

О ЦЕНТРЕ ИЗГИБА НЕКОТОРЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПОЛИГОНАЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Н. Х. Арутюнян, Н. О. Гулканян

(Ереван)

В настоящей работе рассматривается задача о центре изгиба некоторых призматических стержней полигонального поперечного сечения, а именно профиля с одной осью симметрии (тавровое сечение, швеллер, равнобокий уголок и т. д.).

Существующие приближенные методы для определения координат центра изгиба призматических стержней основаны на гипотезах, принятых в общей теории расчета упругих тонкостенных стержней, предложенной В. З. Власовым^[1], и справедливой только при условии тонкостенности профиля.

Предлагаемый здесь метод точного решения задачи Сен-Венана о центре изгиба некоторых призматических стержней с полигональным поперечным сечением основан на решении общих уравнений теории упругости и поэтому справедлив для профилей с произвольной толщиной стенок.

Сущность метода^[2] заключается во введении вспомогательных функций, при помощи которых удается свести решение дифференциальных уравнений задачи с частными производными (уравнения Пуассона) к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами; при этом значения произвольных постоянных интегрирования определяются из решения вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

§ 1. О центре изгиба стержней таврового поперечного сечения

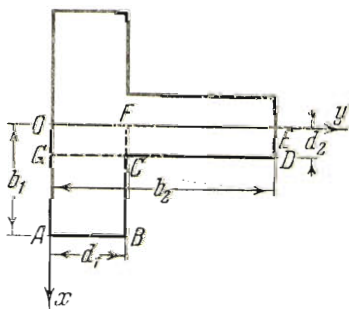
1. Постановка задачи. Определение функции напряжений при изгибе призматического стержня, поперечное сечение которого имеет одну ось симметрии, сводится к интегрированию уравнения Пуассона^[3]

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \\ &= \frac{P\nu}{J(1+\nu)}(y - y_0) - \frac{P}{2J} f'(y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

при условии на контуре сечения

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{P}{2J} [x^2 - f(y)] \frac{dy}{ds} \quad (1.2)$$

Здесь P — изгибающая сила, приложенная на свободном конце стержня в центре тяжести сечения, ν — коэффициент Пуассона, y_0 — координата центра тяжести сечения, J — осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси y , функция $f(y)$ — произвольная и определяется из условий на контуре. В силу симметричности (фиг. 1) достаточно определить функцию напряжений $U(x, y)$ только в области $OABCDE$. Для распространения решения



Фиг. 1

на всю область сечения необходимо, чтобы нормальная производная функции напряжений на оси симметрии равнялась нулю, т. е.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (1.3)$$

2. Введение вспомогательных функций. Полагаем, что функция

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{в области } OABF \\ U_2(x, y) & \text{в области } OGDE \end{cases}$$

Выберем

$$f(y) = d_2^2 \quad (1.4)$$

Тогда согласно (1.2) и (1.3) для функций $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ получим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad U_1(b_1, y) &= \frac{P}{2J} [b_1^2 - d_2^2] (y - d_1) \\ U_1(x, d_1) &= \begin{cases} 0 & (d_2 \leq x \leq b_1) \\ U_2(x, d_1) & (0 \leq x \leq d_2) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} U_1(x, 0) &= -\frac{P}{2J} (b_1^2 - d_2^2) d_1 \\ U_2(x, b_2) &= 0, \quad U_2(d_2, y) = \begin{cases} 0 & (d_1 \leq y \leq b_2) \\ U_1(d_2, y) & (0 \leq y \leq d_1) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\left. \frac{\partial U_2(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad U_2(x, 0) = -\frac{P}{2J} (b_1^2 - d_2^2) d_1$$

Решение ищем в виде

$$U_1(x, y) = H_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } ABCG \\ \Phi_1(x, y) & \text{в области } OFCG \end{cases} \quad (1.7)$$

$$U_2(x, y) = H_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } CDEF \\ \Phi_2(x, y) & \text{в области } OGCF \end{cases} \quad (1.8)$$

где $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ — вспомогательные функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Phi_i(x, y) = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.9)$$

а функции $H_1(x, y)$ и $H_2(x, y)$ уравнению Пуассона

$$\nabla^2 H_i(x, y) = \frac{P\nu}{J(1+\nu)} (y - y_0) \quad (i=1,2) \quad (1.10)$$

Согласно (1.5) и (1.6) эти функции должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} H_1(x, d_1) &= 0, \quad H_1(b_1, y) = \frac{P}{2J} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) \\ H_1(x, 0) &= -\frac{P}{2J} (b_1^2 - d_2^2) d_1, \quad \frac{\partial H_1(0, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1(0, y)}{\partial x} = 0 \\ \Phi_1(x, 0) &= 0 \\ H_2(x, b_2) &= 0, \quad H_2(d_2, y) = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} H_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) &= -\frac{P}{2J} (b_1^2 - d_2^2) d_1 \\ \left. \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

Для непрерывности решения функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) на линиях контакта областей должны удовлетворять также условиям

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, d_1) = H_2(x, d_1), \quad \Phi_1(d_2, y) = 0, \quad \Phi_2(x, d_1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=d_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=d_1} = 0 \\ \Phi_2(d_2, y) = H_1(d_2, y) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Функции $H_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) будем искать в виде рядов. Граничные условия для функций $H_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) неоднородны, однако, следуя идее Г. А. Гринберга [4], решение для этих функций будем искать в таком же виде, как при однородных граничных условиях:

$$H_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \text{где } f_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} H_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy \quad (1.13)$$

$$H_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k-1}(y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}, \quad \text{где } \varphi_{2k-1}(y) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} H_2(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx \quad (1.14)$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \text{где } V_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy \quad (1.15)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{2k-1}(y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \quad (1.16)$$

где

$$W_{2k-1}(y) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_2(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx$$

3. Решение уравнений задачи. Умножим уравнение (1.10) на $(2/d_1) \sin(k\pi y/d_1)$ и проинтегрируем результат по y от нуля до d_1 ; получим

$$\frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \left\{ \frac{\partial^2 H_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1(x, y)}{\partial y^2} - \frac{P\nu}{J(1+\nu)}(y - y_0) \right\} \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy = 0$$

На основании (1.13) получим (1.17)

$$f_k''(x) + \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \frac{\partial^2 H_1(x, y)}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy + \frac{2}{k\pi} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \{ [1 + (-1)^{k+1}] y_0 + (-1)^k d_1 \} = 0$$

Пользуясь условиями (1.11) и (1.13), получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \frac{\partial^2 H_1(x, y)}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy &= \frac{2}{d_1} \left\{ \frac{\partial H_1(x, y)}{\partial y} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \Big|_0^{d_1} - \right. \\ &- \left. \frac{k\pi}{d_1} \int_0^{d_1} \frac{\partial H_1(x, y)}{\partial y} \cos \frac{k\pi y}{d_1} dy \right\} = \frac{2}{d_1} \left\{ - \frac{k\pi}{d_1} H_1(x, y) \cos \frac{k\pi y}{d_1} \Big|_0^{d_1} - \right. \\ &- \left. \frac{k^2 \pi^2}{d_1^2} \int_0^{d_1} H_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy \right\} = - \frac{k\pi}{d_1} \frac{P}{J} (b_1^2 - d_2^2) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 f_k(x) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Подставляя (1.18) в (1.17), получим

$$f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 f_k(x) = \frac{P}{J} \frac{k\pi}{d_1} (b_1^2 - d_2^2) - \frac{2}{k\pi} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \{ [1 + (-1)^{k+1}] y_0 + (-1)^k d_1 \} \quad (1.19)$$

Общее решение уравнения (1.19) имеет вид:

$$f_k(x) = F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} + L_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} - \frac{P}{J} \frac{d_1}{k\pi} (b_1^2 - d_2^2) + \frac{2d_1^2}{(k\pi)^3} + \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \{ [1 + (-1)^{k+1}] y_0 + (-1)^k d_1 \} \quad (1.20)$$

Для определения функции $V_k(x)$ умножим уравнение (1.15) на $(2/d_1) \sin(k\pi y/d_1)$ и проинтегрируем по y от нуля до d_1 ; получим

$$\frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1(x, y)}{\partial y^2} \right\} \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy = 0$$

или на основании (1.15)

$$V_k''(x) + \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy = 0 \quad (1.21)$$

Интегрируя в (1.21) второй член по частям и пользуясь условиями 1.11) и (1.12), получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \frac{\partial^2 \Phi_1(x, y)}{\partial y^2} \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy &= \frac{2}{d_1} \left\{ \frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial y} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \Big|_0^{d_1} - \frac{k\pi}{d_1} \int_0^{d_1} \frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial y} \cos \frac{k\pi y}{d_1} dy \right\} = \\ &= -\frac{2}{d_1} \frac{k\pi}{d_1} \left\{ \Phi_1(x, y) \cos \frac{k\pi y}{d_1} \Big|_0^{d_1} + \frac{k\pi}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy \right\} = \\ &= -\frac{2k\pi}{d_1^2} \left\{ H_2(x, d_1) (-1)^k + \frac{k\pi}{2} V_k(x) \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Подставляя (1.22) в (1.21), получим

$$V_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 V_k(x) = \frac{2k\pi}{d_1^2} (-1)^k H_2(x, d_1)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$V_k(x) = A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} + \frac{2}{d_1} (-1)^k \int_0^x H_2(\xi, d_1) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - \xi) d\xi \quad (1.23)$$

где

$$H_2(\xi, d_1) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1}(d_1) \cos \frac{(2p-1)\pi\xi}{2d_2} \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (1.23) и интегрируя, получим

$$V_k(x) = A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} + \frac{8d_2^2 k}{\pi} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(d_1)}{(2p-1)^2 d_1^2 + 4d_2^2 k^2} \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \right] \quad (1.25)$$

Для $\varphi_{2k-1}(y)$ и $W_{2k-1}(y)$ получим дифференциальные уравнения.

$$\varphi_{2k-1}''(y) - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4d_2^2} \varphi_{2k-1}(y) = \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} (y - y_0)$$

$$W_{2k-1}''(y) - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2} W_{2k-1}(y) = (-1)^k \frac{(2k-1)\pi}{d_2^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1}(y) = & M_{2k-1} \operatorname{ch}(\delta_k y) + N_{2k-1} \operatorname{sh}(\delta_k y) + \\ & + \frac{16 d_2^2 (-1)^{k+1}}{\pi^3 (2k-1)^3} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \left\{ -(y - y_0) - \operatorname{ch}(\delta_k y) y_0 + \frac{1}{\delta_k} \operatorname{sh}(\delta_k y) \right\} \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} W_{2k-1}(y) = & C_{2k-1} \operatorname{ch}(\delta_k y) + D_{2k-1} \operatorname{sh}(\delta_k y) - \\ & - (-1)^k \frac{(2k-1)\pi}{d_2^2} \frac{d_1^2}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \frac{\sin(\mu_p y)}{p^2 + (k-1)^2 / \eta^2} \end{aligned} \quad (1.27)$$

где

$$\delta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2d_2}, \quad \mu_p = \frac{p\pi}{d_1}, \quad \eta = \frac{2d_2}{d_1}$$

4. Определение постоянных интегрирования. Для определения постоянных интегрирования $F_k, L_k, A_k, B_k, M_{2k-1}, N_{2k-1}, C_{2k-1}$ и D_{2k-1} согласно (1.11) и (1.12) получим следующие условия:

$$f_k(b_1) = -\frac{P}{J} \frac{d_1}{k\pi} (b_1^2 - d_2^2) \quad (1.28)$$

$$f_k'(0) + V_k'(0) = 0 \quad (1.29)$$

$$V_k(d_2) = 0, \quad V_k'(x)|_{x=d_2} = 0 \quad (1.30)$$

$$\varphi_{2k-1}(b_2) = 0 \quad (1.31)$$

$$\varphi_{2k-1}(0) + W_{2k-1}(0) = 0 \quad (1.32)$$

$$W_{2k-1}(d_1) = 0, \quad W_{2k-1}'(y)|_{y=d_1} = 0 \quad (1.33)$$

Найдя значения неизвестных A_k, B_k, C_{2k-1} и D_{2k-1} из условий (1.30) и (1.33) и подставляя соответственно в (1.25) и (1.27), получим

$$\begin{aligned} V_k(x) = & \frac{2}{\pi} \eta (-1)^k \operatorname{sh} \mu_k (d_2 - x) \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1}(d_1) \frac{(2p-1)(-1)^{p+1}}{(2p-1)^2 + (\eta k)^2} - \\ & - \frac{2k}{\pi} \eta^2 (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1}(d_1) \frac{\cos(\delta_p x)}{(2p-1)^2 + (\eta k)^2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

где

$$\delta_p = \frac{(2p-1)\pi}{2d_2}, \quad \eta = \frac{2d_2}{d_1}$$

$$\begin{aligned} W_{2k-1}(y) = & \frac{2}{\pi} \frac{d_1}{d_2} (-1)^k \operatorname{sh} \delta_k (y - d_1) \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \frac{p(-1)^p}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} - \\ & - (-1)^k \frac{(2k-1)d_1^2}{\pi d_2^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \frac{\sin(\mu_p y)}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Удовлетворяя условиям (1.28), (1.29), (1.31) и (1.32) из (1.20), (1.26), (1.34) и (1.35), получим следующую совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$F_k = -\frac{1}{\operatorname{ch}(\mu_k b_1)} \frac{2d_1^2}{(k\pi)^3} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \{[1 + (-1)^{k+1}]y_0 + (-1)^k d_1\} - \\ - \frac{1}{\operatorname{cth}(\mu_k b_1)} \frac{2}{\pi} \eta (-1)^k \operatorname{ch}(\mu_k d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1}(d_1) \frac{(2p-1)(-1)^{p+1}}{(2p-1)^2 + (\eta k)^2} \quad (1.36)$$

$$M_{2k-1} = -\frac{2d_1}{\pi d_2} (-1)^{k+1} \operatorname{sh}(\delta_k d_1) \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \frac{p(-1)^p}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} + \\ + \frac{2d_1}{\pi} \frac{P}{J} \frac{(-1)^k}{2k-1} (b_1^2 - d_2^2) \quad (1.37)$$

где $\varphi_{2p-1}(d_1)$ и $f_p(d_2)$ на основании (1.26) и (1.20) имеют значения

$$\varphi_{2p-1}(d_1) = M_{2p-1} [\operatorname{ch}(\delta_k d_1) - \operatorname{cth}(\delta_p b_2) \operatorname{sh}(\delta_p d_1)] - \\ - \frac{16d_2^2 (-1)^{p+1}}{\pi^3 (2p-1)^3} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \left\{ -y_0 [\operatorname{cth}(\delta_p b_2) \operatorname{sh}(\delta_p d_1) - \operatorname{ch}(\delta_p d_1)] - \right. \\ \left. - (b_2 - y_0) \frac{\operatorname{sh}(\delta_p d_1)}{\operatorname{sh}(\delta_p b_2)} + (d_1 - y_0) \right\} \quad (1.38)$$

$$f_p(d_2) = F_p [(\operatorname{ch}(\mu_p d_2) - \operatorname{cth}(\mu_p b_1) \operatorname{sh}(\mu_p d_2))] - \frac{P}{J} \frac{d_1}{p\pi} (b_1^2 - d_2^2) + \\ + \frac{2d_1^2}{(p\pi)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\mu_p d_2)}{\operatorname{sh}(\mu_p b_1)} \right] \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \{[1 + (-1)^{p+1}]y_0 + (-1)^p d_1\} \quad (1.39)$$

5. Исследование и решение бесконечных систем. Введем в (1.36) и (1.37) следующие обозначения:

$$F_k = \frac{(-1)^k}{2k} F_k^* \frac{P}{J} \operatorname{ch}(\mu_k d_2), \quad M_{2k-1} = \frac{(-1)^k}{2k-1} \frac{P}{J} M_{2k-1}^* \operatorname{sh}(\delta_k d_1) \quad (1.40)$$

Подставляя из (1.38), (1.39) и (1.40) значения F_k , M_{2k-1} , $\varphi_{2p-1}(d_1)$ и $f_p(d_2)$ в (1.36) и (1.37), приведем бесконечную систему к следующему виду:

$$F_k^* = \alpha_k^* + \sum_{p=1}^{\infty} a_{k,2p-1}^* M_{2p-1}^*, \quad M_{2k-1}^* = \beta_{2k-1}^* + \sum_{p=1}^{\infty} b_{2k-1,p}^* F_p^* \quad (1.41)$$

где

$$\alpha_k^* = \frac{4d_1^2}{k^2\pi^3} \frac{1}{\operatorname{ch}(\mu_k d_2) \operatorname{ch}(\mu_k b_1)} \frac{\nu}{1+\nu} \{[(-1)^{k+1} + 1]y_0 - d_1\} + \\ + \frac{64k}{\pi^4} d_2^2 \eta \operatorname{th}(\mu_k b_1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 [(2p-1)^2 + (\eta k)^2]} \frac{\nu}{1+\nu} \times \\ \times \left\{ -y_0 [\operatorname{cth}(\delta_p b_2) \operatorname{sh}(\delta_p d_1) - \operatorname{ch}(\delta_p d_1)] - (b_2 - y_0) \frac{\operatorname{sh}(\delta_p d_1)}{\operatorname{sh}(\delta_p b_2)} + (d_1 - y_0) \right\}$$

$$\beta_{2k-1}^* = \frac{2d_1}{\pi} (b_1^2 - d_2^2) \frac{1}{\operatorname{sh}(\delta_k d_1)} - \frac{2(2k-1)d_1^2}{\pi^2 d_2} (b_1^2 - d_2^2) \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} + \frac{4d_1^3}{\pi^4 d_2} (2k-1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 [p^2 + (2k-1)^2 / \eta^2]} \times$$

$$\times \frac{\nu}{1+\nu} \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\mu_p d_2)}{\operatorname{sh}(\mu_p b_1)} \right] \{ [(-1)^p - 1] y_0 + d_1 \}$$

$$a_{k, 2p-1}^* = \frac{4k}{\pi} \eta \operatorname{th}(\mu_k b_1) \frac{\operatorname{sh}(\delta_p d_1)}{(2p-1)^2 + (\eta k)^2} [\operatorname{ch}(\delta_p d_1) - \operatorname{cth}(\delta_p b_2) \operatorname{sh}(\delta_p d_1)]$$

$$b_{2k-1, p}^* = \frac{2k-1}{\pi} \frac{d_1}{d_2} \frac{\operatorname{ch}(\mu_p d_2)}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} [\operatorname{ch}(\mu_p d_2) - \operatorname{cth}(\mu_p b_1) \operatorname{sh}(\mu_p d_2)]$$

Вводя обозначения

$$F_k^* = Z_{2k}, \quad M_{2k-1}^* = Z_{2k-1}, \quad \alpha_k^* = \gamma_{2k}, \quad \beta_{2k-1}^* = \gamma_{2k-1} \quad (1.42)$$

$$C_{2k-1, 2p-1} = 0, \quad C_{2k, 2p} = 0, \quad a_{k, 2p-1}^* = C_{2k, 2p-1}, \quad b_{2k-1, p}^* = C_{2k-1, 2p}$$

совокупность двух бесконечных систем приведем к одной бесконечной системе следующего вида:

$$Z_m = \gamma_m + \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} Z_n \quad (1.43)$$

Покажем, что бесконечная система (1.43) вполне регулярна [5].

Пусть $m = 2k$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{2k, n} = \sum_{p=1}^{\infty} C_{2k, 2p-1} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{k, 2p-1}^* = \frac{4k}{\pi} \frac{2d_2}{d_1} \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \left[\operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{cth} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{(2p-1)^2 + (2kd_2/d_1)^2} = \frac{4k}{\pi} \frac{2d_2}{d_1} \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} \sum_{p=1,3}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{2d_2} \left[\operatorname{ch} \frac{p\pi d_1}{2d_2} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{cth} \frac{p\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{2d_2} \right] \frac{1}{p^2 + (2kd_2/d_1)^2} < \frac{4k}{\pi} \frac{2d_2}{d_1} \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} \times$$

$$\times \sum_{p=1,3}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{2d_2} \exp\left(-\frac{p\pi d_1}{2d_2}\right) \frac{1}{p^2 + (2kd_2/d_1)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} \times$$

$$\times \operatorname{th} \frac{d_2}{d_1} k\pi \left[1 - \exp\left(-\frac{p\pi d_1}{d_2}\right) \right] < \frac{1}{2}$$

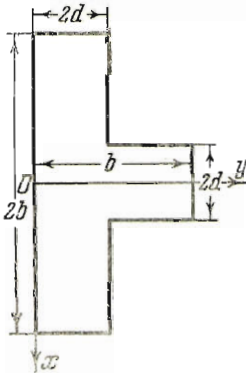
Пусть $m = 2k - 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{2k-1, n} = \sum_{m=2,4}^{\infty} C_{2k-1, m} = \sum_{p=1,2}^{\infty} C_{2k-1, 2p}^* = \sum_{p=1}^{\infty} b_{2k-1, p}^* = \frac{(2k-1)}{\pi} \frac{d_1}{d_2} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \left[\operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{p\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \right] \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2k-1)}{\pi} \frac{d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \exp\left(-\frac{p\pi d_2}{d_1}\right) \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} = \\
 &= \frac{(2k-1)}{\pi} \frac{d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{2p\pi d_2}{d_1}\right)\right] \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} < \\
 &< \frac{2k-1}{\pi} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{2\pi d_2}{d_1}\right)\right] \times \\
 &\times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 (d_1/2d_2)^2} = \left[1 + \exp\left(-\frac{2\pi d_2}{d_1}\right)\right] \frac{1}{2} \left[\operatorname{cth} \frac{(2k-1) d_1}{2d_2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(2k-1) d_1/2d_2}\right] \leq \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{2\pi d_2}{d_1}\right)\right]
 \end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемая система уравнений вполне регулярна:



Фиг. 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_{mn}| \leq \vartheta = \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{2\pi d_2}{d_1}\right)\right] < 1$$

Обозначим значения неизвестных Z_v с избытком через Z_{v+} , а с недостатком через Z_{v-} , т. е. $Z_{v-} \leq Z_v \leq Z_{v+}$.

В качестве примера рассмотрен тавр (фиг. 2), у которого $b_1 = b_2 = b$, $d_1 = 2d_2 = 2d$.

В табл. 1 приведены значения Z_{v+}/b^2d , а в табл. 2 — значения Z_{v-}/b^2d для $v = 1, 2, 3, 4$ и $v \geq 5$.

Значения Z_{v+} в долях b^2d

Таблица 1

$b/2d$	10	5	4	3	2
Z_{1+}	0.4650	0.4590	0.4563	0.4506	0.4349
Z_{2+}	0.1737	0.1716	0.1709	0.1694	0.1652
Z_{3+}	0.2111	0.2085	0.2073	0.2048	0.1981
Z_{4+}	0.1632	0.1612	0.1604	0.1590	0.1549
$Z_{v+} \quad v \geq 5$	0.1690	0.1669	0.1659	0.1640	0.1587

Значения Z_{v-} в долях b^2d

Таблица 2

$b/2d$	10	5	4	3	2
Z_{1-}	0.4382	0.4326	0.4300	0.4247	0.4098
Z_{2-}	0.1490	0.1472	0.1466	0.1444	0.1420
Z_{3-}	0.1590	0.1570	0.1561	0.1542	0.1491
Z_{4-}	0.1267	0.1251	0.1246	0.1236	0.1207
$Z_{v-} \quad v \geq 5$	0	0	0	0	0

6. Определение функции напряжений. Из (1.7), (1.8), (1.13)—(1.15), (1.20), (1.26), (1.34), (1.40), (1.41) и (1.42) для функции напряжений $U(x, y)$ получим следующее выражение:

в области $ABCG$

(1.44)

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k y) \left\{ \frac{(-1)^k}{2k} \operatorname{ch}(\mu_k d_2) Z_{2k} \frac{P}{J} [\operatorname{ch}(\mu_k x) - \right. \\ \left. - \operatorname{cth}(\mu_k b_1) \operatorname{sh}(\mu_k x)] - \frac{P}{J} \frac{d_1}{k\pi} (b_1^2 - d_2^2) + \right. \\ \left. + \frac{2d_1^2}{(k\pi)^3} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\mu_k x)}{\operatorname{sh}(\mu_k b_1)} \right] \{ [1 + (-1)^{k+1}] y_0 + (-1)^k d_1 \} \right\}$$

в области $OFCC$

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k y) \left\{ \frac{(-1)^k}{2k} \operatorname{ch}(\mu_k d_2) Z_{2k} \frac{P}{J} [\operatorname{ch}(\mu_k x) - \right. \\ \left. - \operatorname{cth}(\mu_k b_1) \operatorname{sh}(\mu_k x)] - \frac{P}{J} \frac{d_1}{k\pi} (b_1^2 - d_2^2) + \right. \\ \left. + \frac{2d_1^2}{(k\pi)^3} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\mu_k x)}{\operatorname{sh}(\mu_k b_1)} \right] \{ [1 + (-1)^{k+1}] y_0 + (-1)^k d_1 \} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \eta (-1)^k \operatorname{sh}[\mu_k (d_2 - x)] \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1}(d_1) \frac{(2p-1)(-1)^{p+1}}{(2p-1)^2 + (\eta k)^2} - \right. \\ \left. - \frac{2k}{\pi} \eta^2 (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1}(d_1) \frac{\cos(\delta_p x)}{(2p-1)^2 + (\eta k)^2} \right\}$$

в области $CDEF$

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\delta_k x) \left\{ \frac{(-1)^k}{2k-1} \operatorname{sh}(\delta_k d_1) \frac{P}{J} Z_{2k-1} [\operatorname{ch}(\delta_k y) - \right. \\ \left. + \operatorname{cth}(\delta_k b_2) \operatorname{sh}(\delta_k y)] + \frac{16d_2^2 (-1)^{k+1}}{\pi^3 (2k-1)^3} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \times \right. \\ \left. \times [(\operatorname{cth}(\delta_k b_2) \operatorname{sh}(\delta_k y) - \operatorname{ch}(\delta_k y)) y_0 + \frac{\operatorname{sh}(\delta_k y)}{\operatorname{sh}(\delta_k b_2)} (b_2 - y_0) - (y - y_0)] \right\}$$

7. Определение центра изгиба. Центр изгиба определяется по формуле

$$y = \frac{1}{P} \iint_{\Omega} \left(x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy - \frac{1}{2J} \iint_{\Omega} [x^2 - f(y)] y dx dy$$

где Ω — область поперечного сечения стержня.

Согласно (1.4) $f(y) = d_2^2$. Имеем

$$y = \frac{2}{P} \int_0^{b/2d} \int_0^{b/2d} \left(x \frac{\partial U_1}{\partial x} + y \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) dx dy - \frac{1}{J} \int_0^{b/2d} \int_0^{b/2d} (x^2 - d^2) y dx dy + \quad (1.45) \\ + \frac{2}{P} \int_0^{d/2} \int_0^b \left(x \frac{\partial U_2}{\partial x} + y \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) dx dy - \frac{1}{J} \int_0^d \int_0^b (x^2 - d^2) y dx dy$$

Здесь положено $b_1 = b_2 = b$, $d_1 = 2d_2 = 2d$. Подставляя значения $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ из (1.44) в (1.45), получим

$$\begin{aligned}
 y = & \frac{4}{3} \frac{d^2 b^3}{J} \left\{ 1 + \frac{d}{b} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{\nu}{1+\nu} - \right. \right. \\
 & - 3 \frac{\nu}{1+\nu} \frac{y_0}{b} + \frac{12}{\pi^2} \frac{1}{b^2 d} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_k}{k^3} \left\{ 1 - \operatorname{ch} \left[\frac{k\pi}{4} \times \left(\frac{b}{d} - 4 \right) \right] \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{4d} \right\} + \\
 & + \frac{3}{\pi} \frac{1}{b^2 d} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_k}{k^2} \left\{ \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2d} - \operatorname{ch} \left[\frac{k\pi}{2} \left(\frac{b}{d} - 4 \right) \right] \times \operatorname{csch} \frac{k\pi b}{2d} \right\} + \\
 & + \frac{12}{\pi^2} \frac{1}{b^2 d} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} Z_{2k} \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi b}{2d} - \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2} \operatorname{csch} \frac{k\pi b}{2d} \right) \Bigg\} + \\
 & + \left(\frac{d}{b} \right)^2 \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{384}{\pi^5} \frac{y_0}{b} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi b}{2d} - \operatorname{csch} \frac{k\pi b}{2d} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi b}{4d} \right) - \right. \\
 & - \frac{384}{\pi^5} \frac{y_0}{b} 0.92167 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{4d} \frac{96}{\pi^4} \frac{y_0}{b} \times \\
 & \times \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^4} \operatorname{ch} \left[\frac{k\pi}{4} \left(\frac{b}{d} - 4 \right) \right] \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{4d} - \frac{96}{\pi^4} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^4} \operatorname{sh} k\pi \operatorname{csch} \frac{k\pi b}{2d} + \\
 & + 2 + \frac{y_0}{b} \Bigg] + \left(\frac{d}{b} \right)^3 \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{384}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left(-\operatorname{cth} \frac{k\pi b}{2d} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{csch} \frac{k\pi b}{2d} \operatorname{sch} \frac{k\pi}{2} \right) - \frac{1+\nu}{\nu} + \frac{384}{\pi^5} 0.92167 \right] \Bigg\}
 \end{aligned}
 \tag{1.46}$$

Подставляя значения Z_{k+} и Z_{k-} в (1.46), получим верхнюю y_+ и нижнюю y_- границы центра изгиба.

В табл. 3. приведены значения центра изгиба для тавра при различных отношениях $b/2d$.

Таблица 3

$b/2d$	2	3	4	5	10	∞
y_- / d	1.2859	1.2076	1.1605	1.1295	1.0676	I
y_+ / d	1.3110	1.2281	1.1761	1.1421	1.0740	I

Из табл. 3 видно, что для тонкостенных стержней полученные здесь результаты и результаты, вычисленные приближенным методом В. Э. Владова, совпадают; для $b/2d \geq 10$ разность между значениями координаты центра изгиба, вычисленными предложенным методом и приближенным, не превышает 6.6%; а для отношений $b/2d < 10$ погрешность достигает 23%.

§ 2. О центре изгиба стержня с сечением в виде швеллера

1. Постановка задачи. Решение уравнений задачи. Ввиду симметричности области поперечного сечения относительно оси $x = 0$ (фиг. 3) достаточно определить функцию напряжений $U(x, y)$ только в области $OBDEFG$, потребовав при этом, чтобы

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \tag{2.1}$$

Полагаем $f(y) = b_1^2$, тогда согласно (1.1) и (1.2) функция напряжений $U(x, y)$ должна удовлетворять внутри области сечения уравнению

$$\nabla^2 U = \frac{P\nu}{J(1+\nu)} (y - y_0) \tag{2.2}$$

а на границе

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{P}{2J} (x^2 - b_1^2) \frac{dy}{ds} \tag{2.3}$$

Полагаем, что

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{в области } OBCG \\ U_2(x, y) & \text{в области } ABDE \end{cases}$$

Тогда $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$U_1(x, 0) = 0, \quad U_1(b_1, y) = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \tag{2.4}$$

$$U_1(x, d_1) = \frac{P}{2J} [(b_1 - d_2)^2 - b_1^2] (d_1 - b_2)$$

$$U_2(b_1, y) = 0, \quad U_2(x, 0) = 0, \quad U_2(x, b_2) = 0$$

$$U_2[(b_1 - d_2), y] = \frac{P}{2J} [(b_1 - d_2)^2 - b_1^2] (y - b_2)$$

Решение ищем в виде

$$U_1(x, y) = H_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } OAFG \\ \Phi_1(x, y) & \text{в области } ABCF \end{cases} \tag{2.5}$$

$$U_2(x, y) = H_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } ABCF \\ \Phi_2(x, y) & \text{в области } CDEF \end{cases}$$

где функции $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ должны удовлетворять уравнению Лапласа (1.9), а функции $H_i(x, y)$ — уравнению Пуассона (1.10).

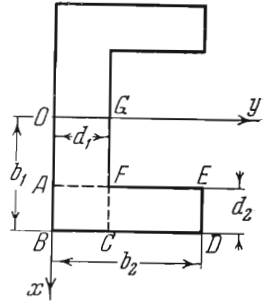
В силу (2.1) и (2.4) функции $\Phi_i(x, y)$ и $H_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad H_1(x, 0) = 0, \quad H_1(b_1, y) + \Phi_1(b_1, y) = 0 \tag{2.6}$$

$$H_1(x, d_1) = \frac{P}{2J} [(b_1 - d_2)^2 - b_1^2] (d_1 - b_2)$$

$$\Phi_1[(b_1 - d_2), y] = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=b_1-d_2} = 0, \quad \Phi_1(x, 0) = 0 \tag{2.7}$$

$$\Phi_1(x, d_1) = H_2(x, d_1) - \frac{P}{2J} [(b_1 - d_2)^2 - b_1^2] (d_1 - b_2)$$



Фиг. 3

$$\begin{aligned}
 H_2[(b_1 - d_2), y] &= \frac{P}{2J} [(b_1 - d_2)^2 - b_1^2] (y - b_2) \\
 H_2(x, b_2) &= 0, \quad H_2(b_1, y) = 0, \quad H_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0 \\
 \Phi_2(b_1, y) &= 0, \quad \Phi_2(x, d_1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right|_{y=d_1} = 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\Phi_2[(b_1 - d_2), y] = H_1[(b_1 - d_2), y] - \frac{P}{2J} [(b_1 - d_2)^2 - b_1^2] (y - b_2)$$

Функции $H_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) будем искать в форме

$$\begin{aligned}
 H_1(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad f_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} H_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy \\
 H_2(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \sin \frac{k\pi(x - b_1 + d_2)}{d_2} \\
 \varphi_k(y) &= \frac{2}{d_2} \int_{b_1 - d_2}^{b_1} H_2(x, y) \sin \frac{k\pi(x - b_1 + d_2)}{d_2} dx \\
 \Phi_1(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad V_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d_1} dy \\
 \Phi_2(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \sin \frac{k\pi(x - b_1 + d_2)}{d_2} \\
 W_k(y) &= \frac{2}{d_2} \int_{b_1 - d_2}^{b_1} \Phi_2(x, y) \sin \frac{k\pi(x - b_1 + d_2)}{d_2} dx
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Умножив первые из уравнений (2.6) и (2.7) на $(2/d_1) \sin(k\pi y/d_1)$, а вторые на $(2/d_2) \sin[k\pi(x - b_1 + d_2)/d_2]$ и интегрируя первые по y от нуля до d_1 , а вторые по x от $b_1 - d_2$ до b_1 , а также пользуясь условиями (2.8) и (2.9), получим

$$\begin{aligned}
 f''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 f_k(x) &= \frac{2d_2}{d_1} \frac{k\pi}{d_1} \frac{P}{2J} (b_2 - d_1)(2b_1 - d_2)(-1)^k + \\
 &+ \frac{2}{k\pi} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} [(-1)^{k+1}(d_1 - y_0) - y_0] \\
 \varphi_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 \varphi_k(y) &= \frac{k\pi}{d_2} \frac{P}{J} (2b_1 - d_2)(y - b_2) + \\
 &+ \frac{2}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{P\nu}{J(1+\nu)} (y - y_0) \\
 V_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 V_k(x) &= \frac{2}{d_1} (-1)^k \frac{k\pi}{d_1} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(d_1) \sin \frac{p\pi(x - b_1 + d_2)}{d_2} - \right. \\
 &\left. - \frac{Pd_2}{2J} (d_2 - 2b_1)(d_1 - b_2) \right] \\
 W_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 W_k(y) &= -\frac{2}{d_2} \frac{k\pi}{d_2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} f_p(b_1 - d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} - \right. \\
 &\left. - \frac{Pd_2}{2J} (2b_1 - d_2)(b_2 - y) \right]
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Из граничных условий (2.8) следует

$$f_k'(0) = 0, \quad \varphi_k(b_2) = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=b_1-d_2} = 0$$

$$V[(b_1 - d_2), y] = 0 \tag{2.11}$$

$$W_k(d_1) = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{y=d_1} = 0$$

$$f_k(b_1) + V_k(b_1) = 0, \quad \varphi_k(0) + W_k(0) = 0 \tag{2.12}$$

Общие решения уравнений (2.10) на основании условий (2.11) будут

$$f_k(x) = F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \frac{d_2}{k\pi} \frac{P}{J} (b_2 - d_1)(2b_1 - d_2)(-1)^k -$$

$$- \frac{2}{k\pi} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^2 \frac{P\nu}{J(1+\nu)} [(d_1 - y_0)(-1)^{k+1} - y_0]$$

$$\varphi_k(y) = M_k \left(\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_2}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \right) - \frac{P}{J} (2b_1 - d_2) \frac{d_2}{k\pi}$$

$$\left\{ (y - b_2) + b_2 \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_2}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{2d_2^2}{(k\pi)^3} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} [1 + (-1)^{k+1}] \left\{ y_0 \left[1 - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi b_2}{d_2} \right] - \right.$$

$$\left. - y_0 \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_2}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \right] - \left[y - b_2 \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi b_2}{d_2} \right] \right\}$$

$$V_k(x) = - \frac{Pd_2}{J} \frac{1}{k\pi} (2b_1 - d_2)(b_2 - d_1)(-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi(-b_1 + d_2 + x)}{d_1} +$$

$$+ \frac{2}{d_1} \frac{\pi}{d_2} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi(x - b_1 + d_2)}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(d_1) \frac{p}{(p\pi/d_2)^2 + (k\pi/d_1)^2} -$$

$$- \frac{2}{d_1} \frac{k\pi}{d_1} (-1)^k \left[\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(d_1) \frac{\sin [p\pi(x - b_1 + d_2)/d_2]}{(p\pi/d_2)^2 + (k\pi/d_1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{Pd_2}{2J} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^2 (2b_1 - d_2)(b_2 - d_1) \right]$$

$$W_k(y) = \frac{2\pi}{d_1 d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi(d_1 - y)}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(b_1 - d_2) \frac{p(-1)^p}{(p\pi/d_1)^2 + (k\pi/d_2)^2} +$$

$$+ \frac{P}{J} \frac{d_2}{k\pi} (2b_1 - d_2) \left\{ (b_2 - d_1) \operatorname{ch} \frac{k\pi(y - d_1)}{d_2} + \frac{d_2}{k\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi(d_1 - y)}{d_2} - \right.$$

$$\left. - (b_2 - y) \right\} + \frac{2}{d_2} \frac{k\pi}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(b_1 - d_2) \frac{\sin(p\pi y/d_1)}{(p\pi/d_1)^2 + (k\pi/d_2)^2} \tag{2.13}$$

Подставляя в (2.12) значения $f_k(x)$, $V_k(x)$, $\varphi_k(y)$ и $W_k(y)$ из (2.13), получим две бесконечные системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 F_k = & -\frac{2\pi}{d_1 d_2} (-1)^k \frac{\text{sh}(\mu_k d_2)}{\text{ch}(\mu_k b_1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P}{\delta_p^2 + \mu_k^2} \left\{ M_p [\text{ch}(\delta_p d_1) - \text{cth}(\delta_p b_2) \text{sh}(\delta_p d_1)] - \right. \\
 & - \frac{P}{J} (2b_1 - d_2) \frac{d_2}{p\pi} \left\{ -(b_2 - d_1) + b_2 [\text{ch}(\delta_p d_1) - \text{cth}(\delta_p b_2) \text{sh}(\delta_p d_1)] \right\} + \\
 & + \frac{2d_2^2}{(p\pi)^2} [1 + (-1)^{p+1}] \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \left[y_0 \left(1 - \frac{\text{sh}(\delta_p d_1)}{\text{sh}(\delta_p b_2)} \right) - \right. \\
 & \left. - y_0 (\text{ch}(\delta_p d_1) - \text{cth}(\delta_p b_2) \text{sh}(\delta_p d_1)) - \left(d_1 - b_2 \frac{\text{sh}(\delta_p d_1)}{\text{sh}(\delta_p b_2)} \right) \right] \left. \right\} + \\
 & + \frac{d_2}{k\pi} \frac{P}{J} \frac{\text{ch}(\mu_k d_2)}{\text{ch}(\mu_k b_1)} (2b_1 - d_2) (b_2 - d_1) (-1)^k + \\
 & + \frac{2}{k\pi} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^2 \frac{1}{\text{ch}(\mu_k b_1)} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} [(d_1 - y_0) (-1)^{k+1} - y_0]
 \end{aligned}$$

где

$$\mu_k = \frac{k\pi}{d_1}, \quad \delta_p = \frac{p\pi}{d_2}$$

$$\begin{aligned}
 M_k = & -\frac{2\pi}{d_1 d_2} \text{sh}(\delta_k d_1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P(-1)^p}{\mu_p^2 + \delta_k^2} \left\{ F_p \text{ch}[\mu_p (b_1 - d_2)] - \right. \\
 & - \frac{d_2}{p\pi} \frac{P}{J} (b_2 - d_1) (2b_1 - d_2) (-1)^p - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu_p^2} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} [(d_1 - y_0) (-1)^{p+1} - y_0] \left. \right\} - \\
 & - \frac{P}{J} \frac{1}{\delta_k} (2b_1 - d_2) \left[(b_2 - d_1) \text{ch}(\delta_k d_1) + \frac{1}{\delta_k} \text{sh}(\delta_k d_1) - b_2 \right] \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

где

$$\mu_p = \frac{p\pi}{d_1}, \quad \delta_k = \frac{k\pi}{d_2}$$

2. Исследование и решение бесконечных систем. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 F_p^* &= \alpha (-1)^p p \frac{J}{P} \text{ch}[\mu_p (b_1 - d_2)] F_p \\
 M_p^* &= -p \frac{J}{P} \frac{1}{\text{sh}(\delta_p d_1)} M_p \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

где α — пока неизвестный коэффициент. Тогда бесконечная система (2.14) будет приведена к виду

$$F_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} M_p^* + \alpha_k, \quad M_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} F_p^* + \beta_k \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{kp}^* &= \alpha k \frac{2\pi}{d_1 d_2} [\text{ch}(\mu_k d_2) - \\
 & - \text{th}(\mu_k b_1) \text{sh}(\mu_k d_2)] \text{sh}(\delta_p d_1) \text{sh}(\mu_k d_2) \frac{1}{\delta_p^2 + \mu_k^2} [\text{ch}(\delta_p d_1) - \text{cth}(\delta_p b_2) \text{sh}(\delta_p d_1)] \\
 b_{kp}^* &= \frac{2k}{\pi\alpha} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{p^2 + (kd_1/d_2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^* &= -\frac{2\pi}{d_1 d_2} \alpha k \operatorname{ch} [\mu_k (b_1 - d_2)] \frac{\operatorname{sh} (\mu_k d_2)}{\operatorname{ch} (\mu_k b_1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{\delta_p^2 + \mu_k^2} \times \\ &\times \left\{ - (2b_1 - d_2) \frac{1}{\delta_p} [- (b_2 - d_1) + b_2 (\operatorname{ch} (\delta_p d_1) - \operatorname{cth} (\delta_p b_2) \operatorname{sh} (\delta_p d_1))] + \right. \\ &+ \frac{2d_2^2}{(\rho\pi)^3} [1 + (-1)^{p+1}] \frac{\nu}{1 + \nu} \left[y_0 \left(1 - \frac{\operatorname{sh} (\delta_p d_1)}{\operatorname{sh} (\delta_p b_2)} \right) - y_0 (\operatorname{ch} (\delta_p d_1) - \right. \\ &\left. - \operatorname{cth} (\delta_p b_2) \operatorname{sh} (\delta_p d_1)) - \left(d_1 - b_2 \frac{\operatorname{sh} (\delta_p d_1)}{\operatorname{sh} (\delta_p b_2)} \right) \right] \left. \right\} + \\ &+ \frac{1}{\delta_k} \alpha k \operatorname{ch} [\mu_k (b_1 - d_2)] \frac{\operatorname{ch} (\mu_k d_2)}{\operatorname{ch} (\mu_k b_1)} (2b_1 - d_2) (b_2 - d_1) - \\ &- \frac{2}{\pi} \alpha \frac{1}{\mu_k^2} \operatorname{ch} [\mu_k (b_1 - d_2)] \frac{1}{\operatorname{ch} (\mu_k b_1)} \frac{\nu}{1 + \nu} [(d_1 - y_0) + (-1)^k y_0] \\ \beta_k^* &= \frac{2\pi}{d_1 d_2} k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{p}{\mu_p^2 + \delta_k^2} \left\{ - \frac{1}{\delta_p} (b_2 - d_1) (2b_1 - d_2) + \right. \\ &+ \frac{2}{p\pi} \frac{1}{\mu_p^2} \frac{\nu}{1 + \nu} [(d_1 - y_0) + y_0 (-1)^p] \left. \right\} + \\ &+ \frac{1}{\delta_k} k (2b_1 - d_2) \left[(b_2 - d_1) \operatorname{cth} (\delta_k d_1) + \frac{1}{\delta_k} - \frac{b_2}{\operatorname{sh} (\delta_k d_1)} \right] \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} F_k^* &= Z_{2k-1}, & C_{2k-1, 2p-1} &= 0, & a_{kp}^* &= C_{2k-1, 2p}, & \alpha_k^* &= \gamma_{2k-1} \\ M_k^* &= Z_{2k}, & C_{2k, 2p} &= 0, & b_{kp}^* &= C_{2k, 2p-1}, & \beta_k^* &= \gamma_{2k} \end{aligned} \quad (2.17)$$

совокупность двух бесконечных систем (2.16) приведем к одной бесконечной системе вида

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} Z_n + \gamma_m \quad (2.18)$$

Покажем, что система (2.18) вполне регулярна. Пусть $m = 2k - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |C_{2k-1, p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^*| = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha k \frac{2\pi}{d_1 d_2} [\operatorname{ch} (\mu_k d_2) - \\ &- \operatorname{th} (\mu_k b_1) \operatorname{sh} (\mu_k d_2)] \operatorname{sh} (\delta_p d_1) \operatorname{sh} (\mu_k d_2) \frac{1}{p^2 + kd_2/d_1} \left(\frac{d_2}{\pi} \right)^2 [\operatorname{ch} (\delta_p d_1) - \\ &- \operatorname{cth} (\delta_p b_2) \operatorname{sh} (\delta_p d_1)] \leq \alpha k \frac{d_2}{\pi d_1} \operatorname{sh} (\mu_k d_2) \frac{\operatorname{ch} [\mu_k (b_1 - d_2)]}{\operatorname{ch} [\mu_k b_1]} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + (kd_2/d_1)^2} = \\ &= \alpha k \frac{d_2}{\pi d_1} \operatorname{sh} (\mu_k d_2) \frac{\operatorname{ch} [\mu_k (b_1 - d_2)]}{\operatorname{ch} (\mu_k b_1)} \frac{\pi d_1}{2kd_2} \left[\operatorname{cth} (\mu_k d_2) - \frac{1}{\mu_k d_2} \right] \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{2} \frac{1}{2} [e^{\mu_k (b_1 - d_2)} + e^{-\mu_k (b_1 - d_2)}] \frac{e^{\mu_k d_2} - e^{-\mu_k d_2}}{e^{\mu_k b_1} + e^{-\mu_k b_1}} = \\ &= \frac{\alpha}{4} \frac{1}{e^{\mu_k b_1} + e^{-\mu_k b_1}} [e^{\mu_k b_1} + e^{-\mu_k (b_1 - 2d_2)} - e^{-\mu_k (b_1 - 2d_2)} - e^{-\mu_k b_1}] \end{aligned}$$

Отсюда окончательно имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} |C_{2k-1,p}| \leq \frac{\alpha}{4} \frac{e^{\mu_k b_1} + e^{-\mu_k (b_1 - 2d_2)}}{e^{\mu_k b_1}} = \frac{\alpha}{4} [1 + e^{2\mu_k (b_1 - d_2)}]$$

Пусть $m = 2k$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |A_{2k,p}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}^*| = \frac{2k}{\pi \alpha} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{p^2 + (kd_1/d_2)^2} = \\ &= \frac{2k}{\pi \alpha} \frac{d_1}{d_2} \frac{\pi}{(2kd_1/d_2)^2} \left(\operatorname{cth} \frac{d_1}{d_2} k\pi - \frac{1}{\pi d_1 k/d_2} \right) \leq \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Выберем для величины α такое значение, чтобы

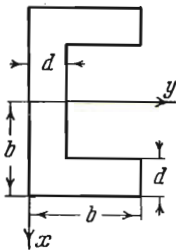
$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{4} [1 + e^{-2\mu_k (b_1 - d_2)}]$$

или

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-2\mu_k (b_1 - d_2)}}}$$

Тогда для любого m

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_{mn}| < \frac{1}{2} \sqrt{1 + e^{-2\mu_k (b_1 - d_2)}} < 1$$



Фиг. 4

т. е. система (2.18) вполне регулярна.

Ниже в табл. 4 и 5 даны значения неизвестных Z_m с избытком Z_{m+} и с недостатком Z_{m-} для случая, когда $d_1 = d_2$, $b_1 = b_2$ и $\nu = 0,3$ (фиг. 4).

Таблица 4

b/d	2	3	4	5	10
$Z_{1+} / b^2 d$	0.1268	0.1684	0.1948	0.2101	0.2426
$Z_{2+} / b^2 d$	0.1486	0.1696	0.1839	0.1914	0.2068
$Z_{3+} / b^2 d$	0.0941	0.1177	0.1358	0.1451	0.1647
$Z_{4+} / b^2 d$	0.1195	0.1360	0.1497	0.1561	0.1695
$Z_{m+} / b^2 d$ $m \geq 5$	0.1036	0.1205	0.1305	0.1363	0.1483

Таблица 5

b/d	2	3	4	5	10
$Z_{1-} / b^2 d$	0.1100	0.1509	0.1737	0.1881	0.2186
$Z_{2-} / b^2 d$	0.1318	0.1520	0.1628	0.1693	0.1828
$Z_{3-} / b^2 d$	0.0677	0.0902	0.1026	0.1105	0.1270
$Z_{4-} / b^2 d$	0.0931	0.1084	0.1165	0.1215	0.1318
$Z_{m-} / b^2 d$ $m \geq 5$	0	0	0	0	0

3. Определение функции напряжений. Согласно (2.5), (2.9), (2.13), (2.15), (2.17) для функции напряжений имеем следующее выражение:
в области *OAFG*

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k y) \left\{ \frac{1}{\alpha} (-1)^k \frac{1}{k} \frac{P}{J} \frac{\text{ch}(\mu_k x)}{\text{ch}[\mu_k (b_1 - d_2)]} Z_{2k-1} - \right. \quad (2.19)$$

$$\left. - \frac{d_2 P}{k\pi J} (b_2 - d_1) (2b_1 - d_2) (-1)^k - \frac{2}{k\pi} \left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^2 \frac{P\nu}{J(1+\nu)} [(d_1 - y_0) (-1)^{k+1} - y_0] \right\}$$

в области *ABCF*

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k y) \left\{ \frac{1}{\alpha} (-1)^k \frac{1}{k} \frac{P}{J} \frac{\text{ch}(\mu_k x)}{\text{ch}[\mu_k (b_1 - d_2)]} Z_{2k-1} - \right.$$

$$- \frac{d_2 P}{k\pi J} (b_2 - d_1) (2b_1 - d_2) (-1)^k - \frac{2}{k\pi} \left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^2 \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \times$$

$$\times [(d_1 - y_0) (-1)^{k+1} - y_0] - \frac{P d_2}{J} \frac{1}{k\pi} (2b_1 - d_2) (b_2 - d_1) (-1)^k \times$$

$$\times \text{ch}[\mu_k (-b_1 + d_2 + x)] + \frac{2}{d_1 d_2} \pi (-1)^k \text{sh}[\mu_k (x - b_1 + d_2)] \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(d_1) \frac{P}{(p\pi/d_2)^2 + (k\pi/d_1)^2} - \frac{2k\pi}{d_1^2} (-1)^k \left[\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(d_1) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin[\delta_p (x - b_1 + d_2)]}{\delta_p^2 + \mu_k^2} - \frac{P d_2}{2J} \left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^2 (2b_1 - d_2) (b_2 - d_1) \right] \Big\}$$

в области *CDEF*

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin[\delta_k (x - b_1 + d_2)] \left\{ - \frac{1}{k} \frac{P}{J} \text{sh}(\delta_k d_1) [\text{ch}(\delta_k y) - \right.$$

$$- \text{cth}(\delta_k b_2) \text{sh}(\delta_k y)] Z_{2k} - \frac{P}{J} (2b_1 - d_2) \frac{d_2}{k\pi} [(y - b_2) +$$

$$+ b_2 (\text{ch}(\delta_k y) - \text{cth}(\delta_k b_2) \text{sh}(\delta_k y))] + \frac{2d_2^2}{(k\pi)^3} \frac{P\nu}{J(1+\nu)} \times$$

$$\times [1 + (-1)^{k+1}] \left[y_0 \left(1 - \frac{\text{sh}(\delta_k y)}{\text{sh}(\delta_k b_2)} \right) - y_0 (\text{ch}(\delta_k y) - \text{cth}(\delta_k b_2) \text{sh}(\delta_k y)) - \right.$$

$$\left. - \left(y - b_2 \frac{\text{sh}(\delta_k y)}{\text{sh}(\delta_k b_2)} \right) \right] \Big\}$$

4. Определение центра изгиба. Центр изгиба определяется по формуле

$$(2.20)$$

$$y = \frac{1}{P} \int_{\Gamma} U(x, y) (x dy - y dx) - \frac{2}{P} \int_{\Omega} \int_{\Omega} U(x, y) dx dy - \frac{1}{2J} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (x^2 - b_1^2) y dx dy$$

где Γ — контур сечения, Ω — область поперечного сечения.

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} U(x, y) dx dy = \quad (2.21)$$

$$= 2 \left\{ \int_0^{b_1-d_2} dx \int_0^{d_1} U_1(x, y) dy + \int_{b_1-d_2}^{b_1} dx \int_0^{d_1} U_1(x, y) dy + \int_{b_1-d_2}^{b_1} dx \int_{d_1}^{b_2} U_2(x, y) dy \right\}$$

Подставляя выражение $U(x, y)$ из (2.19) в (2.20) и (2.21) для случая $d_1 = d_2, b_1 = b_2$, получим следующую формулу для определения центра изгиба:

$$\begin{aligned}
 y = & -\frac{db^4}{J} \left\{ 1 - \frac{10}{3} \frac{d}{b} + \left(\frac{d}{b}\right)^2 \left[\frac{83}{39} + \frac{2}{13} \frac{y_0}{b} - \right. \right. \\
 & - \frac{8}{\pi^2 a} \frac{1}{b^2 d} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{Z_{2k-1}}{k^3} \left(\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{d} (b-d) \right) - \\
 & - \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{b^2 d} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} Z_{2k} \frac{1}{1 + e^{-k\pi b/d}} (1 - e^{-k\pi} - e^{-k\pi(b-d)/d} + e^{-k\pi b/d}) + \\
 & + \frac{16}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(3 \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} - \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} \right) \left. \right\} + \left(\frac{d}{b}\right)^3 \left[-\frac{1}{26} - \frac{1}{13} \frac{y_0}{b} + \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(\operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} - \right. \right. \\
 & - 7 \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \left. \right) + \frac{96}{13\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} - \frac{96}{13\pi^5} \frac{y_0}{b} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left(2 \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} - \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right) \right] + \left(\frac{d}{b}\right)^4 \left[-\frac{5}{39} - \frac{48}{13\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \frac{16}{\pi^3} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

В табл. 6 даны значения координаты центра изгиба швеллера сверху и снизу при различных отношениях b/d .

Из табл. 6 видно, что при увеличении отношения b/d координата центра изгиба рассматриваемого швеллера приближается к значению,

Таблица 6

b/d	2	3	4	5	10	∞
y_+/b	0.0821	-0.0969	-0.1762	-0.2206	-0.3023	-0.375
y_-/b	0.0753	-0.0995	-0.1777	-0.2215	-0.3026	-0.375

которое получается по теории тонкостенных стержней В. З. Власова, и стремится к этому значению при b/d , стремящемся к бесконечности.

Однако следует отметить, что в случае толстостенных стержней (табл. 6) приближенные методы могут дать погрешность порядка от 24% (при $b/d = 10$) до 280% (при $b/d = 3$). Более того, в случае, когда $b/d \leq 2$, решения точное и приближенное будут отличаться в знаке.

§ 3. Центр изгиба равнобокого уголка

Как известно [6], в случае, когда за координатные оси приняты ось симметрии поперечного сечения стержня и перпендикуляр к ней, то определение функции напряжений при изгибе призматического стержня сводится к интегрированию уравнения

$$\Delta^2 \psi = -x' + x'_0 \quad (3.1)$$

где x'_0 — абсцисса центра тяжести при условии на границе сечения

$$\psi(x', y') = 0 \quad (3.2)$$

Преобразуем координаты поворотом осей на угол $\alpha = 45^\circ$. Тогда

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (y - x) \quad (3.3)$$

В новых координатах (3.1) и (3.2) принимают следующий вид:

$$\nabla^2 U = -\sqrt{2}(x+y) + \sqrt{2}(x_0+y_0) \quad (3.4)$$

$$U(x, y) = 0 \text{ на границе сечения} \quad (3.5)$$

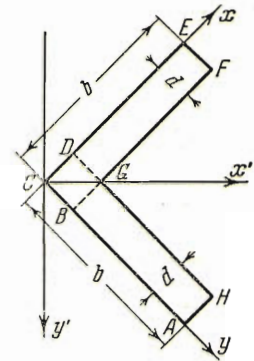
В области $BCEF$ (фиг. 5) функция напряжений $U(x, y)$ такая же, как и в области $ACDH$, только x и y меняются местами. Функцию $U(x, y)$, как и в разделах 1–2, будем искать в виде

$$U(x, y) = H(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } ABGH \\ \Phi(x, y) & \text{в области } BCDG \end{cases} \quad (3.6)$$

причем

$$\nabla^2 H(x, y) = -\sqrt{2}(x+y) + \sqrt{2}(x_0+y_0) \quad (3.7)$$

$$\Delta^2 \Phi(x, y) = 0 \quad (3.8)$$



Фиг. 5

Согласно (3.5) эти функции должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$H(0, y) = H(x, b) = H(d, y) = 0 \quad (3.9)$$

$$\Phi(0, y) = \Phi(x, d) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=d} = 0, \quad \Phi(d, y) = H(y, d) \quad (3.10)$$

$$H(x, 0) + \Phi(x, 0) = 0 \quad (3.11)$$

Функции $H(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ ищем в виде рядов

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d}, \quad \Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d} \quad (3.12)$$

где

$$V_k(y) = \frac{2}{d} \int_0^d \Phi(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d} dx \quad (3.13)$$

Разложим правую часть уравнения (3.7) по синусам:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}(x+y) + \sqrt{2}(x_0+y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{d} \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{k\pi} d (-1)^k + \right. \\ &\left. + 2\sqrt{2} \frac{y}{k\pi} [(-1)^k - 1] - \frac{2\sqrt{2}}{k\pi} (x_0+y_0) [(-1)^k - 1] \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставляя (3.12) и (3.14) в уравнение (3.7), получим

$$\begin{aligned} f_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 f_k(y) &= 2\sqrt{2} \frac{d}{k\pi} (-1)^k + \\ &+ 2\sqrt{2} \frac{y}{k\pi} [(-1)^k - 1] - \frac{2\sqrt{2}}{k\pi} (x_0+y_0) [(-1)^k - 1] \end{aligned}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} f_k(y) &= A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d} + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} - \frac{2\sqrt{2} d^3}{(k\pi)^3} (-1)^k + \\ &+ \frac{2\sqrt{2} d^2}{(k\pi)^3} (x_0+y_0) [(-1)^k - 1] - \frac{d^2 y}{(k\pi)^3} 2\sqrt{2} [(-1)^k - 1] + \\ &+ \frac{d^3}{(k\pi)^4} 2\sqrt{2} [(-1)^k - 1] \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из условий (3.9) следует, что $f_k(b) = 0$. Используя это условие, для $f_k(y)$, получим следующее выражение:

$$f_k(y) = A_k \left(\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \right) + \frac{\operatorname{sh}(k\pi y/d)}{\operatorname{sh}(k\pi b/d)} 2\sqrt{2} \times \\ \times \frac{d^2}{(k\pi)^3} \left\{ d(-1)^k - (x_0 + y_0)[(-1)^k - 1] + b[(-1)^k - 1] \right\} - \\ - \frac{2\sqrt{2}d^2}{(k\pi)^3} \left\{ d(-1)^k - (x_0 + y_0)[(-1)^k - 1] + y[(-1)^k - 1] \right\} \quad (3.16)$$

Следуя идее Гринберга, будем искать решение для функции $\Phi(x, y)$ в такой же форме, как и при однородных граничных условиях, как это было проделано в разделе 1. Для определения функции $V_k(y)$ получим

$$V_k'(y) - \left(\frac{k\pi}{d} \right)^2 V_k(y) = \frac{2k\pi}{d^2} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \sin \frac{p\pi y}{d} \quad (3.17)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$V_k(y) = C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} - \frac{2k\pi}{d^2} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{\sin(p\pi y/d)}{(p\pi/d)^2 + (k\pi/d)^2}$$

Из условий (3.10) следует, что $V_k(d) = V_k'(d) = 0$. Поэтому для $V_k(y)$ получим следующее выражение:

$$V_k(y) = \frac{2}{\pi} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (y-d) \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{p(-1)^p}{p^2 + k^2} - \\ - \frac{2k}{\pi} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{\sin(p\pi y/d)}{p^2 + k^2} \quad (3.18)$$

Из условия (3.11) имеем $f_k(0) + V_k(0) = 0$. Подставляя в это условие выражения $f_k(y)$ и $V_k(y)$ из (3.16) и (3.18), получим для определения коэффициентов A_k бесконечную систему уравнений:

$$A_k = \frac{2}{\pi} (-1)^k \operatorname{sh} k\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p}{p^2 + k^2} \left(\operatorname{ch} p\pi - \operatorname{cth} \frac{p\pi b}{d} \operatorname{sh} p\pi \right) A_p + \\ + \frac{2}{\pi} (-1)^k \operatorname{sh} k\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p^2 + k^2} \frac{2\sqrt{2}}{(p\pi)^3} d^2 \left\{ \frac{\operatorname{sh} p\pi}{\operatorname{sh}(p\pi b/d)} [d + \right. \\ \left. + (x_0 + y_0)((-1)^p - 1) - b(((-1)^p - 1)] - d - (x_0 + y_0)((-1)^p - 1) + \right. \\ \left. + d(((-1)^p - 1)) \right\} - \frac{2\sqrt{2}d^2}{(k\pi)^3} \left\{ (x_0 + y_0)[(-1)^k - 1] + d(-1)^k \right\} \quad (3.19)$$

Эту бесконечную систему (3.19) можно привести к виду

$$A_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} A_p^* + \alpha_k \left(A_k^* = k(-1)^k \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} A_k \right) \quad (3.20)$$

где

$$a_{kp} = \frac{2k}{\pi} \frac{1}{p^2 + k^2} \operatorname{sh} p\pi \left(\operatorname{ch} p\pi - \operatorname{cth} \frac{p\pi b}{d} \operatorname{sh} p\pi \right)$$

$$\alpha_k = \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p^2 + k^2} \frac{2\sqrt{2}}{(p\pi)^3} d^2 \left\{ \frac{\text{sh } p\pi}{\text{sh } (p\pi b/d)} [d + (x_0 + y_0)((-1)^p - 1) - \right. \\ \left. - b((-1)^p - 1)] - d - (x_0 + y_0)[(-1)^p - 1] + d[(-1)^p - 1] \right\} + \\ + \frac{2\sqrt{2}}{k^2\pi^3} \frac{d^2}{\text{sh } k\pi} \{(x_0 + y_0)[(-1)^k - 1] + d\} \quad (3.21)$$

Покажем, что система (3.20) вполне регулярна:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2} \text{sh } p\pi (\text{ch } p\pi - \text{cth } \frac{p\pi b}{d} \text{sh } p\pi) \leq \\ \leq \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2} \text{sh } p\pi (\text{ch } p\pi - \text{sh } p\pi) = \\ = \frac{2}{\pi} k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-p\pi}}{p^2 + k^2} \text{sh } p\pi = \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2} \frac{1 - e^{-2p\pi}}{2} < \\ < \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2} = \frac{k}{\pi} \frac{\pi}{2k} \left(\text{cth } k\pi - \frac{1}{k\pi} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Следовательно, система (3.20) вполне регулярна.

Центр изгиба определяется по формуле

$$x_c' = x_c'^{\circ} + \frac{2\nu}{J(1+\nu)} \iint_{\Omega} \psi(x', y') dx' dy', \quad y_c' = 0 \quad (3.22)$$

в старых координатах, а в новых координатах

$$x_c = x_c^{\circ} + \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\nu}{J(1+\nu)} \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy, \quad y_c = x_c \quad (3.23)$$

где $x_c'^{\circ}$ и x_c° — центры изгиба тонкостенного уголка.

Согласно (3.6)

$$\iint_{\Omega} U(x, y) dx dy = \iint_{0d}^{db} H(x, y) dx dy + \iint_{00}^{da} [H(x, y) + \Phi(x, y)] dx dy + \\ + \iint_{d0}^{bd} H(y, x) dx dy = \\ = 2 \iint_{0d}^{db} H(x, y) dx dy + \iint_{00}^{da} [H(x, y) + \Phi(x, y)] dx dy \quad (3.24)$$

Подставляя (3.24) в (3.23), получим (3.25)

$$x_c = x_c^{\circ} + \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\nu}{J(1+\nu)} \left\{ 2 \iint_{0d}^{db} H(x, y) dx dy + \iint_{00}^{da} [H(x, y) + \Phi(x, y)] dx dy \right\} \\ y_c = x_c$$

Согласно (3.12), (3.13), (3.1C), (3.18) и (3.20)

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{d} \left\{ \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} k\pi \left(\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \right) A_k^* + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} (k\pi y / d)}{\operatorname{sh} (k\pi b / d)} 2\sqrt{2} \frac{d^2}{(k\pi)^3} [d(-1)^k - (x_0 + y_0)((-1)^k - 1) + b((-1)^k - 1)] - \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{2}d^2}{(k\pi)^3} [d(-1)^k - (x_0 + y_0)((-1)^k - 1) + y((-1)^k - 1)] \right\} \quad (3.26)$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{d} \left\{ \frac{2}{\pi} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (y - d) \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{p(-1)^p}{p^2 + k^2} - \right. \\ \left. - \frac{2k}{\pi} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d) \frac{\sin (p\pi y / d)}{p^2 + k^2} \right\} \quad (3.27)$$

Подставляя $H(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ из (3.26) и (3.27) в (3.25), получим

$$x_c = \frac{d}{2} \left\{ 1 + \frac{d}{b} \left[\frac{\nu}{J^*(1+\nu)} \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} x_0^* \right) \right] + \left(\frac{d}{b} \right)^2 \left[- \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{\nu}{J^*(1+\nu)} \times \right. \right. \\ \times \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(1 - \operatorname{ch} k\pi + \operatorname{sh} k\pi \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} \right) A_k^{**} + \\ \left. + \frac{128}{\pi^5} \frac{\nu}{J^*(1+\nu)} x_0^* \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} - \frac{64}{\pi^5} \frac{\nu}{J^*(1+\nu)} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{3} \frac{\nu}{J^*(1+\nu)} + \frac{2}{3} x_0^* \frac{\nu}{J^*(1+\nu)} \right] + \left(\frac{d}{b} \right)^3 \left[- \frac{32}{\pi^5} \frac{\nu}{J^*(1+\nu)} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} - \right. \\ \left. - 0.23688 \frac{\nu}{J^*(1+\nu)} \right] \right\} \quad (3.28)$$

где положено

$$J^* = \frac{J}{b^3 d}, \quad x_0^* = \frac{x_0}{b}, \quad A_k^{**} = \frac{A_k^*}{d^2 b}, \quad \frac{d}{2} = x_c^0$$

Из формулы (3.28) видно, что при $d/b \rightarrow 0$ $x_c \rightarrow \frac{1}{2}d$, т. е. при достаточно малых значениях d/b , координата центра изгиба равнобокого уголка будет $x_c \approx \frac{1}{2}d$, что подтверждает известные результаты^[1], полученные по теории В. З. Власова.

Поступила 28 I 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Гостехтеориздат, 1940.
2. Арутюнян Н. Х. ПММ, т. XIII, вып. 1, 1949.
3. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
5. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеориздат, М.—Л., 1950.
6. Голушкевич С. С. Труды Лен. политехнического института, 1950, № 2.