)$$

Поскольку $\epsilon_0 = 0$ на окружности $r = \rho_0$, то на основании (4.8) имеем:

$$C_2 = 1 + \frac{1}{2C'} \frac{2-k}{1+k}$$

а формула для определения тангенциальных деформаций принимает вид

$$2x(1+k) = 3k + (2-k) \gamma^{k-1} + C(\gamma^{-1+k} - \gamma^{-1-k}) \quad (4.9)$$

Формула для определения радиальных деформаций получается теперь на основании (4.4) и (4.9):

$$2y(1+k) = 3 + (2-k) \gamma^{k-1} + C(\gamma^{-1+k} + \gamma^{-1-k}) \quad (4.10)$$

Выражение радиальных и тангенциальных напряжений легко получить, используя (4.1) и формулы (4.9), (4.10),

$$8(1+k)^2 \frac{\sigma_r}{E} = [3 + (2-k) \gamma^{k-1} + C(\gamma^{-1+k} + \gamma^{-1-k})] \times \\ \times [-3k + 3(2-k) \gamma^{k-1} + C(3\gamma^{-1+k} + \gamma^{-1-k})] \quad (4.11)$$

$$8(1+k)^2 \frac{\sigma_r}{E} = [3k + (2-k) \gamma^{k-1} + C(\gamma^{-1+k} - \gamma^{-1-k})] \times \\ \times [-3 + 3(2-k) \gamma^{k-1} + C(3\gamma^{-1+k} - \gamma^{-1-k})] \quad (4.12)$$

Фигурирующие в этом решении постоянные связаны с величиной изгибающего момента, приложенного к боковым краям пластины толщиной h соотношением

$$M = \rho \rho_0 \int_{\alpha}^{\beta} h \sigma_{\theta} \gamma d\gamma, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_0}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_0} \quad (4.13)$$

Выполнение квадратур в правой части этой формулы не представляет особых затруднений, если толщина пластинки изменяется, например, по степенному закону.

Приведем формулу (4.13) в развернутой форме для случая, когда толщина пластинки постоянна

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} (1+k)^2 \frac{Mk}{Eh\rho^2} = & -\frac{3}{2} k (\beta^2 - \alpha^2) + \frac{3k-1}{k+1} (2-k+C)(\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}) + \\ & + C(\beta^{1-k} - \alpha^{1-k}) + \frac{C^2}{6k} (\alpha^{-2k} - \beta^{-2k}) + \\ & + \frac{(2-k+C)^2}{2(k+1)} (\beta^{2k+2} - \alpha^{2k+2}) - \left(\frac{1}{3} + C\right) (2-k+C) \ln \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Полученные общие соотношения позволяют разрешить задачи о чистом изгибе полосы, о конечной деформации полосы при заданной тангенциальной деформации одного из контуров, о деформациях, вызванных давлениями p_a и p_b , приложенными к контурам $r=a$ и $r=b$, и другие.

В качестве примера приведем подробное решение одной из этих задач.

5. Чистый изгиб упругой полосы. Чистым изгибом будем называть напряженное и деформированное состояние полосы, вызванное системой сил, приложенных к ее торцам, и свдвгающейся к паре с моментом M . При определении напряжений и деформаций по заданным размерам полосы и заданной величине момента M следует общее решение (4.9)–(4.12) подчинить граничным условиям

$$\sigma_r(\alpha) = 0, \quad \sigma_r(\beta) = 0 \quad (5.1)$$

и формулированному выше условию (4.13).

Однако фактическое разрешение получающейся системы уравнений относительно неизвестных величин C , k , ρ затруднительно. Дадим решение этой задачи в иной постановке. Покажем, как по заданному искривлению k и отношению β определить α и соотношение между изгибающим моментом M и радиусом кривизны нейтрального волокна ρ_0 .

С этой целью граничные условия (5.1) представим уравнениями:

$$[\varphi_1(\alpha) + C][\varphi_2(\alpha) + C] = 0, \quad [\varphi_1(\beta) + C][\varphi_2(\beta) + C] = 0 \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\gamma) (1+S) &= 3S^{(1+k)/2k} + (2-k)S, & S &= \gamma^{2k} \\ \varphi_2(\gamma) \left(\frac{1}{3} + S\right) &= -kS^{(1+k)/2k} + (2-k)S \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнениям (5.2) можно удовлетворить одним из следующих вариантов выбора постоянных

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \varphi_1(\alpha) = \varphi_1(\beta) = -C, & \quad \text{(III)} \quad \varphi_2(\alpha) = \varphi_1(\beta) = C \\ \text{(II)} \quad \varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\beta) = -C, & \quad \text{(IV)} \quad \varphi_2(\alpha) = \varphi_2(\beta) = C \end{aligned} \quad (5.4)$$

Эти уравнения в дальнейшем именуется определяющими. Для оценки каждого из приведенных вариантов укажем на характерные свойства функций $\varphi_1(\gamma)$ и $\varphi_2(\gamma)$ в различных диапазонах изменения k .

1. Пусть $k < 1$, зависимость φ_1 и φ_2 от γ иллюстрирует фиг. 2. Функция φ_1 не имеет положительных корней и точек максимума, поэтому уравнение $\varphi_1(\gamma) = -C$ имеет только один положительный корень. Следовательно, вариант (I) определяющих уравнений отпадает.

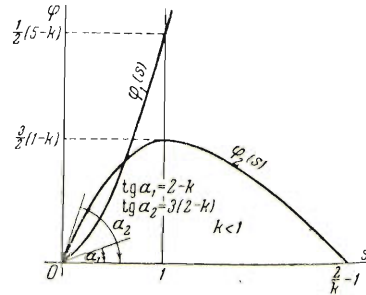
Функция φ_2 принимает максимальное значение

$$(5.5)$$

$$\varphi_{2\max} = \varphi_2(1) = \frac{3}{2}(1 - k) \quad \text{при } \gamma = 1$$

и, кроме нулевого, имеет положительный корень

$$\gamma^{2k} = \frac{2}{k} - 1$$



Фиг. 2

Поэтому уравнение $\varphi_2(\gamma) = -C$ имеет два положительных корня γ_1 и γ_2 , если только

$$0 > C > -\frac{3}{2}(1 - k) \quad (5.6)$$

что указывает на приемлемость варианта (IV) определяющих уравнений.

Итак, если задано $k < 1$ и $\beta > 1$, то в первую очередь рекомендуется построить кривую $\varphi = \varphi_2(S)$ на интервале изменения $0 \leq S \leq 2/(k-1)$. Постоянная C определяется формулой $C = -\varphi_2(\beta)$ либо простым геометрическим построением. Вслед за этим можно найти α , а согласно (4.13), — искомую связь между изгибающим моментом и параметрами естественного состояния полосы. Такое решение можно получить для полосы любых размеров, в том числе и весьма узкой, когда α и β близки к единице.

Полагая, например, $k = 0.50$, $\beta = 1.20$, на основании (5.4) находим $C = -0.7456$ и $\alpha = 0.637$. Используя формулу (4.14), получим

$$M = -0.0713Eh\rho_0^2$$

Кроме того, приведем решение для очень широкой полосы, вырождающейся в пластинку, представляющую собой сектор круга с исключенной вершиной.

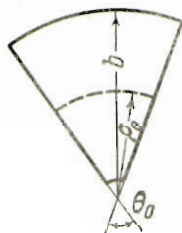
Полагая $\alpha = 0$, нетрудно найти $\beta = 2/(k-1)$ и $C = 0$, а при использовании условия (4.13) предположим, что толщина пластинки постоянна, тогда получим

$$\frac{16}{3} \frac{M}{\rho_0^2 E h} \frac{k^2(k+1)^2}{2-k} = -3(2-k) - 2 \frac{(2-k)(1-3k)}{k+1} \beta^k + \beta^{2k} \quad (5.7)$$

Если размеры пластинки (фиг. 3) известны, то, задавая ρ_0 , можно найти $\beta = b/\rho_0$ и $k = 2(1 + \beta)$; используя эти значения в (5.6), находим изгибающий момент.

Однако использование варианта (IV) определяющих уравнений не исчерпывает всех возможных состояний равновесия полосы при $k < 1$.

Нетрудно видеть, что иное решение можно получить еще и на основании варианта (II) определяющих уравнений. В связи с этим можно указать на возможность ветвления состояний равновесия полосы в плоскости. Однако подробный анализ условий устойчивости состояний равновесия выходит за рамки настоящего параграфа. Вариант (III) определяющих уравнений, очевидно, невозможен.



Фиг. 3

2. Пусть теперь $2 \gg k > 1$. Функция φ_1 всюду положительна, при $\gamma > 1$ имеет максимум и асимптоту $\varphi = 2 - k$.

Вариант (1) определяющих уравнений (5.4) приводит к определенному решению и условия $\alpha < 1$, $\beta > 1$ удовлетворяются, если только

$$\frac{1}{2}(5 - k) > -C > 2 - k \quad (5.6)$$

Такое решение является особым, поскольку оно справедливо лишь в ограниченном диапазоне значений α и β .

Функция φ_2 , кроме нулевого, имеет положительный корень

$$\gamma = \left(\frac{k}{2 - k} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Значение φ_2 при $\gamma = 1$ является максимальным, а прямая $\varphi = 2 - k$ будет асимптотой и $\varphi_2(\gamma)$. Поэтому вариант (III) в этом случае не осуществляется. Второй и четвертый варианты определяющих уравнений выполняются соответственно при

$$2 - k > -C > 0, \quad 0 > -C > \frac{3}{2}(k - 1) \quad (5.7)$$

Решения задачи изгиба полосы для α и β , близких к единице, получаются путем использования именно четвертого варианта определяющих уравнений.

3. Если $k > 2$, то второй вариант неосуществим, а первый, третий и четвертый варианты определяющих уравнений следует использовать соответственно при

$$\frac{1}{2}(5 - k) > -C > 0, \quad 1 > C > 2 - k, \quad \frac{3}{2}(1 - k) > C > 1 \quad (5.8)$$

Конкретные вычисления в последних двух случаях не отличаются по существу от приведенных выше.

Поступила 26 I 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. ГТИ, 1948.